1 一般ディリクレ級数とベキ級数

1･1　定義と諸定理

定義1･1･1（一般ディリクレ級数）

R が実数集合で、$\sigma, t \in R$ かつ $\lambda_n \in R$, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ $n=1,2,3,\cdots$ とする。
$s=\sigma+it$ とし a_n を任意の複素数とするとき、級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

を **一般ディリクレ級数** と言う。

Note

一般ディリクレ級数において特に $\lambda_n = log\ n$ と置いたものは **通常ディリクレ級数** と呼ばれる。これについては次章で論じる。

定理1･1･2

ディリクレ級数を $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ とし、$f(s)$ が $s=s_c=\sigma_c+t_c i$ において収束するものとする。すると次が成り立つ。

1. $f(s)$ は $\left|Arg\left(s-s_c\right)\right| \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において一様収束する。
2. $f(s)$ は任意の $s=\sigma+ti$ $s.t.$ $\sigma>\sigma_c$ について収束する。

この σ_c をディリクレ級数 $f(s)$ の**収束軸**(line of convergence)と言う。$f(s)$ が常に収束するときは $\sigma_c=-\infty$ 、$f(s)$ が常に発散するときは $\sigma_c=+\infty$ とする。

σ_c の計算方法

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が発散するとき、

$$\sigma_c = \lim_{n\to\infty} sup \frac{log\left|a_1+a_2+\cdots+a_n\right|}{\lambda_n}$$

2. $\sum_{k=1}^{n} a_k$ が収束するとき、

$$\sigma_c = \lim_{n\to\infty} sup \frac{log\left|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\cdots\right|}{\lambda_n}$$

絶対収束性

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right| e^{-\lambda_n s}$ が収束するとき、一般ディリクレ級数 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ は**絶対収束**すると言う。

ある実数 $\sigma_a\ (\ge \sigma_c)$ が存在して、$\sigma>\sigma_a$ なる s について $f(s)$ が絶対収束し $\sigma<\sigma_a$ なる s について $f(s)$ が絶対収束しない。この σ_a を**絶対収束軸**と言う。

σ_a の計算方法

1. $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ が発散するとき、

$$\sigma_a = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)}{\lambda_n}$$

2. $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ が収束するとき、

$$\sigma_a = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+|a_{n+3}|\cdots)}{\lambda_n}$$

一様収束性

定理1･1･2 で見たように、一般ディリクレ級数 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ はある領域内では一様収束する。もう少し詳しく見ると次のようになる。

ある実数 σ_u $(\sigma_c \le \sigma_u \le \sigma_a)$ が存在して、$\sigma > \sigma_u$ なる s について $f(s)$ が一様収束し $\sigma < \sigma_u$ なる s について $f(s)$ が一様収束しない。この σ_u を**一様収束軸**と言う。

σ_u の計算方法

$$\sigma_u = \limsup_{x\to\infty} \frac{\log T_x}{\log x}$$

但し

$$T_x = \sup_{|y|<\infty} \left| \sum_{[x]\le\lambda n<x} a_n e^{-i\lambda_n y} \right|$$

定理1･1･3（正則性）

ディリクレ級数 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ $(s=\sigma+ti)$ が $\sigma>\sigma_c$ で収束するならば、$f(s)$ は $\sigma>\sigma_c$ で正則である。そして $f(s)$ の導関数は次で与えられる。

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n s}$$

定理1･1･4（一意性）

2つのディリクレ級数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad , \quad g(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

がある解領域内で収束し、そこで $f(s)=g(s)$ が成立するならば、全ての n に対して $a_n = b_n$ である。

参考文献

「数論入門」 D.B.ザギヤー 著、片山考次 訳　岩波　1990年、 その他。

1･2　一般ディリクレ級数とベキ級数

一般ディリクレ級数は通常ディリクレ級数の他にベキ級数を含むことができる。以下の節ではこのことを考察する。

1･2･1　ベキ級数と一般ディリクレ級数との関係

ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ と一般ディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ と間には次なる関係がある。

$$c_n = a_n \quad , \quad n = \lambda_n \quad , \quad z - z_0 = e^{-s} \tag{2.1}$$

特に、ベキ級数が $n=0$ から始まるときは

$$c_{n-1} = a_n \quad , \quad n-1 = \lambda_n \quad , \quad z - z_0 = e^{-s} \tag{2.0}$$

計算

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-s})^{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (e^{-s})^{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Note

関数 $f(z)$ がベキ級数で表されるとき、これと同値なディリクレ級数が表す関数は $f(s)$ ではない。$z-z_0 = e^{-s}$ であるから $f(z) = f(e^{-s}+z_0)$ である。即ち、ベキ級数と同値なディリクレ級数が表す関数 f は合成関数である。

1･2･2　収束円と収束軸

上で見たように、ベキ級数の変数 $z-z_0$ と一般ディリクレ級数の変数 s との間には

$$z - z_0 = e^{-s}$$

なる関係があった。即ち、

$$s = -\log(z-z_0) = -\log|z-z_0| - i\arg(z-z_0)$$

ここで $s = \sigma + it$, $z = x + iy$ と置けば

$$\sigma + it = -\log|(x-x_0)+i(y-y_0)| - i\arg\{(x-x_0)+i(y-y_0)\}$$

$x-y$ 座標はこの変換によって σ–t 座標に移されるのであるが、σ–t 座標は極座標 $r-\theta$ にそっくりである。両者の違いは実数部における $\log$ の有無のみである。

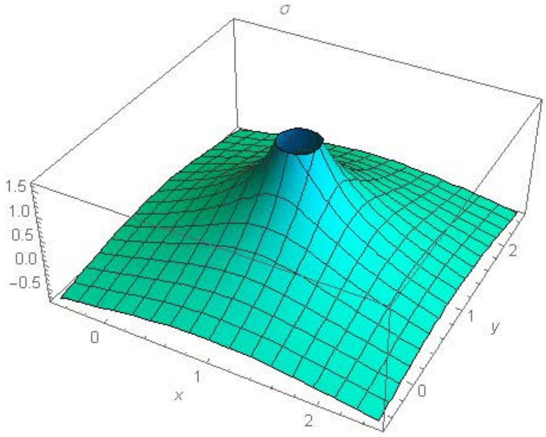
これより、

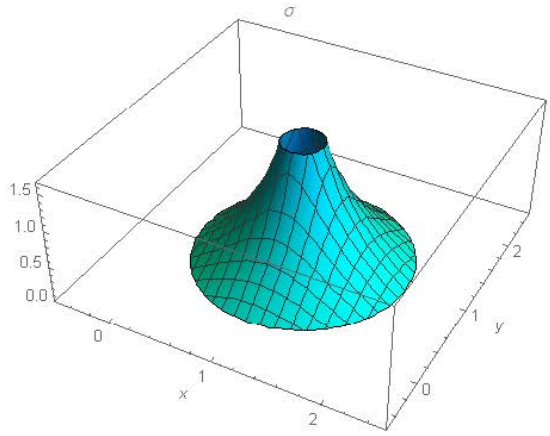
$$\sigma = -\log\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{2.σ}$$

$$t = -\arg\{(x-x_0)+i(y-y_0)\} \tag{2.t}$$

$z_0 = x_0 + iy_0 = 1 + i1$ のとき、実数部 (2.σ) を図示すれば左図のとおりである。実数部 σ の水平断面は全て点 $(1,1)$ を中心とした円である。各円の半径は $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ により与えられる。

例えばこの半径を1 とすれば、(2.σ) より $\sigma = -log1 = 0$。 この高さで左図を水平に切断したのが右図である。





収束半径 R が 1 のとき、そのベキ級数は右図の円内で収束する。このことは、対応する一般ディリクレ級数がこの円より上 i.e. $\sigma > 0$ で収束すべきことを意味する。この半径 R の収束円を与える高さ $\sigma_c = -logR$ が **収束軸** である。

以上、収束円と収束軸の関係を図形により見てきたが、解析的に示せば次のとおり。

$z - z_0 = e^{-s}$ を用いて

$$e^{-\sigma_c} \equiv R > |z - z_0| = |e^{-s}| = |e^{-\sigma - it}| = e^{-\sigma}$$

i.e.

$$e^{-\sigma} < e^{-\sigma_c} = R$$

両辺の対数をとって

$$\sigma > \sigma_c = -logR \tag{2.2}$$

c.f.

第1節の定義によれば、収束軸 σ_c は次のように計算される。

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(or \sum_{n=0}^{\infty} c_n \right)$ が収束するとき、 $\sum_{k=1}^{n} c_k$ も収束する。従って 2 により

$$\sigma_c = \lim_{n\to\infty} sup \frac{log|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \cdots|}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} sup \frac{log|c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} \cdots|}{n}$$

これによる計算は多くの場合困難である。上記 (2.2) を用いる方が良い。

副産物

上記と $R = \lim_{n\to\infty} inf |c_n|^{-1/n}$, $\sigma_c = -logR$ より 次式を得る。

$$\lim_{n\to\infty} sup |c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} \cdots|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} sup |c_n|^{1/n} \quad (= 1/R) \tag{2.3}$$

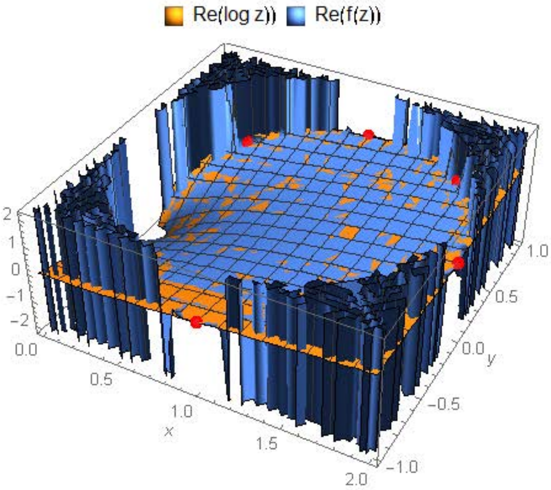
1・3　初等関数の一般ディリクレ級数表示

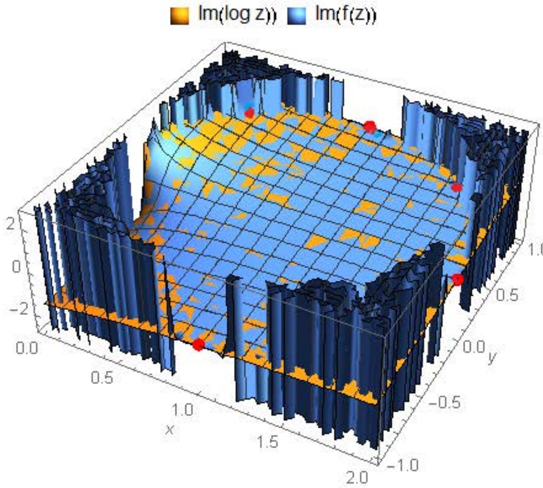
1・3・1　対数関数の一般ディリクレ級数表示

関数 $\log z$ は次のようにベキ級数展開される。

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n = f(z) \tag{1.f}$$

$z = x+iy$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。
左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。両図において、右辺の収束半径 R が 1 であることが一見して分かる。また、後の図との比較するため、円周の適当な5点に赤い印が付けられている。



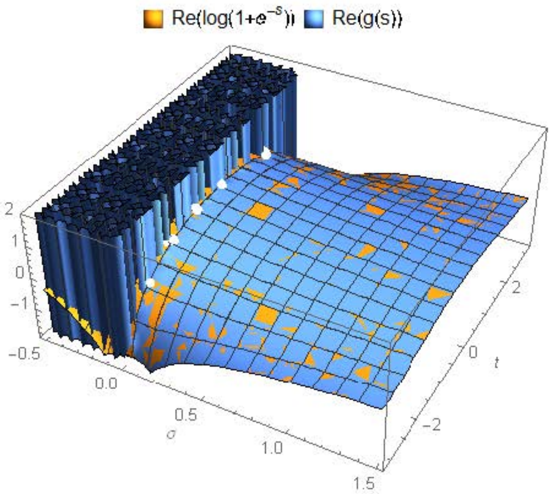


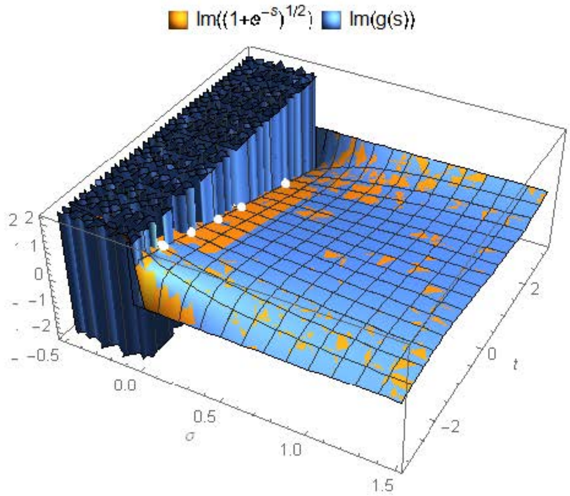
(1.f) において $z-1 = e^{-s}$ と置けば

$$\log\left(1+e^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-ns} = g(s) \tag{1.g}$$

$a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\lambda_n = n$ と置けば (1.g) は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ となるから、右辺は一般ディリクレ級数である。但し、左辺は $\log s$ ではなく $\log\left(1+e^{-s}\right)$ であることに注意すべきである。

$s = \sigma+it$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。





左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。両図にお

いて、右辺の収束軸 σ_c が 0 であることが一見して分かる。また、前図の5点は $s=-log(z-1)$ により収束円から収束軸の白点に移されていることも分かる。
なお、収束軸 σ_c は 1･2･2 (2.2) を用いて次のように計算される。

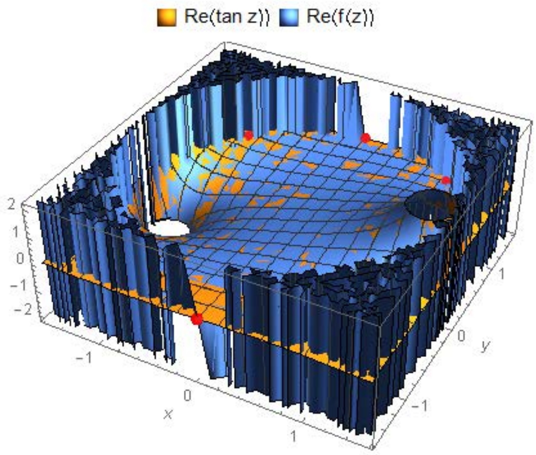
$$\sigma_c = -logR = -log1 = 0$$

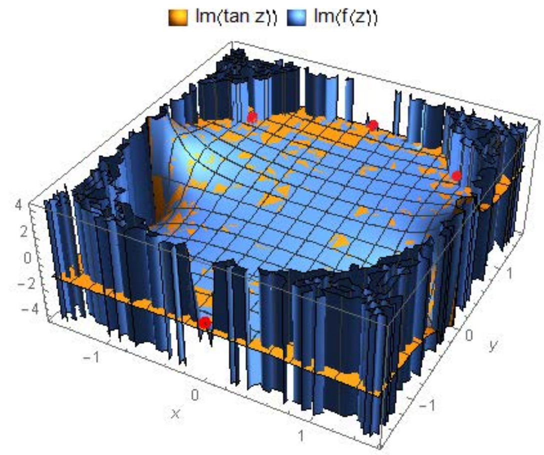
1･3･2 正接関数の一般ディリクレ級数表示

関数 $tan\ z$ はベルヌイ数 B_{2n} を用いて次のようにベキ級数展開される。

$$tan\ z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{2n\ (2n-1)\,!}B_{2n}z^{2n-1} = f(z) \tag{2.f}$$

$z = x+iy$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。
左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。両図において、右辺の収束半径 R が $\pi/2$ らしいことが分かる。また、後の図との比較するため、円周の適当な4点に赤い印が付けられている。

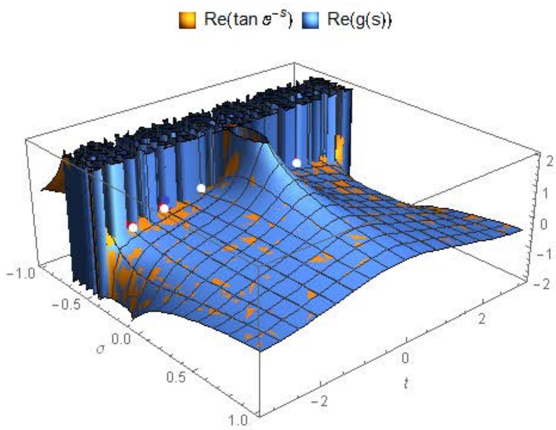


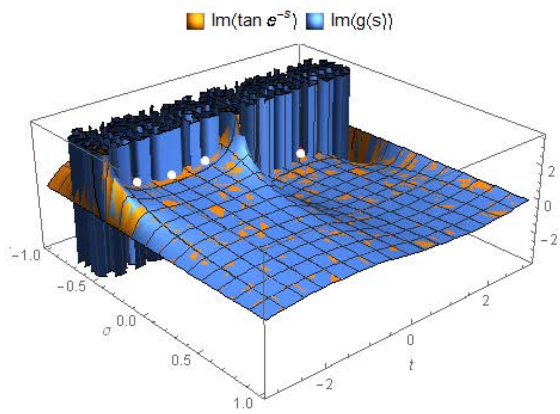


(2.f) において $z=e^{-s}$ と置けば

$$tan\ e^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{2n\ (2n-1)\,!}B_{2n}e^{-(2n-1)s} = g(s) \tag{2.g}$$

$a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{2n\,(2n-1)\,!}B_{2n}$, $\lambda_n = 2n-1$ と置けば (2.g) は $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}$ となるから、右辺は一般ディリクレ級数である。但し、左辺は $tan\ s$ ではなく $tan\ e^{-s}$ であることに注意すべきである。 $s = \sigma+it$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。





左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。両図において、右辺の収束軸 σ_c が -0.5 付近にあることが分かる。また、上図の4点は $s=-\log z$ により収束円上から収束軸上の白点に移されていることも分かる。
なお、収束軸 σ_c は 1･2･2 (2.2) を用いて次のように計算される。

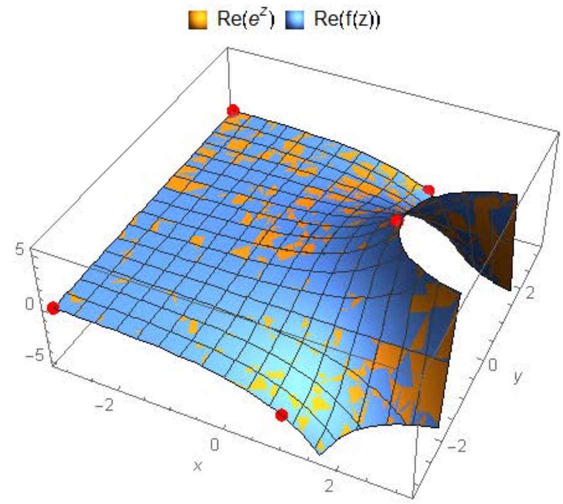
$$\sigma_c = -\log R = -\log\frac{\pi}{2} = -0.451852\cdots$$

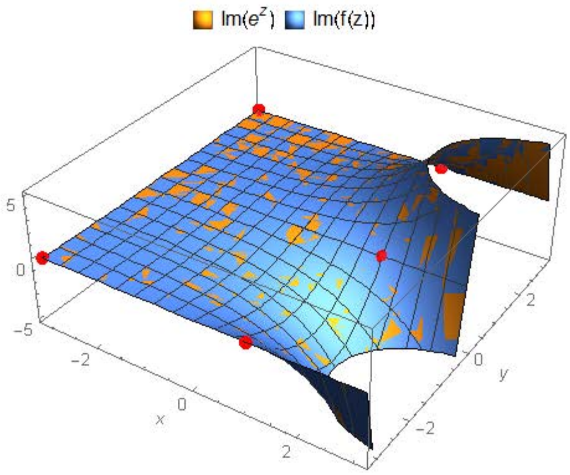
1･3･3　指数関数の一般ディリクレ級数表示

指数関数 e^z は次のようにベキ級数展開される。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!} = f(z) \tag{3.f}$$

$z=x+iy$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。
左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。





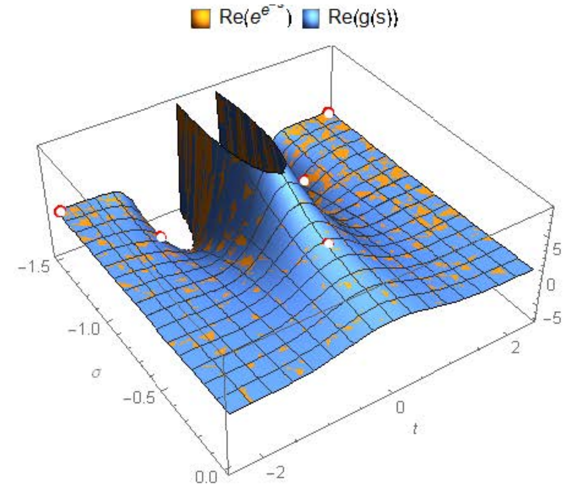
両図において、収束円の如きものは見当たらず、両辺は完全に重なって斑に見えている。後の図と比較するため、適当な5点に赤い印が付けられている。

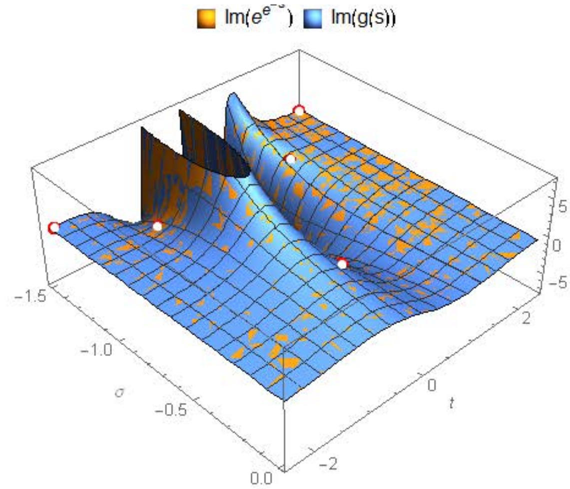
(3.f) において $z=e^{-s}$ と置けば

$$e^{e^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(n-1)s}}{(n-1)!} = g(s) \tag{3.g}$$

$a_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$, $\lambda_n = n-1$ と置けば (3.g) は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ となるから、右辺は一般ディリクレ級数である。但し、左辺は e^s ではなく $e^{e^{-s}}$ であることに注意すべきである。

$s=\sigma+it$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次頁のようである。
左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。
両図において収束軸の如きものは見当たらない。また、上図の赤点は $s=-\log z$ によりこれらの図の白点に移されている。





なお、収束軸 σ_c は 1･2･2 (2.2) を用いて次のように計算される。

$$\sigma_c = -\log R = -\log \infty = -\infty$$

2016.08.04

Kano.Kono

宇宙人の数学