3 ディリクレ級数の相補級数

3･1　スチルチェス定数による冪級数展開

リーマン･ゼータ関数はスチルチェス定数を用いて1の周りで冪級数に展開されることが知られている。本節でこれを利用して、ディリクレ級数で表される色々な関数を冪級数に展開する。

公式 3･1･1（ζ(z) のローラン展開 ）

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \gamma_r \frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{z-1} + \gamma_0 - \gamma_1\frac{(z-1)^1}{1!} + \gamma_2\frac{(z-1)^2}{2!} - \gamma_3\frac{(z-1)^3}{3!} + - \cdots$$

但し γ_r は次式で定義されるスチルチェス定数である。

$$\gamma_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\log k)^r}{k} - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1}\right\}$$

(1.1) はしばしばスチルチェス定数の定義式として用いられているので、証明はしない。これは本節の基本となる公式である。

公式 3･1･2 (η(z) のテイラー展開)

ディリクレ･イータ級数を $\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log r}$、スチルチェス定数を γ_s　$s=0,1,2\cdots$ とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\eta(z) = \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.2}$$

$$= \log 2 - \left(\frac{\log^2 2}{2} - \gamma_0\log^1 2\right)\frac{(z-1)^1}{1!}$$

$$+ \left(\frac{\log^3 2}{3} - \gamma_0\log^2 2 - 2\gamma_1\log^1 2\right)\frac{(z-1)^2}{2!}$$

$$- \left(\frac{\log^4 2}{4} - \gamma_0\log^3 2 - 3\gamma_1\log^2 2 - 3\gamma_2\log^1 2\right)\frac{(z-1)^3}{3!} + - \cdots$$

証明

ディリクレ･イータ関数とリーマン･ゼータ関数には次なる関係がある。

$$\eta(z) = \left(1-2^{1-z}\right)\zeta(z)$$

(1.1) に $1-2^{1-z}$ を乗じれば

$$\eta(z) = \left(1-2^{1-z}\right)\left\{\frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_r}{r!}(z-1)^r\right\}$$

ここで $1-2^{1-z}$ を1の周りでテイラー展開すると

$$1-2^{1-z} = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r$$

よって

$$\eta(z) = \left\{\frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_r}{r\,!}(z-1)^r\right\}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r$$

即ち、

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^{r-1} \tag{a}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_0\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r \tag{b}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_r}{r\,!}(z-1)^r\cdot\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r \tag{c}$$

ここで

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^{r-1} = \log 2-\frac{\log^2 2}{2\,!}(z-1)+\sum_{r=3}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^{r-1}$$

$$= \log 2-\frac{\log^2 2}{2\,!}(z-1)+\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\frac{\log^{r+1} 2}{(r+1)\,!}(z-1)^r \quad \text{(a)}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_0\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r = \frac{\gamma_0\log 2}{1\,!}(z-1) + \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_0\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r \quad \text{(b)}$$

また、2つの級数のコーシー積は

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty}a_r x^r\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty}b_r x^r\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}a_s b_{r+1-s}x^{r+1}$$

であったから

$$a_s = (-1)^s\frac{\gamma_s}{s\,!}(z-1)^s \quad , \quad b_r = (-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r$$

と置けば

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_r}{r\,!}(z-1)^r\cdot\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^r 2}{r\,!}(z-1)^r$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}(-1)^s\frac{\gamma_s}{s\,!}\cdot(-1)^{r+1-s-1}\frac{\log^{r+1-s}2}{(r+1-s)\,!}(z-1)^{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}(-1)^r\frac{\gamma_s}{s\,!}\frac{\log^{r+1-s}2}{(r+1-s)\,!}(z-1)^{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(r+1)\,!}\sum_{s=1}^{r}\frac{(r+1)\,!}{s\,!(r+1-s)\,!}\gamma_s(\log 2)^{r+1-s}(z-1)^{r+1}$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r\,!}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}(z-1)^r \quad \text{(c)}$$

かくて

$$\eta(z) = (a) + (b) + (c)$$

$$= \log 2 - \frac{\log^2 2}{2!}(z-1) + \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r \frac{\log^{r+1}2}{(r+1)!}(z-1)^r$$

$$+ \frac{\gamma_0 \log 2}{1!}(z-1) + \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\gamma_0 \log^r 2}{r!}(z-1)^r$$

$$+ \sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r!}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}(z-1)^r$$

$$= \log 2 - \left(\frac{\log^2 2}{2} - \gamma_0 \log 2\right)\frac{z-1}{1!}$$

$$+ \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \gamma_0 \log^r 2 - \sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

$$= \log 2 - \left(\frac{\log^2 2}{2} - \gamma_0 \log 2\right)\frac{z-1}{1!}$$

$$+ \sum_{r=2}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

$$= \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.2}$$

公式 3·1·3 ($\lambda(z)$ のローラン展開)

ディリクレ・ラムダ級数を $\lambda(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log(2r-1)}$、スチルチェス定数を $\gamma_s \quad s=0,1,2\cdots$ とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\lambda(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{\gamma_0 + \log 2}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.3}$$

$$= \frac{1}{2(z-1)} + \frac{\gamma_0 + \log 2}{2}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \frac{\log^2 2}{2} - \gamma_0 \log^1 2\right)\frac{(z-1)^1}{1!}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\gamma_2 + \frac{\log^3 2}{3} - \gamma_0 \log^2 2 - 2\gamma_1 \log^1 2\right)\frac{(z-1)^2}{2!}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\gamma_3 + \frac{\log^4 2}{4} - \gamma_0 \log^3 2 - 3\gamma_1 \log^2 2 - 3\gamma_2 \log^1 2\right)\frac{(z-1)^3}{3!} + - \cdots$$

証明

リーマン・ゼータ、ディリクレ・イータおよびディリクレ・ラムダの間には次なる関係がある。

$$\lambda(z) = \frac{\zeta(z)+\eta(z)}{2}$$

これに (1.1) と (1.2) を代入すれば

$$\lambda(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\frac{(z-1)^r}{r!}\right\}$$

$$+\frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

これより

$$\lambda(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{\gamma_0+\log 2}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.3}$$

公式 3･1･4 ($\beta(z)$ のテイラー展開)

ディリクレ・ベータ級数を $\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log(2r-1)}$ 、とするとき、

全複素平面上で次式が成立する。

$$\beta(z) = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{r}{s}(\log 4)^{r-s}\left\{\gamma_s\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_s\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.4}$$

但し、$\gamma_r(a)$ は次式で定義される一般スティルチェス定数である。

$$\gamma_r(a) = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{\log^r(k+a)}{k+a} - \frac{\log^{r+1}(m+a)}{r+1}\right\}$$

証明

ディリクテ・ベータ関数 $\beta(z)$ について次の式が知られている。

$$\beta(z) = \frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}$$

他方、フルヴィッツ・ゼータ関数 $\zeta(z,a)$ は一般スティルチェス定数 $\gamma_r(a)$ を用いて次のように
ローラン展開される。

$$\zeta(z,a) = \frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r(a)\frac{(z-1)^r}{r!}$$

これより

$$\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)\frac{(z-1)^r}{r!}$$

$$\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{z-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\frac{(z-1)^r}{r!}$$

これらを上に代入すれば

$$\beta(z) = \frac{1}{4^z}\left[\frac{1}{z-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)\frac{(z-1)^r}{r!}-\left\{\frac{1}{z-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\frac{(z-1)^r}{r!}\right\}\right]$$

i.e.

$$\beta(z) = \frac{1}{4^z}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

ここで $1/4^z$ を1の周りでテイラー展開すると

$$\frac{1}{4^z} = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \log^r 4\cdot\frac{(z-1)^r}{r!}$$

よって

$$4\beta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \log^r 4\cdot\frac{(z-1)^r}{r!}\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

これらのコーシー積を作ると

$$4\beta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{r}{s}\log^{r-s}4\cdot\left\{\gamma_s\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_s\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

故に

$$\beta(z) = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{r}{s}(\log 4)^{r-s}\left\{\gamma_s\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_s\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!} \tag{1.4}$$

3･2　ディリクレ級数のテイラー展開

定理 3･2･1

通常ディリクレ級数 $f(z)$ が次のようであるとする。

$$f(z) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s e^{-z\log s} = \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \frac{a_3}{3^z} + \frac{a_4}{4^z} + \cdots \tag{2.0}$$

すると、$f(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{a_{s+1}\log^r(s+1)}{(s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r!} \tag{2.1}$$

但し、$0^0 = 1$ とする。

証明

$e^{-z\log s}$ の高階微分は

$$\left(e^{-z\log s}\right)^{(r)} = (-1)^r \log^r s\, e^{-z\log s} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、$z=c$ における高階微係数は

$$\left(e^{-z\log s}\right)^{(r)}\Big|_c = (-1)^r \log^r s\, e^{-c\log s} = (-1)^r \frac{\log^r s}{s^c} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

これを用いて $e^{-z\log s}$ を c の周りでテイラー展開すれば、

$$e^{-z\log s} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\log^r s}{s^c}\frac{(z-c)^r}{r!}$$

これを (2.0) に代入すると

$$f(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{a_s \log^r s}{s^c}\frac{(z-c)^r}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{a_{s+1}\log^r(s+1)}{(s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r!} \tag{2.1}$$

最初の4項を展開すると次のとおり、

$$f(z) = \frac{(z-c)^0}{0!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{s+1}\log^0(s+1)}{(s+1)^c} - \frac{(z-c)^1}{1!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{s+1}\log^1(s+1)}{(s+1)^c}$$
$$+ \frac{(z-c)^2}{2!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{s+1}\log^2(s+1)}{(s+1)^c} - \frac{(z-c)^3}{3!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{s+1}\log^3(s+1)}{(s+1)^c} +-\cdots$$

半2重テイラー級数

(2.1) は2重級数であるので収束が遅い。これを加速したいがこのままでは困難である。そこで収束加速法が適用できるように、(2.1) を半2重級数に変換する。

定理 3・2・2

通常ディリクレ級数を $f(z)=\sum_{r=1}^{\infty}a_r e^{-z\log r}$ とするとき、$f(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{a_{r-s+1}\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{2.2}$$

但し、$0^0=1$ とする。

証明

定理 3・2・1 (2.1) において r と s を交換すれば

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{a_{r+1}\log^s(r+1)}{(r+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{2.1'}$$

ここで、「**2 多重級数と指数関数**」(アラカルト編) 公式 2．1．0 によれば、 二重級数 $\sum_{r,s=0}^{\infty}a_{r,s}$ が絶対収束するとき、次式が成立した。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}a_{r,s} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}a_{r-s,s}$$

これを (2.1') に適用すれば、

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{a_{r-s+1}\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{2.2}$$

最初の数項を展開すると次のとおり。これは (2.1) を対角線に沿って並べ替えたものである。

$$\begin{aligned} f(z) = &\ \frac{a_1\log^0 1}{1^c}\frac{(z-c)^0}{0!} \\ &+ \frac{a_2\log^0 2}{2^c}\frac{(z-c)^0}{0!} - \frac{a_1\log^1 1}{1^c}\frac{(z-c)^1}{1!} \\ &+ \frac{a_3\log^0 3}{3^c}\frac{(z-c)^0}{0!} - \frac{a_2\log^1 2}{2^c}\frac{(z-c)^1}{1!} + \frac{a_1\log^2 2}{1^c}\frac{(z-c)^2}{2!} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

クノップ変換

半二重級数にはクノップ変換を施すことができる。定理 3．2．2 にクノップ変換を施せば次のようになる。なお、クノップ変換については「10 **二重関数項級数による収束加速と総和法** 」 (アラカルト編)を参照されたい。

定理 3・2・3

通常ディリクレ級数を $f(z)=\sum_{r=1}^{\infty}a_r e^{-z\log r}$ とするとき、$f(z)$ の零点以外の定数 c と任意の正数 q について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r}(-1)^s\frac{a_{r-s+1}\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{2.3}$$

但し、$0^0 = 1$ とする。

3･3　p - 級数のテイラー展開

リーマン･ゼータ関数 $\zeta(z)$ は $Re(z)>1$ においては、p - 級数と呼ばれる次式で示される。

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{-z\log s} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots \tag{3.0}$$

これに前節の 定理 3･2･1 を適用すれば、$a_s=1$　i.e.　$a_{s+1}=1$ であるから、次を得る。

公式 3･3･1

p- 級数を $\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{-z\log s}$ とするとき、$\zeta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\log^r(s+1)}{(s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r!} \tag{3.1}$$

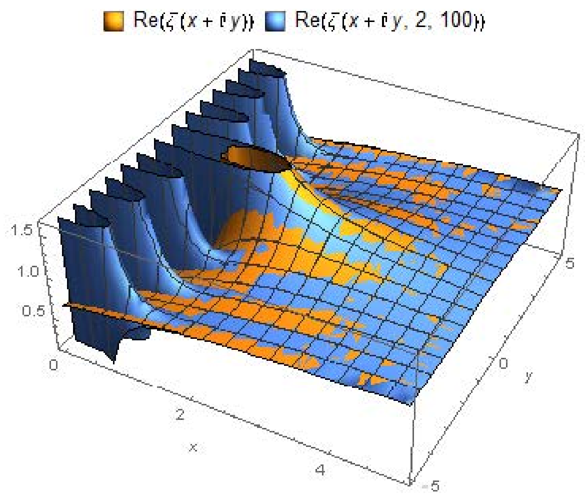
但し、$0^0=1$ とする。

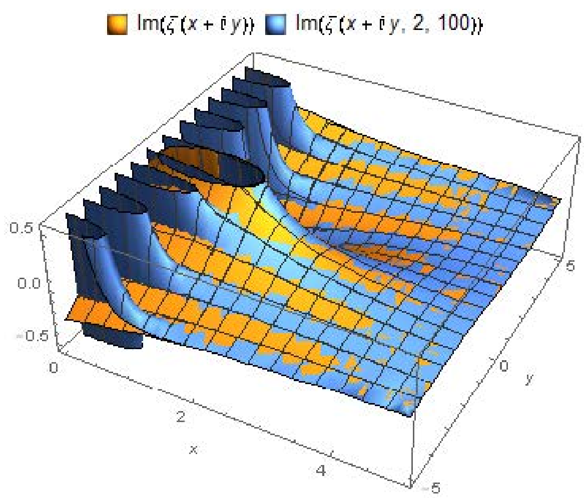
最初の4項を展開すると次のとおり、

$$\zeta(z) = \frac{(z-c)^0}{0!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\log^0(s+1)}{(s+1)^c} - \frac{(z-c)^1}{1!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\log^1(s+1)}{(s+1)^c}$$
$$+\frac{(z-c)^2}{2!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\log^2(s+1)}{(s+1)^c} - \frac{(z-c)^3}{3!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\log^3(s+1)}{(s+1)^c} + - \cdots$$

(1) $c>1$ のとき、これらの係数は収束するから、当然この公式は成立する。

例えば $c=2$ のとき、$z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





元々がディリクレ級数だから収束軸があるのは不思議ではない。しかし、これはテイラー級数でもある。$z=1$ に特異点があるのに、半径 $1(=2-1)$ の収束円がないのは奇妙である。しかし何処にも見当たらない。これでは、収束円の代わりに収束軸を持つテイラー級数と言わざるを得ない。

(2) $c \leq 1$ のとき、これらの係数は発散する。それにもかかわらずこの公式は成立する。

例えば、収束軸の反対側の $c=-1$ の周りで展開して、$z=2$ における両辺の値を計算すると次のようになる。右辺は $m=1200$ まで計算されているが、両辺は概ね正しい。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
ζ[z_, c_, m_] := Sum[Sum[(-1)^r (Log[s+1])^r/(s+1)^c (z-c)^r/r!, {s,0,m}], {r,0,m}]
N[{Zeta[2], ζ[2, -1, 1200]}]
{1.64493, 1.64419}
```

$$\zeta[z\_, c\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}(-1)^r\frac{(\mathrm{Log}[s+1])^r}{(s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r!}$$

この例のように、展開の中心 c は $\zeta(z)$ の零点以外なら何処でもよい。勿論、特異点 $z=1$ でもよい。そして、c の値に関わらず収束軸は $z=1$ である。

そもそも (3.1) は本当にテイラー級数なのかと疑われるかも知れない。これに対する答えとして、未出と思われる次の公式を提示・証明する。

公式 3・3・1'(ζ(z) の高階導関数)

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$、その n 階導関数を $\zeta^{(n)}(z)$ とするとき、$Re(z)>1$ なる z について次式が成立する。

$$\zeta^{(n)}(z) = (-1)^n\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^n s}{s^z} \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.1'}$$

但し、$0^0=1$ とする。

証明

リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ を c の周りでテイラー展開すると次のようになる。

$$\zeta(z) = \zeta^{(0)}(c)+\zeta^{(1)}(c)\frac{(z-c)^1}{1!}+\zeta^{(2)}(c)\frac{(z-c)^2}{2!}+\zeta^{(3)}(c)\frac{(z-c)^3}{3!}+\cdots$$

他方、上記公式は次のようであった。

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^0 s}{s^c}-\frac{(z-c)^1}{1!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^1 s}{s^c}+\frac{(z-c)^2}{2!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^2 s}{s^c}-\frac{(z-c)^3}{3!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^3 s}{s^c}+-\cdots$$

テイラー級数の一意性により、両者の係数はそれぞれ等しくなければならない。よって、

$$\zeta^{(0)}(c) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^0 s}{s^c}\ ,\quad \zeta^{(1)}(c) = -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^1 s}{s^c}\ ,\quad \zeta^{(2)}(c) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\log^2 s}{s^c}\ ,\quad \cdots$$

c を z に置き換えて与式を得る。

例 $\zeta^{(1)}(2)$, $\zeta^{(2)}(3)$, $\zeta^{(3)}(2.5+i)$

数式処理ソフト *Mathematica* でこれらを計算すると次のようになる。この公式が数値的に正しいことが分る。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
ζn_[z_, m_] := (-1)^n Sum[(Log[s])^n / s^z, {s, 1, m}]
N[{Zeta'[2], ζ1[2, 500000]}]
{-0.937548, -0.93752}
N[{Zeta''[3], ζ2[3, 20000]}]
{0.239747, 0.239747}
N[{Zeta'''[2.5 + ⅈ], ζ3[2.5 + ⅈ, 700000]}]
{0.400858 + 0.404405 ⅈ, 0.400858 + 0.404403 ⅈ}
```

$\zeta(z)$ に 定理 3･2･2 を適用すれば、$a_r=1$ i.e. $a_{r-s+1}=1$ であるから、次を得る。

公式 3･3･2 (半2重テイラー級数)

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)=\sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r}$ とするとき、$\zeta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{3.2}$$

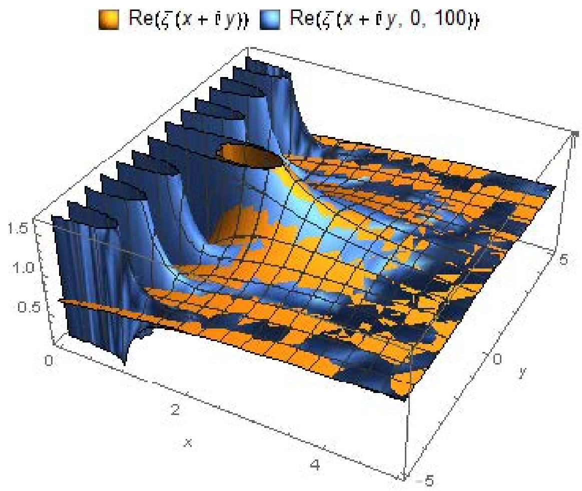
但し、$0^0=1$ とする。

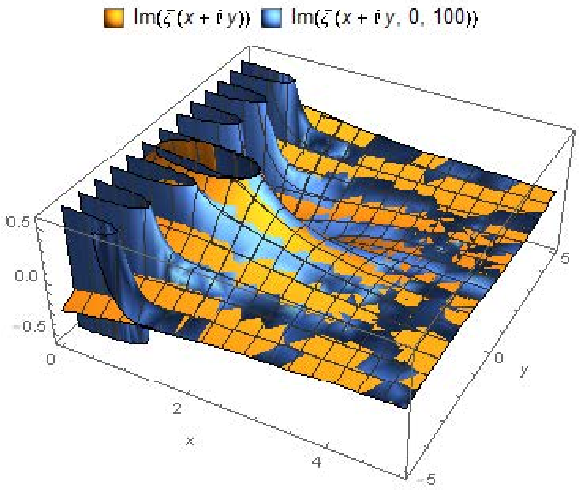
最初の数項を展開すると次のとおり。流石にこれはテイラー級数とは呼び難いものである。

$$\begin{aligned}
\zeta(z) =& \frac{\log^0 1}{1^c}\frac{(z-c)^0}{0!} \\
&+\frac{\log^0 2}{2^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 1}{1^c}\frac{(z-c)^1}{1!} \\
&+\frac{\log^0 3}{3^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 2}{2^c}\frac{(z-c)^1}{1!}+\frac{\log^2 1}{1^c}\frac{(z-c)^2}{2!} \\
&+\frac{\log^0 4}{4^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 3}{3^c}\frac{(z-c)^1}{1!}+\frac{\log^2 2}{2^c}\frac{(z-c)^2}{2!}-\frac{\log^3 1}{1^c}\frac{(z-c)^3}{3!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

後の節との比較のため、$c=0$ のときの3D図を描いておく。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。展開の中心が左端にあるため右方向の近似精度が下がっているが、基本的には 公式 3･3･1 の図と同じである。

収束円の代わりに固定された収束軸があることおよび c は $\zeta(z)$ の零点以外なら何処でもよいことは 公式 3･3･1 と同じである。


Re(ζ(x + i y)) Re(ζ(x + i y, 0, 100))
1.5
1.0
0.5
0
2
x
4
-5
0
y
5


Im(ζ(x + i y)) Im(ζ(x + i y, 0, 100))
0.5
0.0
-0.5
0
2
x
4
-5
0
y
5

3・4　η 級数のテイラー展開

ディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ は $Re(z)>0$ においては、ディリクレ・イータ級数と呼ばれる次式で示される。

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-z\log s} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} +- \cdots \tag{4.0}$$

これに 定理 3・2・1 を適用すれば、$a_s=(-1)^{s-1}$ i.e. $a_{s+1}=(-1)^s$ であるから、次を得る。

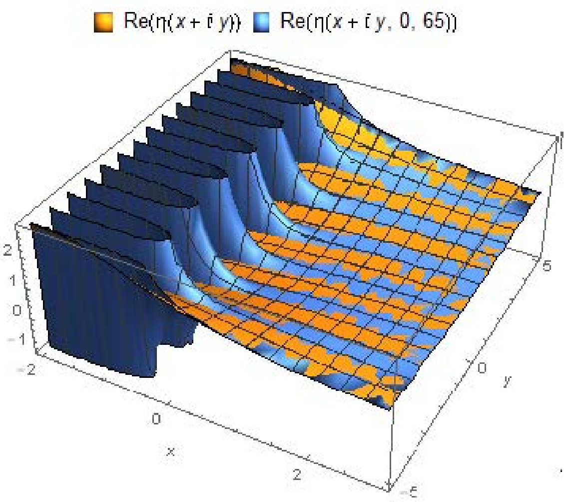
公式 3・4・1

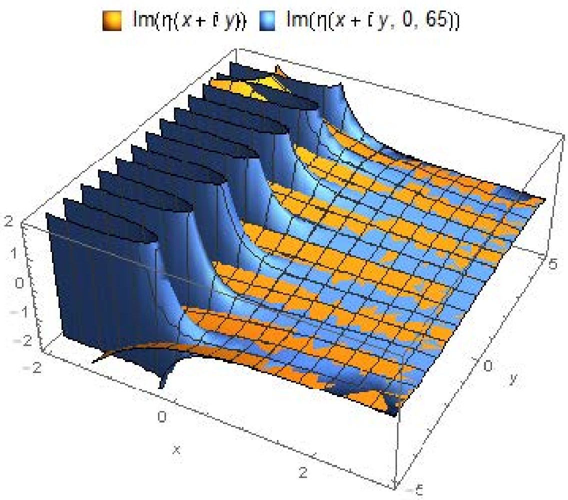
ディリクレ・イータ級数を $\eta(z)=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-z\log s}$ とするとき、$\eta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\eta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log^r(s+1)}{(s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r\,!} \tag{4.1}$$

但し、$0^0=1$ とする。

$c=0$, $z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





収束円の代わりに固定された収束軸を持つことおよび c は $\eta(z)$ の零点以外なら何処でもよいことは $\zeta(z)$ の 公式 3・3・1 と同じである。但し、収束軸は $x=0$ である。なお、当たり前のことであるが、本公式は収束軸の右側の半平面を表示するものである。

公式 3・4・1'（η(z) の高階導関数 ）

スチルチェス定数を γ_s $(s=0,1,2\cdots)$ 、ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ 、その n 階導関数を $\eta^{(n)}(z)$ とするとき、$Re(z)>0$ なる z について次式が成立する。

$$\eta^{(n)}(z) = (-1)^n\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\log^n s}{s^z} \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{4.1'}$$

但し、$0^0=1$ とする。

特に$z=1$のときは

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\log^n s}{s} = \frac{\log^{n+1}2}{n+1} - \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n}{s}\gamma_s(\log 2)^{n-s} \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{4.1″}$$

証明

ディリクレ・イータ関数$\eta(z)$を複素数cの周りでテイラー展開すると次のようになる。

$$\eta(z) = \eta^{(0)}(c) + \eta^{(1)}(c)\frac{(z-c)^1}{1!} + \eta^{(2)}(c)\frac{(z-c)^2}{2!} + \eta^{(3)}(c)\frac{(z-c)^3}{3!} +-\cdots$$

他方、上記公式は次のようであった。

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}\log^0 s}{s^c} - \frac{(z-c)^1}{1!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}\log^1 s}{s^c} + \frac{(z-c)^2}{2!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}\log^2 s}{s^c} -+\cdots$$

テイラー級数の一意性により、両者の係数はそれぞれ等しくなければならない。よって、

$$\eta^{(0)}(c) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}\log^0 s}{s^c}, \; \eta^{(1)}(c) = -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}\log^1 s}{s^c}, \; \eta^{(2)}(c) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}\log^2 s}{s^c} \cdots$$

c を z に置き換えて与式を得る。

特に$c=1$のときは (4.1) より

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s^1} + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\log^r s}{s^1}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

他方、公式 3・1・2 より

$$\eta(z) = \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

これらより

$$(-1)^r\left\{\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\log^r s}{s}\right\} = (-1)^r\left\{\frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\} = \eta^{(r)}(1)$$

r を n に置き換えて与式を得る。

例1　$\eta^{(1)}(1.3)$, $\eta^{(2)}(2.1)$, $\eta^{(3)}(1.7+3i)$

数式処理ソフト*Mathematica* でこれらを計算すると次のようになる。この公式が数値的に正しいことが分る。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
```

$$\eta_{n\_}[z\_, m\_] := (-1)^n\sum_{s=1}^{m}(-1)^{s-1}\frac{(\text{Log}[s])^n}{s^z}$$

```
N[{DirichletEta'[1.3], η1[1.3, 250000]}]
        {0.140754 , 0.140754}
N[{DirichletEta''[2.1], η2[2.1, 40000]}]
        {-0.0485915 , -0.0485915}
```

```
N[{DirichletEta'''[1.7 + 3 ⅈ], η3[1.7 + 3 ⅈ, 800 000]}]
    {0.0459512 - 0.0445404 ⅈ , 0.045951 - 0.0445404 ⅈ}
```

例2

$$\frac{\log^1 1}{1}-\frac{\log^1 2}{2}+\frac{\log^1 3}{3}-\frac{\log^1 4}{4}+-\cdots=\frac{\log^2 2}{2}-\gamma_0\log^1 2$$

$$\frac{\log^2 1}{1}-\frac{\log^2 2}{2}+\frac{\log^2 3}{3}-\frac{\log^2 4}{4}+-\cdots=\frac{\log^3 2}{3}-\gamma_0\log^2 2-2\gamma_1\log^1 2$$

数式処理ソフト *Mathematica* でこれらの両辺を計算すると次のようになる。左辺の収束速度は著しく遅いが、いづれの例でも両辺はほぼ等しい。

```
f_n_[m_] := Sum[(-1)^(s-1) (Log[s])^n / s, {s, 1, m}]      γ_s_ := StieltjesGamma[s]

g_n_ := Log[2]^(n+1)/(n + 1) - Sum[Binomial[n, s] γ_s (Log[2])^(n-s), {s, 0, n-1}]

N[{f1[4 000 000], g1}]                     N[{f2[8 000 000], g2}]
    {-0.159871 , -0.159869}                    {-0.0653884 , -0.0653726}
```

$\eta(z)$ に 定理 3･2･2 を適用すれば、$a_r=(-1)^{r-1}$ i.e. $a_{r-s+1}=(-1)^{r-s}$ であるから、次を得る。

公式 3･4･2 (半2重テイラー級数)

ディリクレ･イータ級数を $\eta(z)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log r}$ とするとき、$\eta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\eta(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\frac{\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{4.2}$$

但し、$0^0=1$ とする。

最初の数項を展開すると次のとおり。流石にこれはテイラー級数とは呼び難いものである。

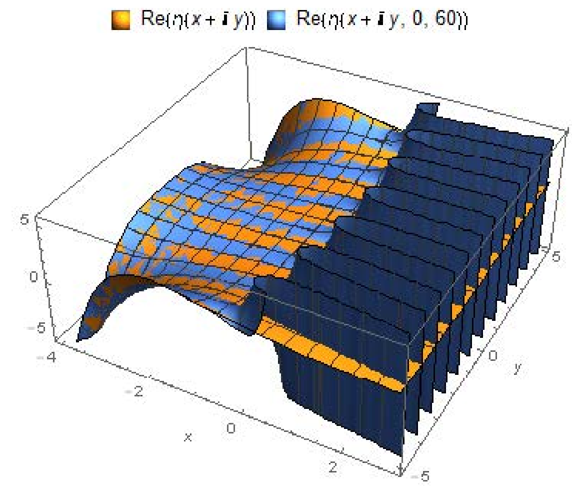
$$\begin{aligned}\eta(z)=&\frac{\log^0 1}{1^c}\frac{(z-c)^0}{0!}\\&-\frac{\log^0 2}{2^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 1}{1^c}\frac{(z-c)^1}{1!}\\&+\frac{\log^0 3}{3^c}\frac{(z-c)^0}{0!}+\frac{\log^1 2}{2^c}\frac{(z-c)^1}{1!}+\frac{\log^2 1}{1^c}\frac{(z-c)^2}{2!}\end{aligned}$$

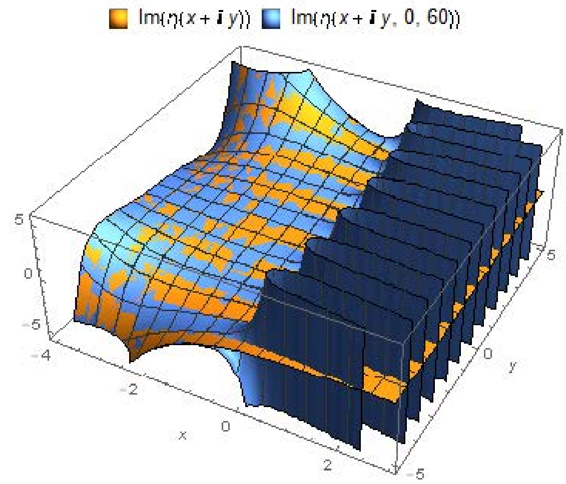
$$-\frac{\log^{0}4}{4^{c}}\frac{(z-c)^{0}}{0!}-\frac{\log^{1}3}{3^{c}}\frac{(z-c)^{1}}{1!}-\frac{\log^{2}2}{2^{c}}\frac{(z-c)^{2}}{2!}-\frac{\log^{3}1}{1^{c}}\frac{(z-c)^{3}}{3!}$$

$$\vdots$$

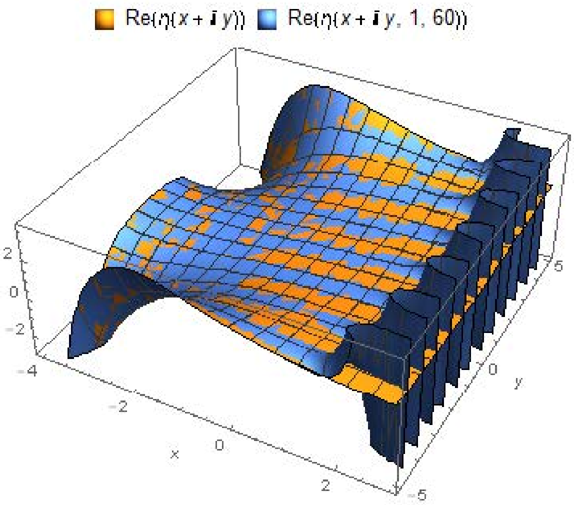
$c=0$, $z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。

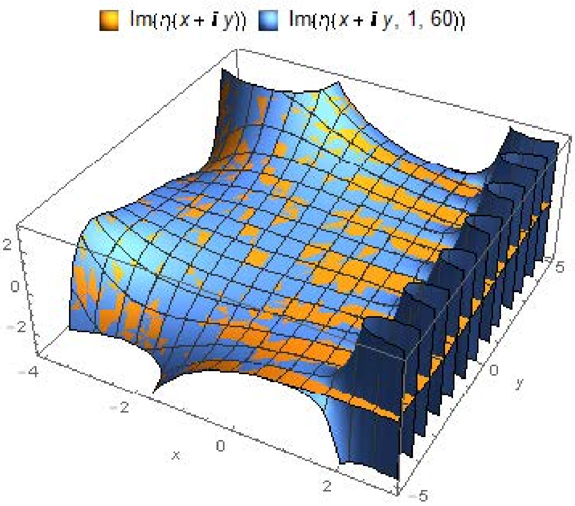
驚くべきは、公式 3･4･1 の図の反対側が描かれていることである。つまり、本公式は収束軸の左側の半平面を表示する ものである。





更に驚いたことに、$c=1$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示すると次のようになる。





何と、収束軸が $x=0$ から $x=2$ に移動したのである。色々作図した結果、本公式の収束軸は可動であり、その位置は $x=2c$ である ことが分った。

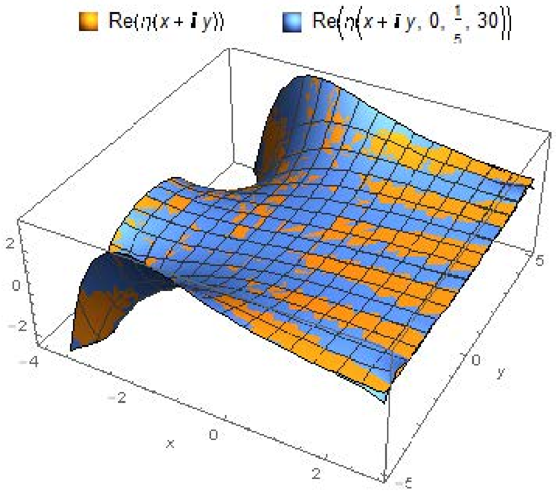
$\eta(z)$ に 定理 3･2･3 を適用すれば、$a_r=(-1)^{r-1}$ i.e. $a_{r-s+1}=(-1)^{r-s}$ であるから、次を得る。

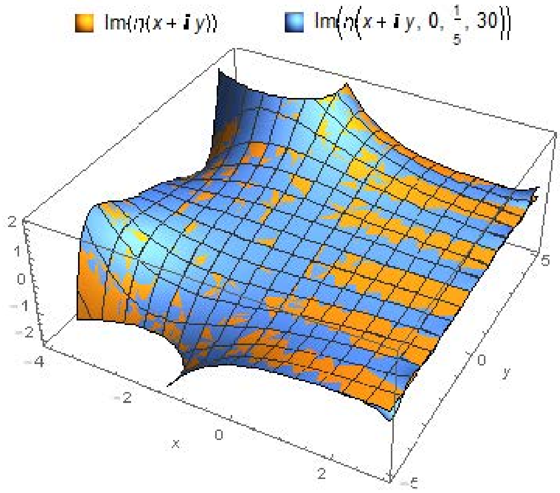
公式 3･4･3（クノップ変換）

ディリクレ･イータ級数を $\eta(z)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log r}$ とするとき、$\eta(z)$ の零点以外の定数 c と任意の正数 q について次式が成立する。

$$\eta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r}(-1)^{r}\frac{\log^{s}(r-s+1)}{(r-s+1)^{c}}\frac{(z-c)^{s}}{s!} \tag{4.3}$$

本公式は 公式 3･4･2 の数値計算用であるが、確認のため、$c=0$, $z=x+iy$ としてこれを図示する。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。(4.2) が正方向に解析接続されて収束軸は消滅している。





3·5 λ 級数のテイラー展開

ディリクレ・ラムダ関数 $\lambda(z)$ は $Re(z)>1$ においては、ディリクレ・ラムダ級数と呼ばれる次式で示される。

$$\lambda(z) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{-z\log(2s-1)} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \cdots \tag{5.0}$$

これに 定理 3·2·1 を適用すれば、$a_s=1$ i.e. $a_{s+1}=1$ であるから、次を得る。

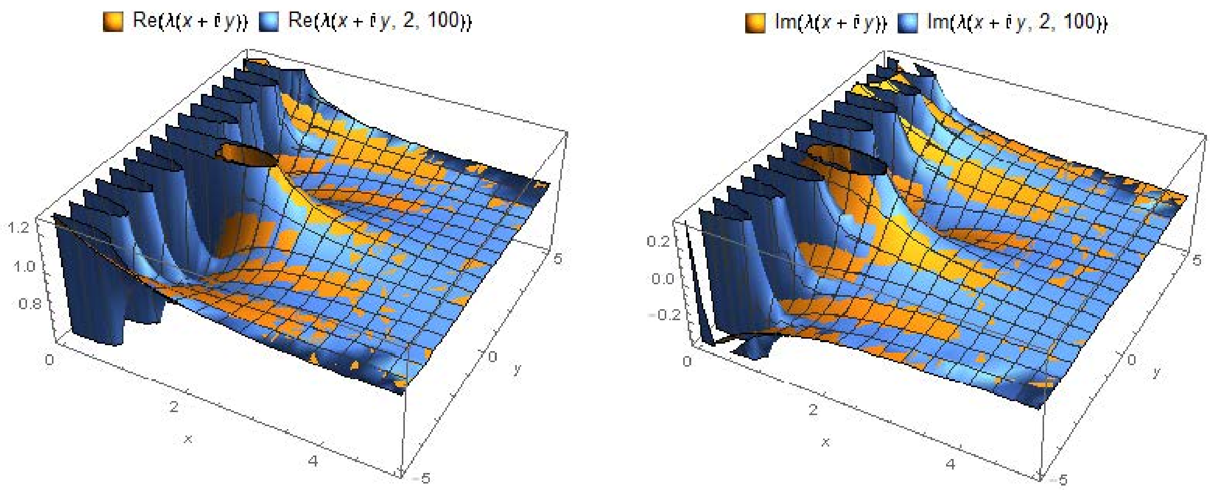
公式 3·5·1

ディリクレ・ラムダ関数を $\lambda(z)=\sum_{s=1}^{\infty} e^{-z(2s-1)}$ とするとき、$\lambda(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\lambda(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\log^r(2s+1)}{(2s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r!} \tag{5.1}$$

但し、$0^0=1$ とする。

$c=2$, $z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。



収束円の代わりに固定された収束軸を持つことおよび c は $\lambda(z)$ の零点以外なら何処でもよいことは $\zeta(z)$ の 公式 3·3·1 と同じである。収束軸も同じで $x=1$ である。

公式 3·5·1'（λ(z) の高階導関数）

ディリクレ・ラムダ関数を $\lambda(z)$ 、その n 階導関数を $\lambda^{(n)}(z)$ とするとき、$Re(z)>1$ なる z について次式が成立する。

$$\lambda^{(n)}(z) = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\log^n(2s+1)}{(2s+1)^z} \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{5.1'}$$

但し、$0^0=1$ とする。

証明

公式 3･3･1'の証明 と類似の方法による。

例 $\lambda^{(2)}(2.9)$

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
λn_[z_, m_] := (-1)^n Sum[(Log[2 s + 1])^n/(2 s + 1)^z, {s, 0, m}]
N[{DirichletLambda''[2.9], λ2[2.9, 5500]}]
```

{0.123213 , 0.123213}

$\lambda(z)$ に 定理 3･2･2 を適用すれば、$a_r=1$ i.e. $a_{r-s+1}=1$ であるから、次を得る。

公式 3･5･2 (半2重テイラー級数)

ディリクレ･ラムダ級数を $\lambda(z)=\sum_{r=1}^{\infty} e^{-z(2r-1)}$ とするとき、$\lambda(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\lambda(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{\log^s(2r-2s+1)}{(2r-2s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{5.2}$$

但し、$0^0=1$ とする。

本公式は基本的に 公式 3･5･1 と同じである。本公式が表示する半平面も 公式 3･5･1のそれと同じである。

3･6 β級数のテイラー展開

ディリクレ･ベータ関数 $\beta(z)$ は $Re(z)>0$ においては、ディリクレ･ベータ級数と呼ばれる次式で示される。

$$\beta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-z\,log(2s-1)} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} +- \cdots \tag{6.0}$$

これに 定理 3･2･1 を適用すれば、$a_s=(-1)^{s-1}$ i.e. $a_{s+1}=(-1)^s$ であるから、次を得る。

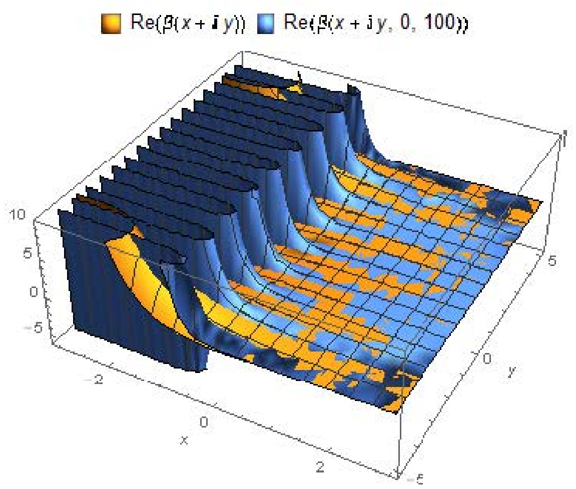
公式 3･6･1

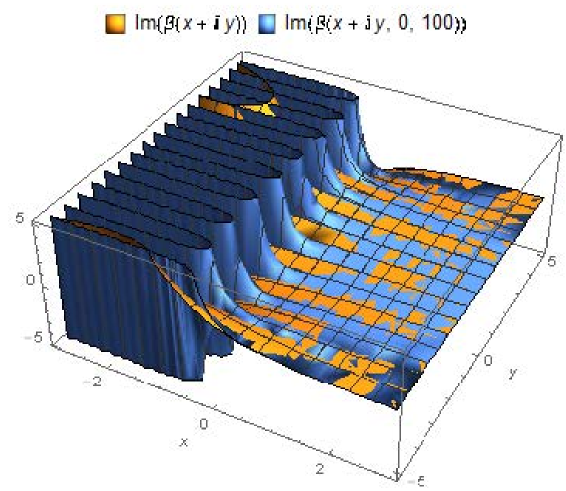
ディリクレ･ベータ級数を $\beta(z)=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-z\,log(2s-1)}$ とするとき、$\beta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\beta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{log^r(2s+1)}{(2s+1)^c}\frac{(z-c)^r}{r\,!} \tag{6.1}$$

但し、$0^0=1$ とする。

$c=0$, $z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。





収束円の代わりに固定された収束軸を持つことおよび c は $\beta(z)$ の零点以外なら何処でもよいことは $\eta(z)$ の 公式 3･4･1 と同じである。収束軸も同じで $x=0$ である。

公式 3･6･1'（β(z) の高階導関数）

一般スチルチェス定数を $\gamma_s(a)$ $(s=0,1,2\cdots)$、ディリクレ･ベータ関数を $\beta(z)$、その n 階導関数を $\beta^{(n)}(z)$ とするとき、$Re(z)>0$ なる z について次式が成立する。

$$\beta^{(n)}(z) = (-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{log^n(2s+1)}{(2s+1)^z} \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{6.1'}$$

但し、$0^0=1$ とする。

特に $z=1$ のときは

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{\log^n(2s+1)}{2s+1}=\frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(\log 4)^{n-s}\left\{\gamma_s\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_s\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$
$$n=0,1,2,\cdots \tag{6.1″}$$

証明

ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ を複素数 c の周りでテイラー展開すると次のようになる。

$$\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{(n)}(c)\frac{(z-c)^n}{n!}$$

これと (6.1) を比較し、c を z に置き換えて (6.1’) を得る。

特に $z=1$ のときは (6.1) より

$$\beta(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log^r(2s+1)}{(2s+1)^c}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

他方、公式 3･1･4 より

$$\beta(z)=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\binom{r}{s}(\log 4)^{r-s}\cdot\left\{\gamma_s\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_s\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{(z-1)^r}{r!}$$

これらより (6.1″) を得る。

例1 $\beta^{(1)}(1.2)$, $\beta^{(2)}(2.3)$, $\beta^{(3)}(1.8+3i)$

数式処理ソフト *Mathematica* でこれらを計算すると次のようになる。この公式が数値的に正しいことが分る。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;

βn_[z_, m_] := (-1)^n Sum[(-1)^s (Log[2 s + 1])^n / (2 s + 1)^z, {s, 0, m}]

N[{DirichletBeta'[1.2], β1[1.2, 250000]}]
    {0.163947 , 0.163947}

N[{DirichletBeta''[2.3], β2[2.3, 40000]}]
    {-0.0578809 , -0.0578809}

N[{DirichletBeta'''[1.8 + 3 i], β3[1.8 + 3 i, 800000]}]
    {-0.121476 - 0.104585 i , -0.121476 - 0.104585 i}
```

例2

$$\frac{\log^1 1}{1}-\frac{\log^1 3}{3}+\frac{\log^1 5}{5}-\frac{\log^1 7}{7}+-\cdots=\frac{1}{4}\left[\log 4\left\{\gamma_0\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_0\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\right.$$
$$\left.+\gamma_1\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_1\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\frac{\log^2 1}{1}-\frac{\log^2 3}{3}+\frac{\log^2 5}{5}-\frac{\log^2 7}{7}+-\cdots=\frac{1}{4}\left[\log^2 4\left\{\gamma_0\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_0\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\right.$$
$$+2\log 4\left\{\gamma_1\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_1\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$
$$\left.+\gamma_2\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_2\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

数式処理ソフト *Mathematica* でこれらの両辺を計算すると次のようになる。左辺の収束速度は著しく遅いが、いづれも両辺はほぼ一致している。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;    γs_[a_] := StieltjesGamma[s, a]
```

$$f_{n\_}[m\_] := \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{(\mathrm{Log}[2s+1])^n}{2s+1}$$

$$g_{n\_} := \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{n} \mathrm{Binomial}[n, s]\,(\mathrm{Log}[4])^{n-s}\left(\gamma_s\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_s\left[\frac{3}{4}\right]\right)$$

```
N[{f1[2 000 000], g1}]                N[{f2[4 000 000], g2}]
   {-0.192903, -0.192901}                {-0.154158, -0.154142}
```

$\beta(z)$ に 定理 3･2･2 を適用すれば、$a_r=(-1)^{r-1}$ 、従って $a_{r-s+1}=(-1)^{r-s}$ であるから、次を得る。

公式 3･6･2 (半2重テイラー級数)

ディリクレ･ベータ級数を $\beta(z)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log(2r-1)}$ とするとき、$\beta(z)$ の零点以外の定数 c について次式が成立する。

$$\beta(z) == \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^r\frac{\log^s(2r-2s+1)}{(2r-2s+1)^c}\frac{(z-c)^s}{s!} \tag{6.2}$$

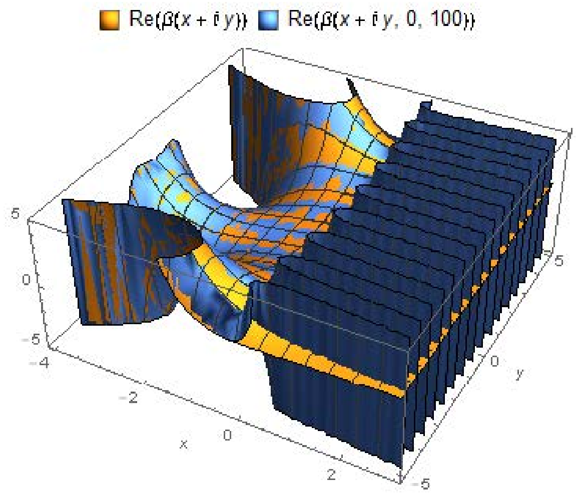
但し、$0^0=1$ とする。

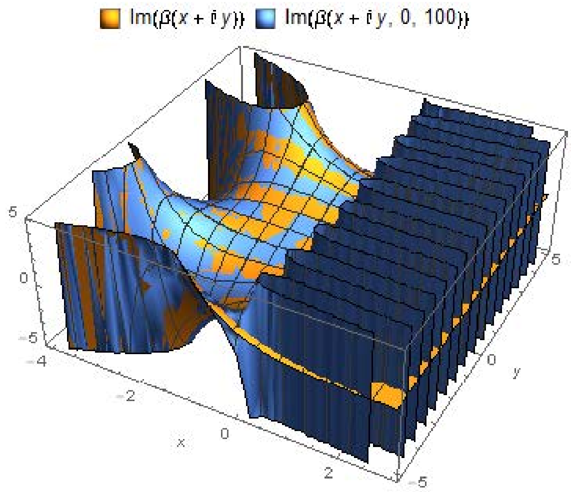
最初の数項を展開すると次のとおり。流石にこれはテイラー級数とは呼び難いものである。

$$\beta(z) = \frac{\log^0 1}{1^c}\frac{(z-c)^0}{0!}$$
$$-\frac{\log^0 3}{3^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 1}{1^c}\frac{(z-c)^1}{1!}$$
$$+\frac{\log^0 5}{5^c}\frac{(z-c)^0}{0!}+\frac{\log^1 3}{3^c}\frac{(z-c)^1}{1!}+\frac{\log^2 1}{1^c}\frac{(z-c)^2}{2!}$$
$$-\frac{\log^0 7}{7^c}\frac{(z-c)^0}{0!}-\frac{\log^1 5}{5^c}\frac{(z-c)^1}{1!}-\frac{\log^2 3}{3^c}\frac{(z-c)^2}{2!}-\frac{\log^3 1}{1^c}\frac{(z-c)^3}{3!}$$

⋮

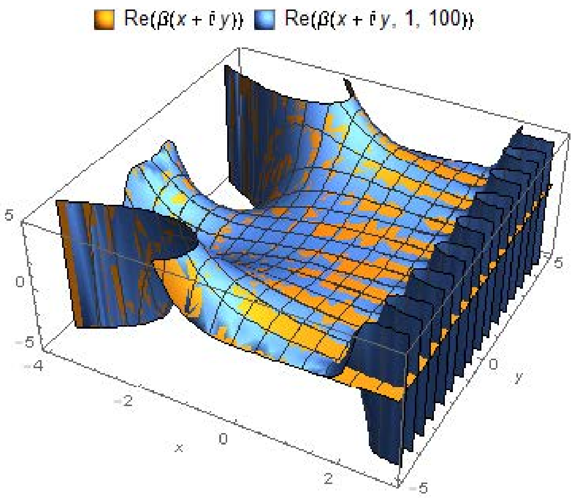
$c=0$, $z=x+iy$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。

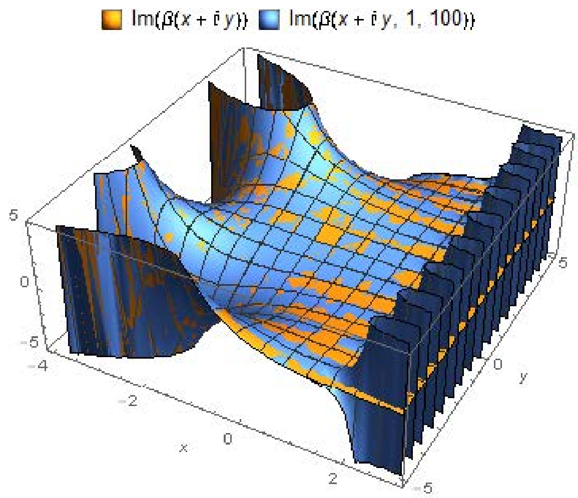




$\eta(z)$ の公式 3·4·2 と同様、この公式も収束軸の左側の半平面を表示している。

収束軸が可動であり、その位置が $\boldsymbol{x=2c}$ である ことも 公式 3·4·2 と同様である。$c=1$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示すると次のようになる。収束軸が $x=0$ から $x=2$ に移動しているのが分かる。





$\beta(z)$ に 定理 3·2·3 を適用すれば、$a_r=(-1)^{r-1}$ 、従って $a_{r-s+1}=(-1)^{r-s}$ であるから、次を得る。

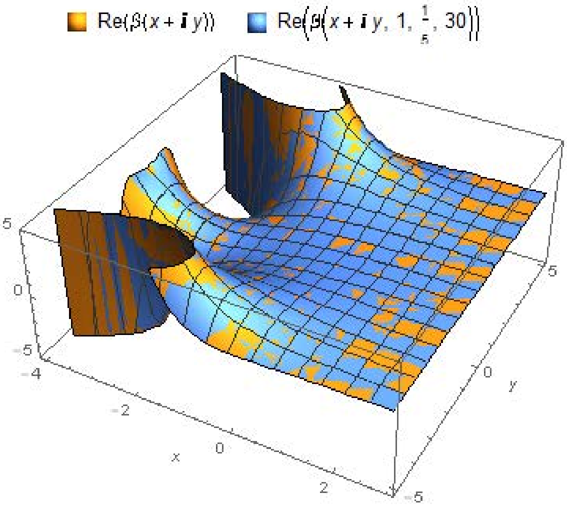
公式 3·6·3 (クノップ変換)

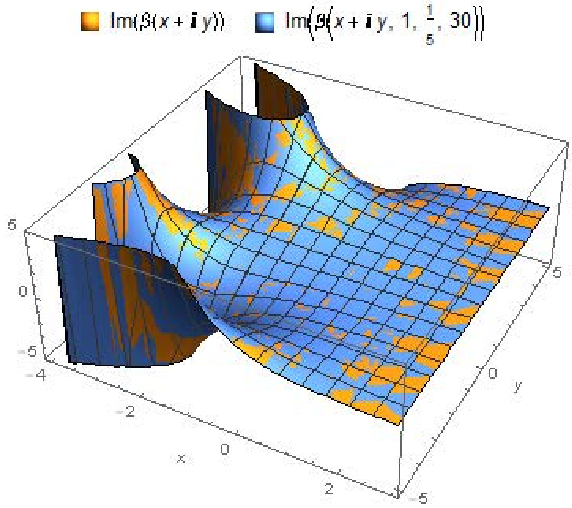
ディリクレ・ベータ級数を $\beta(z)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log(2r-1)}$ とするとき、$\beta(z)$ の零点以外の定数 c と 任意の正数 q について次式が成立する。

$$\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{r} \frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r} (-1)^r \frac{\log^s(2r-2s+1)}{(2r-2s+1)^c} \frac{(z-c)^s}{s\,!} \tag{6.3}$$

但し、$0^0 = 1$ とする。

本公式は 公式 3･6･2 の数値計算用であるが、確認のため、$c=1$, $z = x+iy$ としてこれを図示する。(6.2) が正方向に解析接続されて収束軸は消滅している。





3･7 相補級数

最初に、用語の定義を行う。

定義 3･7･0

関数 $f(z)$ が領域 D とその補集合 $\overline{D}$ 上で2つの関数項級数でそれぞれ次のように表されるとき、

$$f(z) = \begin{cases} \sum_r a_r(z) & z \in D \\ \sum_r b_r(z) & z \in \overline{D} \end{cases}$$

級数 $\sum_r b_r(z)$ を 級数 $\sum_r a_r(z)$ の 相補級数 と呼ぶ。

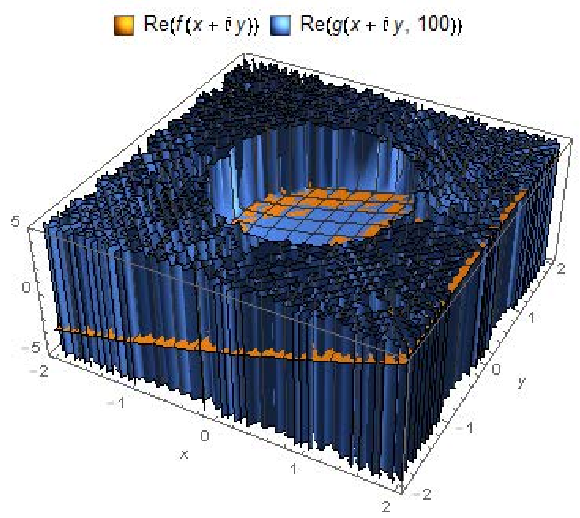
このに定義に従えば、公式 3･4･2 や 公式 3･6･2 は通常ディリクレ級数における相補級数であることが分る。本節では、冪級数や一般ディリクレ級数における相補級数を例示する。

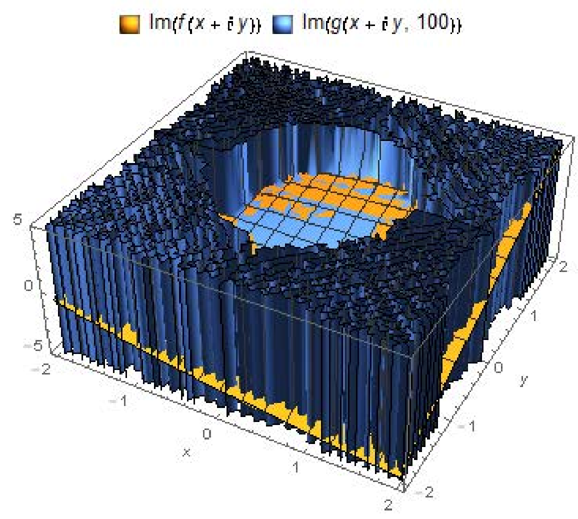
例1　二項級数の相補級数

二項関数は次のように二項級数と呼ばれる冪級数に展開される。

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} z^r \qquad |z| \le 1 \qquad (\,|z| = 1 \text{ is allowed at } \alpha > 0\,) \tag{7.1}$$

$\alpha = \sqrt{2}$, $z = x+iy$ としてこの両辺を図示するとそれぞれ次のようである。左図は実数部であり、右図は虚数部である。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。収束半径は1であるから、教科書どおりの図が描かれている。

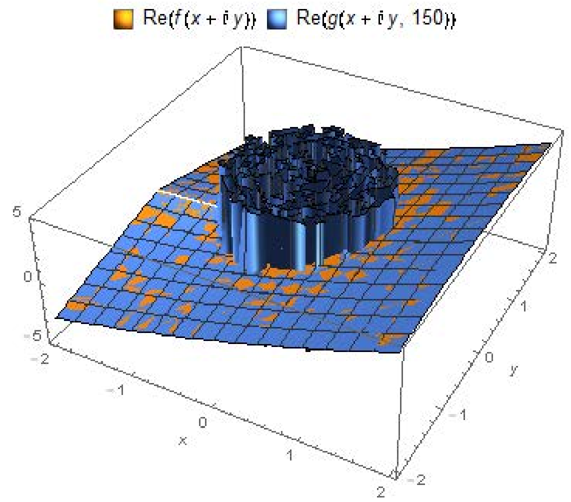


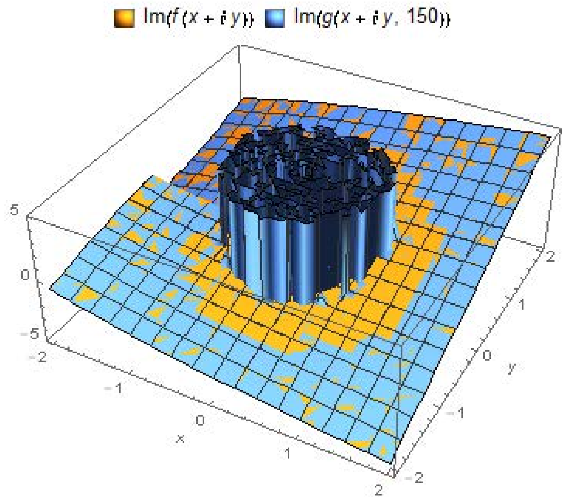


他方、超微積分篇「 3 一般二項定理と一般多項定理 」定理 3･2･1 によれば、この関数は次のようにも級数展開される。

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\alpha-r} z^{\alpha-r} \qquad |z| > 1 \tag{7.1'}$$

$\alpha = \sqrt{2}$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示すると、次のようになる。





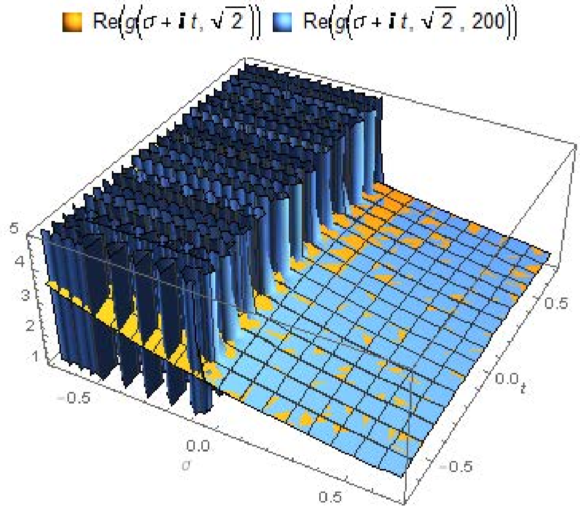
今度は収束円 $|z|=1$ の外側が描かれている。よって (7.1') は (7.1) の相補級数であることが分る。

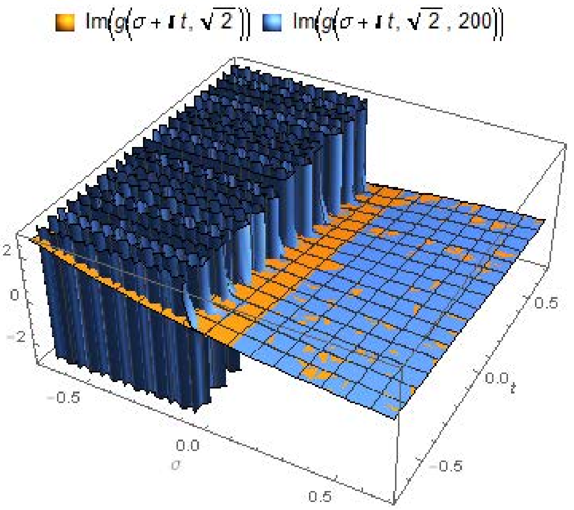
例2　二項ディリクレ級数の相補級数

「 01 一般ディリクレ級数とベキ級数 」によれば、冪級数は変数変換 $z=e^{-s}$ により簡単に一般ディリクレ級数に変換できる。先ず、(7.1) にこれを行えば、

$$\left(1+e^{-s}\right)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}e^{-rs} \qquad \left|e^{-s}\right| \le 1 \qquad (\ |e^{-s}| = 1 \text{ is allowed at } \alpha>0\ ) \tag{7.2}$$

$\alpha=\sqrt{2}$, $s=\sigma+it$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。収束域は $1 \ge \left|e^{-s}\right| = e^{-\sigma}$ より $\sigma \ge 0$ であるが、両図においてもそのように描かれている。



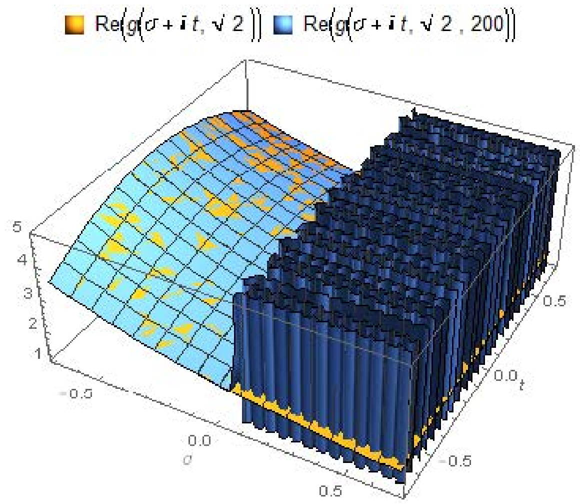


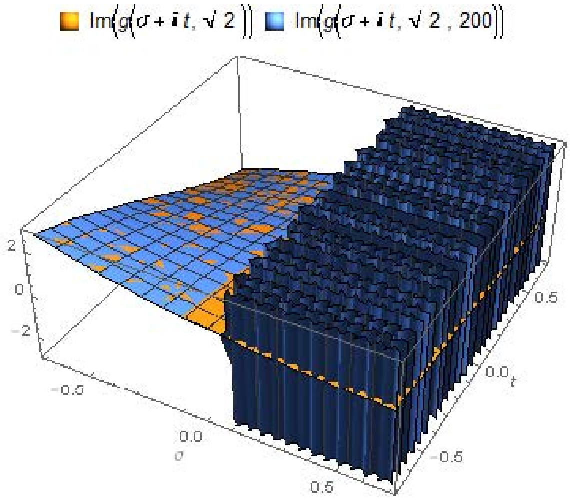
次に、(7.1') に変数変換 $z=e^{-s}$ を行えば、

$$\left(1+e^{-s}\right)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}e^{-(\alpha-r)s} \qquad \left|e^{-s}\right| > 1 \tag{7.2'}$$

$\alpha=\sqrt{2}$, $s=\sigma+it$ としてこの両辺の実数部と虚数部を図示するとそれぞれ次のようである。

両図とも、左辺が橙色で右辺が青である。収束域は $1<\left|e^{-s}\right|=e^{-\sigma}$ より $\sigma<0$ であるが、両図においてもそのように描かれている。よって (7.2') は (7.2) の相補級数であることが分る。





例1や例2を見れば、公式 3·4·2 や 公式 3·6·2 は驚くには当たらないかも知れない。しかしながら、これらの例は極めて稀である。任意の級数の相補級数は容易には得られないのが普通である。実際、筆者はこれ以外の例としては等比級数ぐらいしか思い浮かばない。

然るに、通常交代ディリクレ級数においては、その級数の各項をテイラー展開して対角線に沿って並べ替えるだけで簡単に相補級数が得られる ように見える。これは大いなる驚きである。しかもその収束軸は自由に動かし得る。項別微積分も簡単で、テイラー級数とほとんど同じように扱うことができる。諸々のツールとして有望と思われる。

2017.12.23
2019.10.07 全公式を書き替え

Kano Kono

宇宙人の数学