

## 4 ディリクレ・イータ関数の絶対値

### 4.1 ディリクレ・イータ関数

#### 4.1.1 定義

ディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  は半平面  $Re\{\eta(z)\} > 0$  では次のように定義される

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^z} \quad (1.0)$$

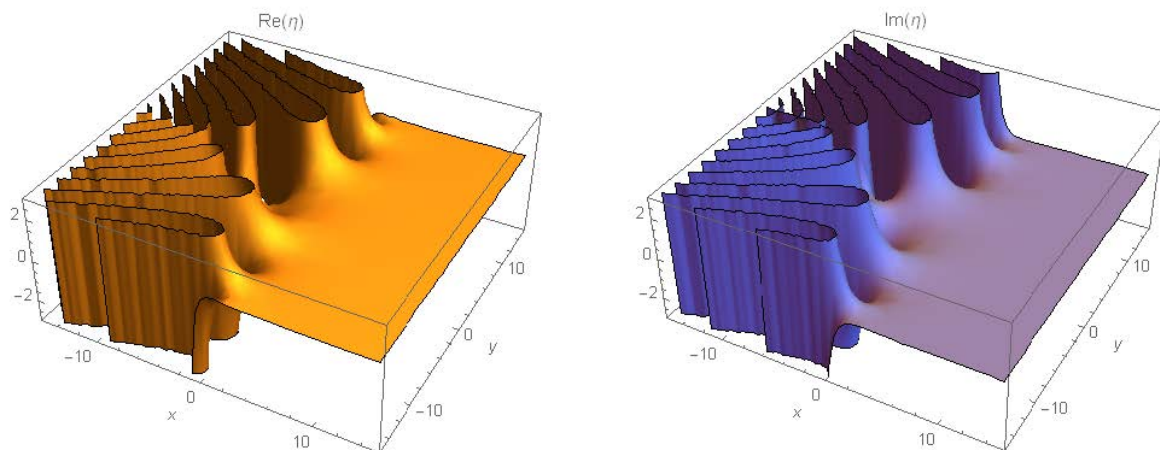
この級数は何らかの加速法を施すことにより簡単に全複素平面に解析接続できる。最も簡単なものは次式で示されるオイラー変換である。

$$\eta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \frac{(-1)^{r-1}}{r^z} \quad (1.1)$$

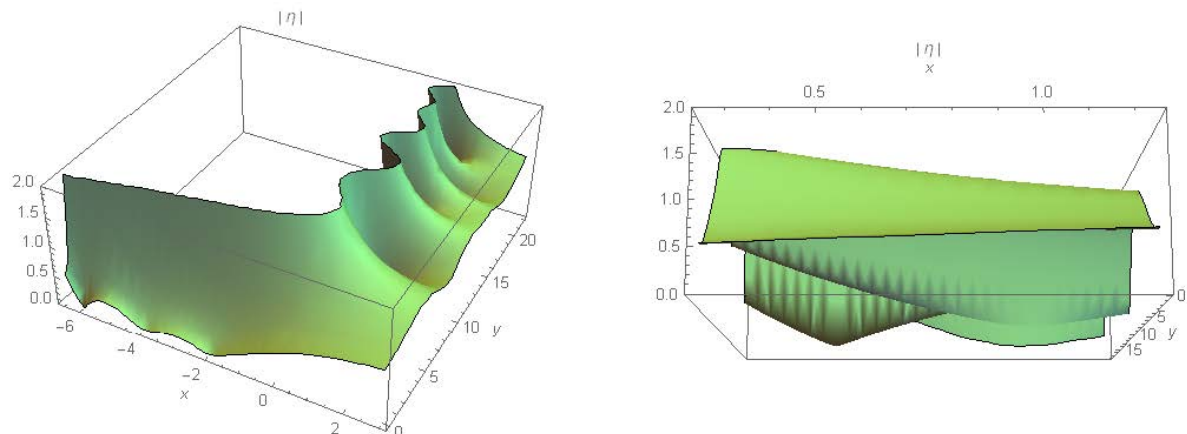
(1.0) と (1.1) は  $Re\{\eta(z)\} > 0$  では同じものである。(1.0) は収束軸  $Re\{\eta(z)\} = 0$  より左を記述出来ないが、(1.1) はこの左側も記述できる。それ故 (1.1) でディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  を定義することができる。

#### 4.1.2 概要

ディリクレ・イータ関数  $\eta(x+iy)$  の実部と虚部の3D図は次のようである。



また、絶対値の3D図は次のとおりである。左図では先ず  $\eta(z)$  の自明な零点が  $x$  軸上に沿って観察される。右図は左図を下から覗いた図である。 $\eta(z)$  の零点が  $x=1/2, x=1$  に沿って並んでいるのが見える。



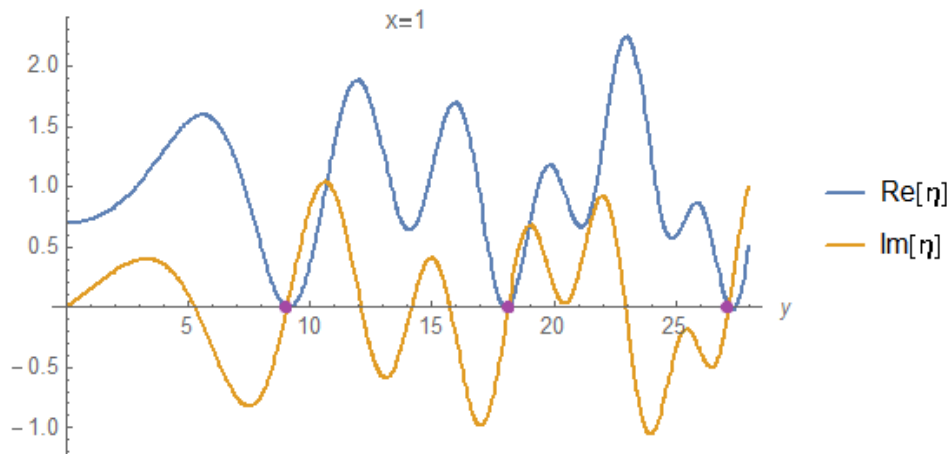
これらの図に見られるように、ディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  は次の3種類の零点を持つ。

- (1) 自明な零点  $-2, -4, -6, -8, \dots$
- (2) 非自明な零点  $1/2 \pm i 14.1347\dots, 1/2 \pm i 21.0220\dots, 1/2 \pm i 25.0108\dots, \dots$
- (3)  $\eta$  の零点  $1 \pm 2\pi i / \log 2, 1 \pm 4\pi i / \log 2, 1 \pm 6\pi i / \log 2, \dots$

これらの内、(1), (2) はリーマン・ゼータ関数の零点と共通である。また、非自明な零点 (2) が **臨界領域** と呼ばれる  $0 < x < 1$  内に存在していることも良く知られている。しかもそれらは  $x=1/2$  を軸として左右対称に存在すべきことが証明されている。そして、幸いなことに、この臨界領域は級数 (1.0) の収束域内に含まれている。

#### 4・1・3 $\eta$ 固有の零点

$x=1$  におけるディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  の実部と虚部の図は次のようである。

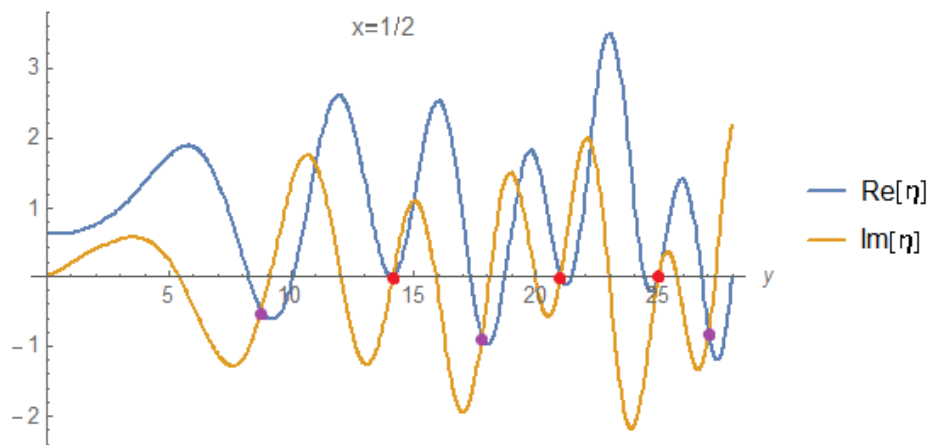


紫点は  $\eta$  固有の零点である。この図から次のことが分かる。

- (1) 実部は負の余弦曲線に似ており、虚部は正弦曲線に似ている。
- (2) 実部の極値点は虚部の零点に近いが零点ではない。
- (3)  $\eta$  固有の零点は実部の極小点に近いが極小点ではない。
- (4)  $\eta$  固有の零点は虚部の上り坂の零点(周期の終点)である。但し、逆は真ではない。

#### 4・1・4 非自明な零点

臨界線  $x=1/2$  におけるディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  の実部と虚部の図は次のようである。

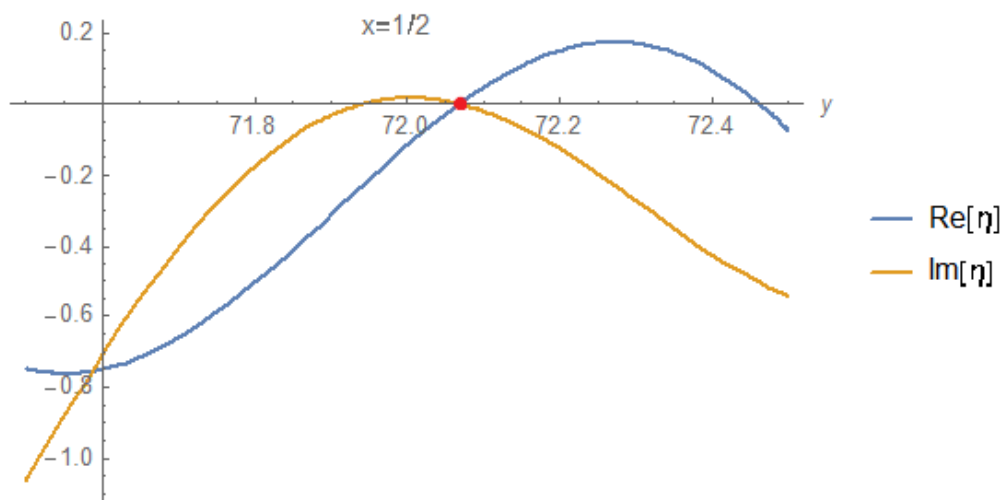


赤点是非自明な零点である。この図から次のことが分かる。

- (1) 実部は負の余弦曲線に似ており、虚部は正弦曲線に似ている。
- (2) 実部の極値点は虚部の零点に近いが零点ではない。
- (3) 非自明な零点は実部の極小点に近いが極小点ではない。
- (4) 非自明な零点は虚部の上り坂の零点(周期の終点)である。但し、逆は真ではない。
- (5)  $\eta$  固有の零点であった紫点は  $y$  軸より下に移動している。

#### 下り坂の零点

(3) と (4) には例外が存在する。例えば、 $y=72$  付近の図を描くと次のようである。非自明な零点  $72.0671\dots$  (赤点) は実部の極大点に近く且つ虚部の下り坂の零点である。



#### 4・1・5 ディリクレ・イータ級数の特徴

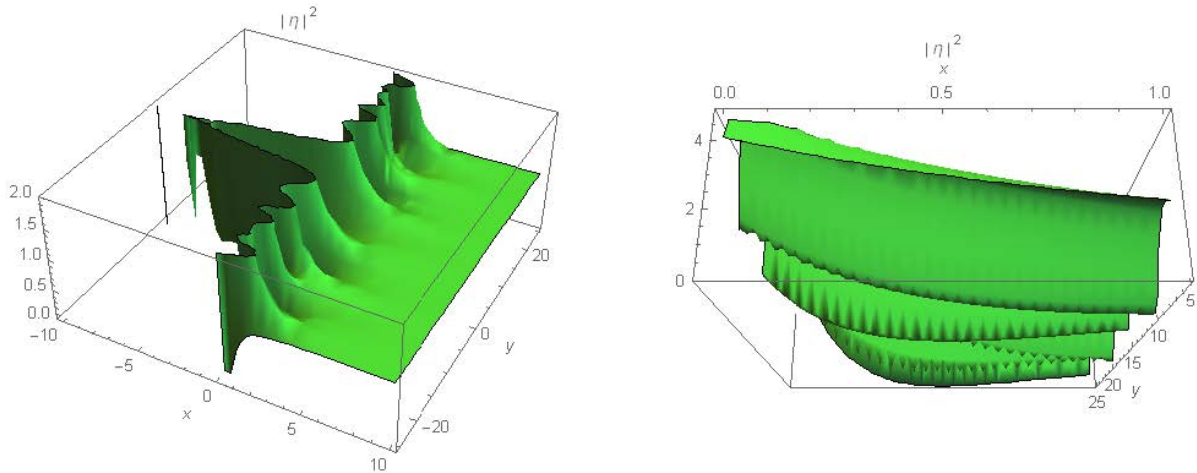
4・1・3 と 4. 1. 4 の両図を観察すると、このディリクレ級数には2つの周期関数が混在していることが分かる。これらのうち、 $\eta$  固有の零点を与える周期関数は振幅も周期も一定であるが、非自明な零点を与える周期関数は振幅も周期も一定していない。

#### 4・2 ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗

ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗は

$$g(x, y) = |\eta(x, y)|^2 \quad (2.0)$$

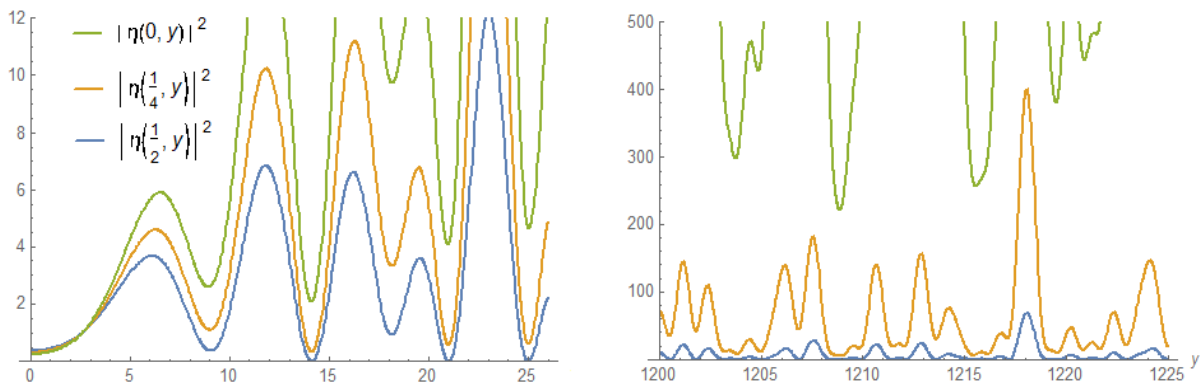
これは2変数実関数であり、図示すれば次のとおり。



左図においては  $x = 1/2$  および  $x = 1$  に沿って窪みが観察される。右図は左図の一部 ( $0 \leq x \leq 1, y \geq 0$ ) を斜め下から見上げたものである。右図においては  $x = 1/2$  &  $x = 1$  に沿って零点が観察される。 $x = 1/2$  上の零点は  $\zeta$  関数の零点に一致し、 $x = 1$  上の零点は  $\eta$  固有の零点である。これらに対し、 $x = 0$  上においては零点が存在しない。

#### $0 \leq x \leq 1/2$ における特徴

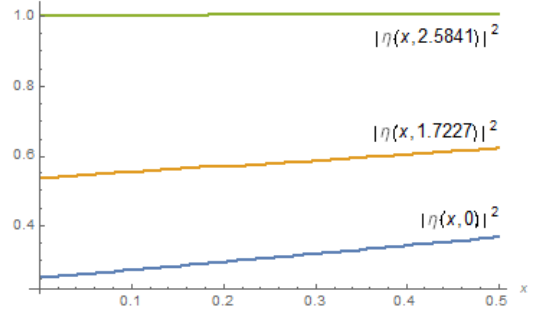
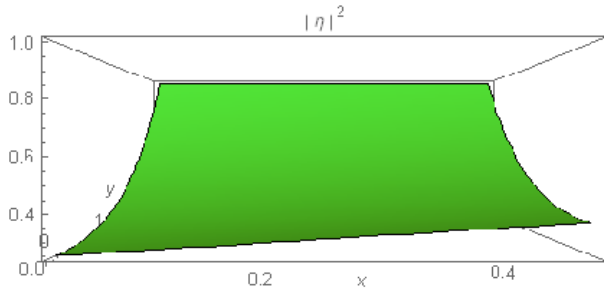
空間  $0 \leq x \leq 1/2$  に着目しよう。 $x = 0, 1/4, 1/2$  における切断図を描くと次のとおり。



これを見ると、 $2.6222 \leq y \leq 25$  では  $|\eta(0, y)|^2 > |\eta(1/4, y)|^2 > |\eta(1/2, y)|^2$  であるように見える。 $1200 \leq y \leq 1225$  でも同様である。以下、これをもっと詳しく観察する。

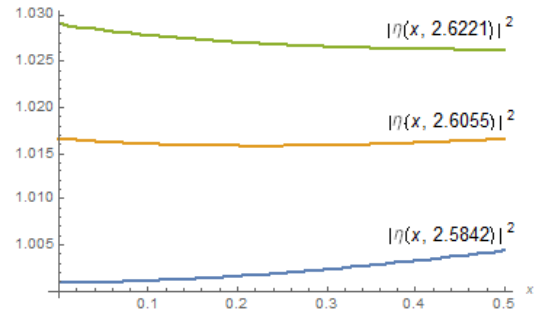
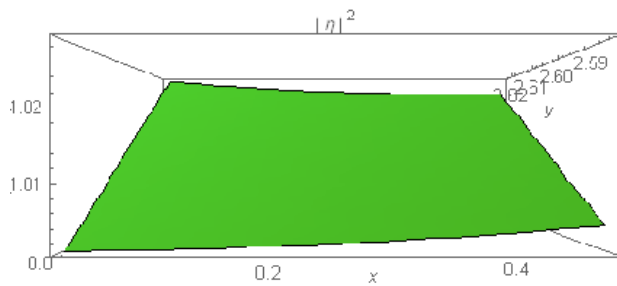
#### (1) $0 \leq y \leq 2.5841$

この区間の3D図を正面から見ると左図のとおり。また、これの  $y = 0, 1.7227, 2.5841$  における切断図が右図である。この区間においては  $|\eta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調増加であるように見える。



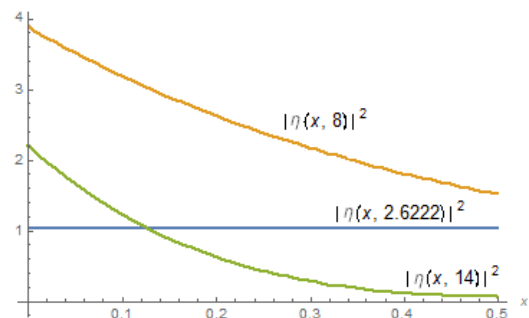
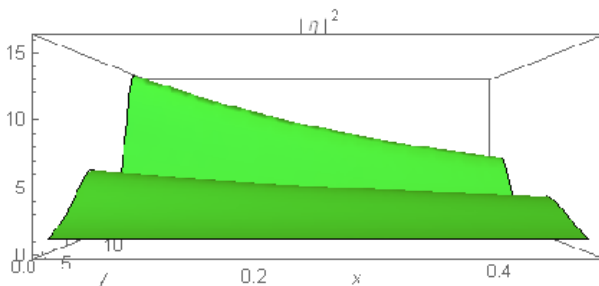
**(2)  $2.5841 < y < 2.6222$**

この区間の3D図を正面から見ると左図のとおり。また、これの  $y = 2.5842, 2.6055, 2.6221$  における切断図が右図である。この区間においては  $|\eta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調ではない。右図において、 $y = 2.5842$  の曲線は単調増加のように見えるが拡大すれば左端が跳ね上がっており、 $y = 2.6221$  の曲線は単調減少のように見えるが実際は右端が跳ね上がっている。



**(3)  $y \geq 2.6222$**

この区間の3D図を正面から見ると左図のとおり。また、これの  $2.6222, 8, 14$  における切断図が右図である。この区間においては  $|\eta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調減少であるように見える



以上の観察結果に基づき、筆者はリーマン仮説と同値な次の仮説を提示する。

**仮説 4・2・1**

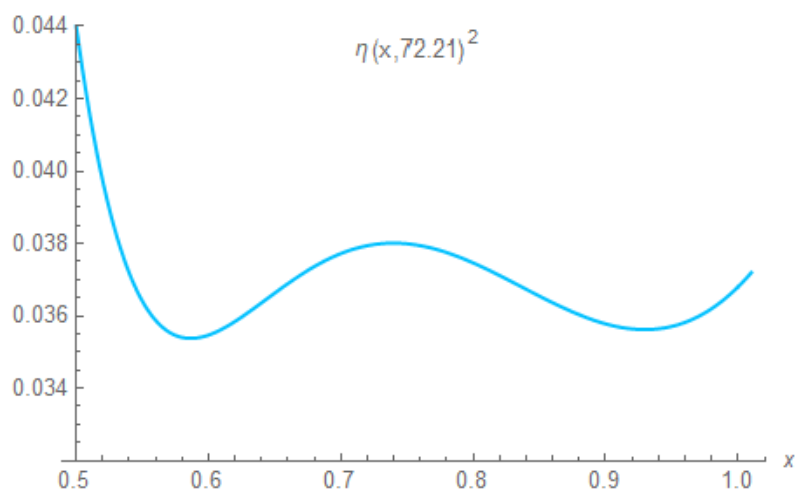
$\eta(x, y)$  を複素平面上のディリクレ・イータ関数とすると、その絶対値の2乗  $|\eta(x, y)|^2$  は領域  $0 < x < 1/2, y \geq 3$  においては  $x$  に関して単調減少関数である。

### Note 1

リーマン・ゼータ関数と共通な非自明零点は臨界領域と呼ばれる  $0 < x < 1$  内に存在している。しかも、それらは  $x = 1/2$  を軸として左右対称に存在すべきことが証明されている。従って、領域  $0 < x < 1/2, y \geq 3$  で  $|\eta(x, y)|^2$  が  $x$  に関して単調減少ならば、その領域には零点が存在しないことになり、反対の領域  $1/2 < x < 1, y \geq 3$  にも零点が存在しないことになる。このことはリーマン仮説と同値である。

### Note 2

反対側の領域  $1/2 < x < 1, y \geq 3$  においては、 $|\eta(x, y)|^2$  は  $x$  に関して単調関数とは限らない。例えば  $|\eta(x, 72.21)|^2$  は次のようになる。



### 4・3 絶対値の2乗の級数表示

#### 4・3・1 デイリクレ・イータ関数の級数表示

4・1・1 で見たように、デイリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  は次のように定義された。

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

$\operatorname{Re}(z) > 0$  のとき、 $z = x + iy$  と置けば

$$\eta(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} r^{-x-iy} \quad x > 0$$

指数関数で表せば

$$\eta(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-(x+iy)\log r} = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-x\log r - iy\log r}$$

三角関数で書けば

$$\eta(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\cos(y\log r)}{r^x} - i \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\sin(y\log r)}{r^x} \quad (3.1)$$

#### 4・3・2 $|\eta|^2$ の二重級数表示

デイリクレ・イータ関数の絶対値の2乗  $|\eta(x, y)|^2$  は (3.1) を用いて次のように表される。

$$|\eta(x, y)|^2 = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\cos(y\log r)}{r^x} \right\}^2 + \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\sin(y\log r)}{r^x} \right\}^2$$

これは大変ややこしいそうに見えるが、展開して整理すると意外に簡明な式になる。

#### 公式 4・3・2

$\eta(x, y)$  をデイリクレ・イータ関数とすると、

$$|\eta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ := g(x, y) \} \quad (3.2)$$

#### 証明

$(-1)^{r-1} \cos(y\log r) = C_r$  と置けば

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \cos(y\log r)}{r^x} = \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_4}{4^x} + \dots$$

この2乗は

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_4}{4^x} + \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_6}{6^x} + \dots \\ & \times \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_4}{4^x} + \frac{C_5}{5^x} + \frac{C_6}{6^x} + \dots \\ & = \frac{C_1}{1^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_1}{1^x} \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_1}{1^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_1}{1^x} \frac{C_4}{4^x} + \dots \\ & \quad + \frac{C_2}{2^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_2}{2^x} \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_2}{2^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_2}{2^x} \frac{C_4}{4^x} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_3}{3^x} \frac{C_4}{4^x} + \dots \\
& + \frac{C_4}{4^x} \frac{C_1}{1^x} + \frac{C_4}{4^x} \frac{C_2}{2^x} + \frac{C_4}{4^x} \frac{C_3}{3^x} + \frac{C_4}{4^x} \frac{C_4}{4^x} + \dots \\
& \vdots \\
& = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_r C_s}{r^x s^x}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \cos(y \log r)}{r^x} \right\}^2 = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_r}{r^x} \right\}^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_r C_s}{(rs)^x}$$

同様にして  $(-1)^{r-1} \sin(y \log r) = S_r$  と置けば

$$\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \sin(y \log r)}{r^x} \right\}^2 = \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{S_r}{r^x} \right\}^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{S_r S_s}{(rs)^x}$$

よって

$$\begin{aligned}
|\eta(x, y)|^2 &= \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \cos(y \log r)}{r^x} \right\}^2 + \left\{ - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} \sin(y \log r)}{r^x} \right\}^2 \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_r C_s + S_r S_s}{(rs)^x}
\end{aligned}$$

記号を元に戻せば

$$\begin{aligned}
|\eta(x, y)|^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(rs)^x} \left[ (-1)^{r-1} \cos(y \log r) (-1)^{s-1} \cos(y \log s) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{r-1} \sin(y \log r) (-1)^{s-1} \sin(y \log s) \right]
\end{aligned}$$

i.e.

$$|\eta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\cos(y \log r) \cos(y \log s) + \sin(y \log r) \sin(y \log s)}{(rs)^x}$$

ここで、

$$\cos(y \log r) \cos(y \log s) + \sin(y \log r) \sin(y \log s) = \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right)$$

であるから

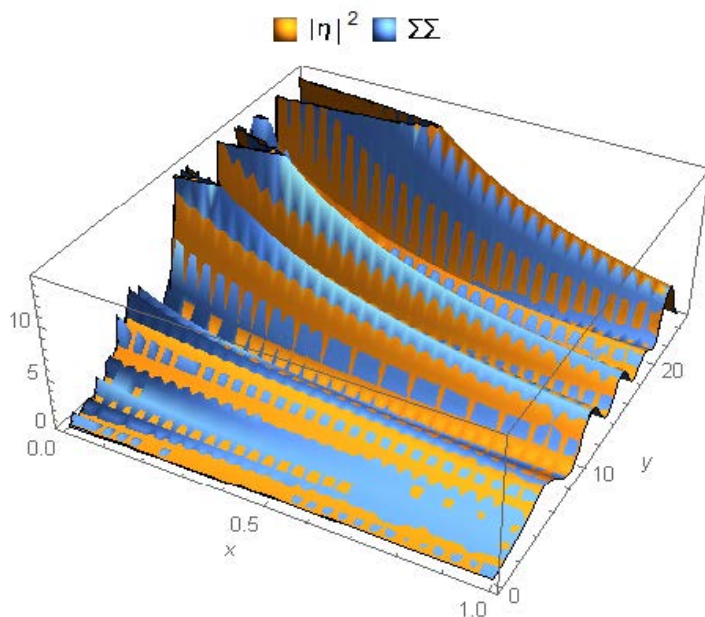
$$|\eta(x, y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (3.2)$$

(3.2) を展開すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
|\eta(x, y)|^2 &= \frac{1}{(1 \cdot 1)^x} \cos\left(y \log \frac{1}{1}\right) - \frac{1}{(1 \cdot 2)^x} \cos\left(y \log \frac{2}{1}\right) + \frac{1}{(1 \cdot 3)^x} \cos\left(y \log \frac{3}{1}\right) - + \dots \\
&\quad - \frac{1}{(2 \cdot 1)^x} \cos\left(y \log \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(2 \cdot 2)^x} \cos\left(y \log \frac{2}{2}\right) - \frac{1}{(2 \cdot 3)^x} \cos\left(y \log \frac{3}{2}\right) + - \dots \\
&\quad + \frac{1}{(3 \cdot 1)^x} \cos\left(y \log \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{(3 \cdot 2)^x} \cos\left(y \log \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{(3 \cdot 3)^x} \cos\left(y \log \frac{3}{3}\right) - + \dots \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$



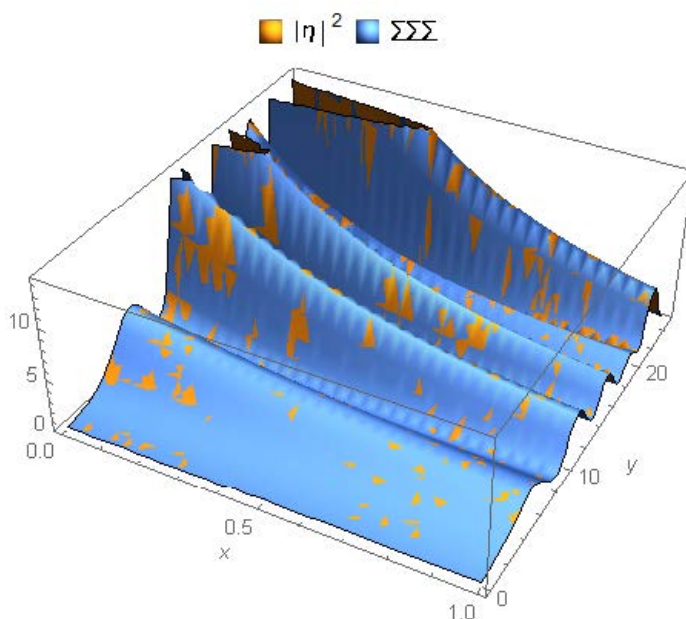
(3.2) の両辺を重ねて描いたのが次図である。ここで  $\Sigma$  の上限は  $300 \times 300$  としている。両者は  $x=1$  付近ではほぼ一致しているが、 $x=0$  付近ではあまり一致していない。



そこで (3.2) の右辺に並列加速因子 (アラカルト篇「13 多重級数の収束加速」) を次のように取り付ける。

$$g(x,y,q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r+s} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (3.2')$$

$q=1/2$ ,  $\Sigma$  の上限を  $m=40$  としてこれを左辺と一緒に描けば次のとおり。両辺はぴったり重なっていて斑に見える。

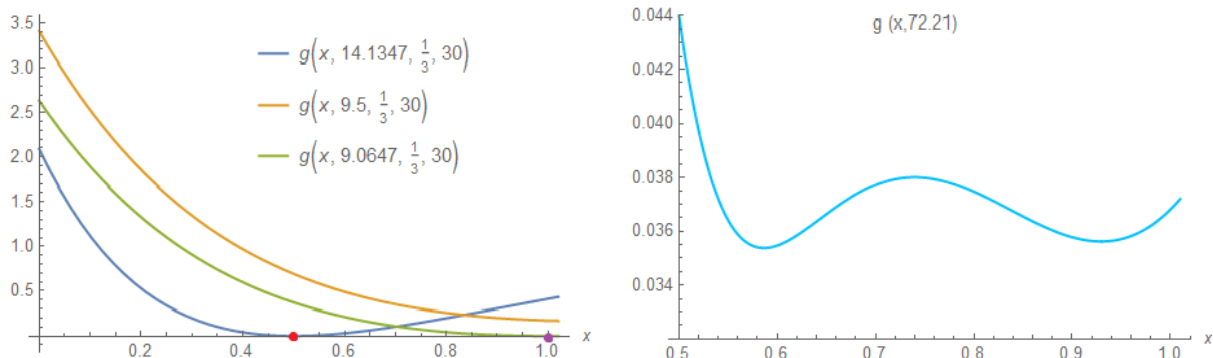


(3.2) と (3.2') は同じものである。 $y$  が大きいところでは (3.2) でも良いが、 $y$  が小さいところでは (3.2') が必要である。以後、理論的説明には (3.2) を用い、描画及び計算には (3.2') を用いる。また、 $|\eta(x,y)|^2$  を  $g(x,y)$  と記述する。

### 4・3・3 $g(x,y)$ の2D図

#### (1) $y$ での切断図

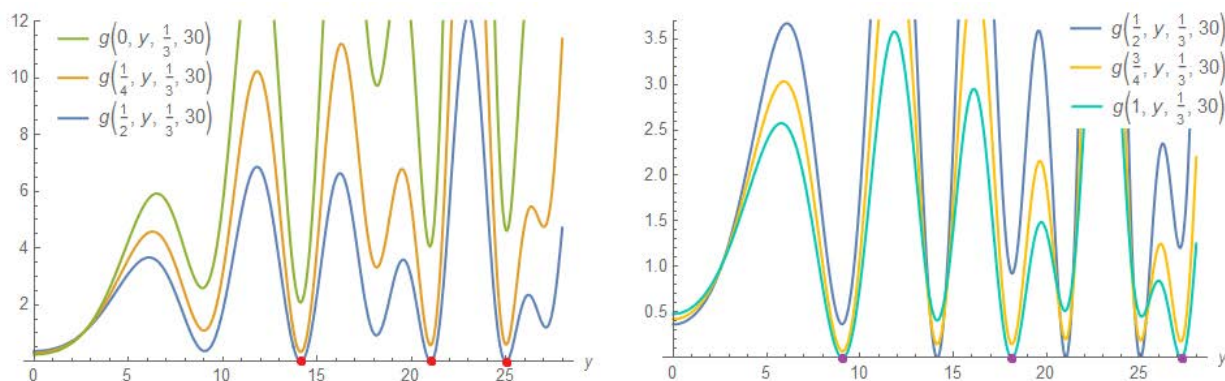
左図は  $g(x,y)$  の  $y = 14.1347\dots, 9.5, 9.0647\dots$  での切断図であり、右図は  $y = 72.21$  での切断図である。赤点は  $\eta$  の臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。



両図を観察すると、 $x < 1/2$  では  $g(x,y) > 0$  であるように見える。

#### (2) $x$ での切断図

左図は  $g(x,y)$  の  $x = 0, 1/4, 1/2$  での切断図であり、右図は  $x = 1/2, 3/4, 1$  での切断図である。赤点は  $\eta(z)$  の臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。



$x \leq 1/2, y \geq 3$  (左図)においては、 $g(x,y)$  は  $x$  に反比例し、 $x=0$  で最大で  $x=1/2$  で最小 ( $=0$ ) である。即ち、 $x < 1/2, y \geq 3$  においては  $g(x,y)$  は零点を持たない。

(1) 及び (2) の左図を解析的に表現すれば、リーマン仮説と同値な次の仮説が得られる。

#### 仮説 4・3・3

$\eta(x,y)$  を複素平面上的ディリクレ・イータ関数とすると、次の不等式が成り立つ。

$$g(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) > 0 \quad \text{for} \quad \begin{matrix} 0 < x < 1/2 \\ y \geq 3 \end{matrix} \quad (3.3)$$

#### Note

$g(x,y) \geq 0$  であるから、この証明は等号を除くだけである。これは本章中で最も容易かも知れない。

#### 4・4 零点における諸定理

前節で見たように、ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗は次のような二重級数で表された。

$$|\eta(x,y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ := g(x,y) \} \quad (3.2)$$

この二重級数の零点に関して以下の諸定理が成立する。

##### 定理 4・4・0

$\eta(x,y)$  をディリクレ・イータ関数とすると、 $\eta(a,b) = 0$  ならば

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad (4.0c)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad (4.0s)$$

##### 証明

(4.0c) の左辺は  $\eta(a,b)$  の絶対値の2乗であるから、(4.0c) は当然である。(4.0s) については本節の末尾で証明する。

面白いことに、 $\eta(x,y)$  の零点  $(a,b)$  においてはこれらの各行和が全て0でなければならない。以下、このことを定理として述べる。

##### 定理 4・4・1

$\eta(x,y)$  をディリクレ・イータ関数とすると、 $\eta(a,b) = 0$  ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1c)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1s)$$

##### 証明

(4.1c) の二重級数の第  $r$  行を  $C_r$  と表すことにすれば、

$$\begin{aligned} C_r &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) \\ &= \frac{(-1)^r}{r^a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = \cos(b \log r) \cos(b \log s) + \sin(b \log r) \sin(b \log s)$$

であるから

$$C_r = \frac{(-1)^r}{r^a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \{ \cos(b \log r) \cos(b \log s) + \sin(b \log r) \sin(b \log s) \}$$

i.e.

$$C_r = \frac{(-1)^r}{r^a} \left\{ \cos(b \log r) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos(b \log s) + \sin(b \log r) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \sin(b \log s) \right\}$$

$\eta(x,y)$  の零点  $(a,b)$  においては

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos(b \log s) = 0 \quad , \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \sin(b \log s) = 0$$

であったから、 $C_r(a,b) = 0$  for  $r=1, 2, 3, \dots$  とならねばならない。

同様に、(4.1s) の二重級数の第  $r$  行を  $S_r$  と表すことにすれば、

$$\begin{aligned} S_r &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) \\ &= \frac{(-1)^r}{r^a} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) = \cos(b \log r) \sin(b \log s) - \sin(b \log r) \cos(b \log s)$$

であるから

$$S_r = \frac{(-1)^r}{r^a} \left\{ \cos(b \log r) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \sin(b \log s) - \sin(b \log r) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos(b \log s) \right\}$$

上と同様の理由で、 $\eta(x,y)$  の零点  $(a,b)$  においては  $S_r(a,b) = 0$  for  $r=1, 2, 3, \dots$  とならねばならない。

これから、次の系が従う。

#### 系 4・4・1'

$\eta(x,y)$  をディリクレ・イータ関数とすると、 $\eta(a,b) = 0$  ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1c')$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots \quad (4.1s')$$

この系において  $\theta = -b \log r$  と置けば次が従う。

#### 系 4・4・1''

$\eta(x,y)$  をディリクレ・イータ関数とすると、 $\eta(a,b) = 0$  ならば、任意の実数  $\theta$  について次式が成立する。

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos(b \log s + \theta) = 0 \quad (4.1c'')$$

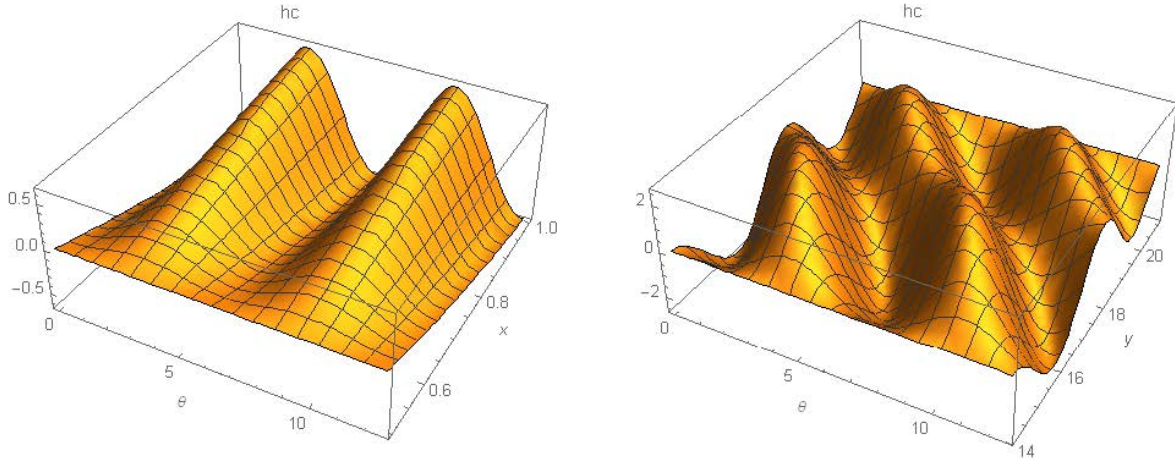
$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \sin(b \log s + \theta) = 0 \quad (4.1s'')$$

例

(4.1c")を図示する。この左辺は収束が遅くて正確な図を描き得難いので、これに次のようなクノッフ変換を施す。(アラカルト篇「10 二重関数項級数による収束加速と総和法」参照。)

$$h_c(x, y, \theta, q, m) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^s}{s^x} \cos(y \log s + \theta)$$

ここでは  $q=1/3$ ,  $\Sigma$  の上限を  $m=30$  で描かれている。



左図は  $y=14.1347\dots$  のときの  $x=1/2$  での切断図である。この切断面では任意の  $\theta$  について  $h_c=0$  であることが目視できる。

右図は  $x=1/2$  のときの  $y=14.1347\dots$  及び  $y=21.0220\dots$  での切断図である。これらの切断面では任意の  $\theta$  について  $h_c=0$  であることが目視できる。このような捻じれた図形中に等高直線が無数に現れるのは驚くべきことである。

### Note

しかしながら、系 4・4・1" は三角関数の加法定理を用いて直接に簡単に得ることができる。 $R$  が実数の集合のとき、任意の  $\theta \in R$  について次式が成立する。

$$\cos(\theta + b \log s) = \cos \theta \cos(b \log s) - \sin \theta \sin(b \log s)$$

両辺に  $(-1)^{s-1}/s^a$  を乗じて  $s$  について 1 から  $\infty$  まで合計すれば

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \cos(\theta + b \log s) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \{ \cos \theta \cos(b \log s) - \sin \theta \sin(b \log s) \} \\ &= \cos \theta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \cos(b \log s) - \sin \theta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \sin(b \log s) \end{aligned}$$

$(a, b)$  は  $\eta(x, y)$  の零点であるから、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \cos(b \log s) = 0 \quad \& \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \sin(b \log s) = 0$$

これらを右辺に代入して

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \cos(\theta + b \log s) = 0 \quad \forall \theta \in R \quad (4.1c'')$$

$\theta$  を  $\theta + \pi/2$  に置換して

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^a} \sin(\theta + b \log s) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{R} \quad (4.1s'')$$

系 4・4・1' を用いて、次の重要な定理が得られる。

#### 定理 4・4・2

$\eta(x, y)$  をディリクレ・イータ関数、 $c(r)$  を任意の実関数とすると、 $\eta(a, b) = 0$  ならば次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{c(r)}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad (4.2c)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{c(r)}{(rs)^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad (4.2s)$$

#### 証明

系 4・4・1' (4.1c') より

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots$$

両辺に  $(-1)^r c(r)/r^a$  を乗じれば

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{c(r)}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad \text{for } r=1, 2, 3, \dots$$

$r$  について足し上げて (4.2c) を得る。類似の方法で (4.2s) も得られる。

#### 定理 4・4・0 (4.0s) の証明

定理 4・4・2 (4.2s) において、特に  $c(r) = 1$  と置いて (4.0s) を得る。

## 4・5 絶対値の2乗の偏導関数

### 4・5・1 1階偏導関数

#### 公式 4・5・1

ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗を

$$g(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (= |\eta(x, y)|^2) \quad (3.2)$$

とすると、この1階偏導関数はそれぞれ次式で表される。

$$g_x = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1x)$$

$$g_y = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1y)$$

#### 証明

(3.2) を  $x$  で偏微分すれば

$$\begin{aligned} g_x &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(rs)}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log s}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \end{aligned} \quad (5.0x)$$

右辺第2項において  $r$  と  $s$  を交換すれば、

$$\begin{aligned} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log s}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) &= - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s+r} \frac{\log r}{(sr)^x} \cos\left(y \log \frac{r}{s}\right) \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &\quad \{ \because \cos(-z) = \cos z \} \end{aligned}$$

これを右辺第2項に代入して (5.1x) を得る。

次に、(3.2) を  $y$  で偏微分すれば

$$\begin{aligned} g_y &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(s/r)}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log s}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \end{aligned} \quad (5.0y)$$

右辺第1項において  $r$  と  $s$  を交換すれば、

$$\begin{aligned} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log s}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) &= - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s+r} \frac{\log r}{(sr)^x} \sin\left(y \log \frac{r}{s}\right) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &\quad \{ \because \sin(-z) = -\sin z \} \end{aligned}$$

これを右辺第1項に代入して (5.1y) を得る。

## 4・5・2 2階偏導関数

### 公式 4・5・2

ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗を

$$g(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (= |\eta(x, y)|^2) \quad (3.2)$$

とすると、この2階偏導関数はそれぞれ次式で表される。

$$g_{xx} = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s + \log^2 r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.xx)$$

$$g_{xy} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (= g_{yx}) \quad (5.xy)$$

$$g_{yy} = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s - \log^2 r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.yy)$$

### 証明

公式 4・5・1 の証明中の1階偏導関数

$$g_x = - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(rs)}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.0x)$$

$$g_y = - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(s/r)}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.0y)$$

を  $x, y$  でそれぞれ偏微分すると

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2(rs)}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \left( = \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\eta|^2 \right) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r + 2 \log r \log s + \log^2 s}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &= 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s + \log^2 r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ \because \cos(-z) = \cos z \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{xy} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log(rs) \log(s/r)}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \left( = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} |\eta|^2 \right) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 s}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{s+r} \frac{\log^2 r}{(sr)^x} \sin\left(y \log \frac{r}{s}\right) - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\ &= -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ \because \sin(-z) = -\sin z \} \end{aligned}$$

$$g_{yy} = - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2(s/r)}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \left( = \frac{\partial^2}{\partial y^2} |\eta|^2 \right)$$



$$\begin{aligned}
&= - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r - 2 \log r \log s + \log^2 s}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \\
&= 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s - \log^2 r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ \because \cos(-z) = \cos z \}
\end{aligned}$$

#### 4・6 零点における偏微係数

本節では、ディリクレ・イータ関数  $\eta(x, y)$  の零点において、前節で得られた偏導関数の値はどのようなかを考察する。

##### 4・6・1 1階偏微係数

###### 定理 4・6・1

$(a, b)$  がディリクレ・イータ関数  $\eta(x, y)$  の零点であるとき、公式 4・5・1 の偏導関数について次式が成立する。

$$g_x(a, b) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad (6.1x)$$

$$g_y(a, b) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0 \quad (6.1y)$$

###### 証明

定理14・4・2 において  $c(r) = \log r$  と置いて直ちに所望の式が得られる。

###### Note

本定理は極値問題においては「停留条件」と呼ばれている。

##### 4・6・2 2階偏微係数

###### 定理 4・6・2

$(a, b)$  がディリクレ・イータ関数  $\eta(x, y)$  の零点であるとき、公式 4・5・2 の偏導関数について次式が成立する。

$$g_{xx}(a, b) = g_{yy}(a, b) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) > 0 \quad (6.xx)$$

$$g_{xy}(a, b) = g_{yx}(a, b) = 0 \quad (6.xy)$$

###### 証明

公式 4・5・2 (5.xx), (5.xy), (5.yy) に零点  $(a, b)$  を代入すれば、

$$g_{xx}(a, b) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s + \log^2 r}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right)$$

$$g_{xy}(a, b) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^a} \sin\left(b \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ = g_{yx}(a, b) \}$$

$$g_{yy}(a, b) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s - \log^2 r}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right)$$

$\log^2 r$  は  $r$  の実関数であるから、定理 4・4・2 により、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right) = 0$$

これを上に代入して、

$$g_{xy}(a,b) = 0 \quad \{ = g_{yx}(a,b) \} \quad (6.xy)$$

$$g_{xx}(a,b) = g_{yy}(a,b) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r \log s}{(rs)^a} \cos\left(b \log \frac{s}{r}\right)$$

ここで、 $\eta(x,y)$  の零点  $(a,b)$  は

$$g(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (3.2)$$

の最小値 ( $= 0$ ) である。それ故、 $g_x(x,b)$  は  $a$  の前後で負から正に転じ、 $g_y(a,y)$  は  $b$  の前後で負から正に転じる。かくて  $g_{xx}(a,b) > 0$  ,  $g_{yy}(a,b) > 0$  でなければならない。

### ヘッセ行列による極値判定

一般に、極値問題においてはヘッセ行列による極値判定が行われる。それは次のようである。

$$g_{xx}(a,b) >< 0$$

$$g_{xx}(a,b) g_{yy}(a,b) - \{g_{xy}(a,b)\}^2 >< 0$$

(3.2) の場合、 $g(a,b) > 0$  ならばこの判定は必要である。しかし  $g(a,b) = 0$  ならばこの判定は不要である。何故ならば、 $g(a,b) = 0$  は  $g(x,y) \geq 0$  の最小値だからである。

それでも、敢えて判定を行えば、これらは 定理 4・6・2 により次のようになる。

$$g_{xx}(a,b) > 0$$

$$g_{xx}(a,b) g_{yy}(a,b) - \{g_{xy}(a,b)\}^2 = g_{xx}(a,b)^2 > 0$$

つまり、 $g(a,b)$  は  $g(x,y)$  の極小値であると判定される。

**例  $a = 1/2$  ,  $b = 14.134725 \dots$**

$$g_{xx}(a,b) = g_{yy}(a,b) = 7.089093 \dots$$

### Note

本節の2つの定理は 零点を有する正則な複素関数についても 一般的に成立する。その証明は コーシー・リーマンの方程式とラプラスの方程式を用いて容易に行うことができる。

#### 4・7 関数間の幾何学的関係

本節では、ディリクレ・イータ関数の絶対値の2乗や偏導関数の間の幾何学的な関係を少し解析的に考察する。

##### 4・7・1 $g(x,y)$ と $g_x(x,y)$

###### 定理 4・7・1

2変数実関数  $g(x,y)$  ,  $g_x(x,y)$  がそれぞれ次のようであるとする。

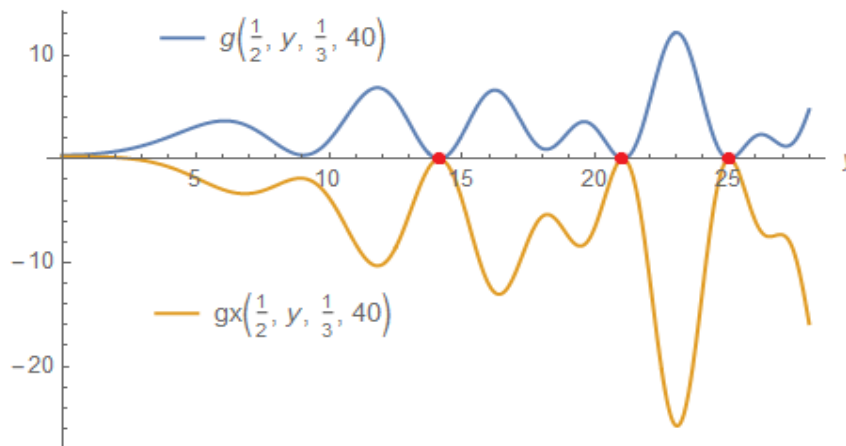
$$g(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \left\{ = |\eta(x,y)|^2 \right\} \quad (3.2)$$

$$g_x(x,y) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1x)$$

すると、ディリクレ・イータ関数  $\eta(x,y)$  の零点を  $(a,b)$  とするとき、

- (1)  $b$  は  $g(a,y) = 0$  ,  $g_x(a,y) = 0$  の共通根である。
- (2)  $b$  は  $g(a,y) = 0$  ,  $g_x(a,y) = 0$  の両式において、少なくとも重根である。
- (3)  $g(a,y)$  と  $g_x(a,y)$  は  $y$  軸を挟んでほぼ対称である。

臨界線上の  $g$  と  $g_x$  (赤点は  $b$ )



###### 証明

- (1)  $g(a,b) = |\eta(a,b)|^2 = 0$ 。他方、定理 4・6・1 により  $g_x(a,b) = 0$ 。よって  $(a,b)$  は  $g(x,y)$  と  $g_x(x,y)$  の共通零点である。
- (2)  $g(x,y) = |\eta(x,y)|^2$  であるから、 $g(a,y) = 0$  の根  $b$  は少なくとも重根である。他方、定理 4・6・2 により  $g_{xy}(a,b) = 0$  であるから、 $g_x(a,b)$  は  $y$  に関して極値でなければならない。よって  $g_x(a,y) = 0$  の根  $b$  も少なくとも重根である。
- (3)  $\cos\{y \log(s/r)\}$  をマクローリン展開すると、

$$\cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{\log^{2t}(s/r)}{(2t)!} y^{2t}$$

これを用いると  $g(x,y)$  ,  $g_x(x,y)$  はそれぞれ次のように表される。

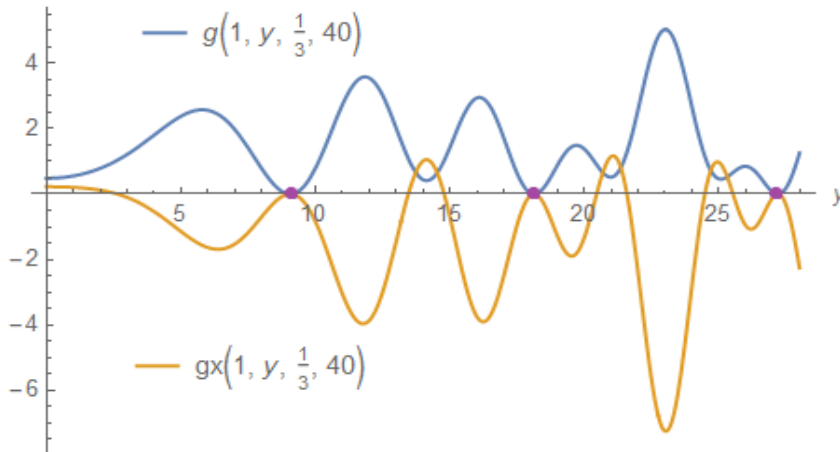
$$g(x,y) = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s+t} \frac{1}{(rs)^x} \frac{\log^{2t}(s/r)}{(2t)!} \right\} y^{2t} \quad (7.1)$$

$$g_x(x,y) = -2 \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s+t} \frac{\log r}{(rs)^x} \frac{\log^{2t}(s/r)}{(2t)!} \right\} y^{2t} \quad (7.1x)$$

(7.1) と (7.1x) は共に  $y$  に関して偶関数であり、符号を除けば似たような形である。しかしながら、両者は符号が反対である。それ故  $g_x(a,b)$  は  $y$  に関して極大値となる。これに (1), (2) を加味すれば、 $g(a,y)$  と  $g_x(a,y)$  は  $y$  軸を挟んでほぼ対称となる。

ディリクレ・イータ関数は  $x=1$  において  $\eta$  固有の零点を持つ。これの2D図は次のとおり。臨界線上の零点と異なるのは、 $b$  が  $g_x(a,y)$  の最大点でなく極大点であることである。

$x=1$  上の  $g$  と  $g_x$  (紫点は  $b$ )



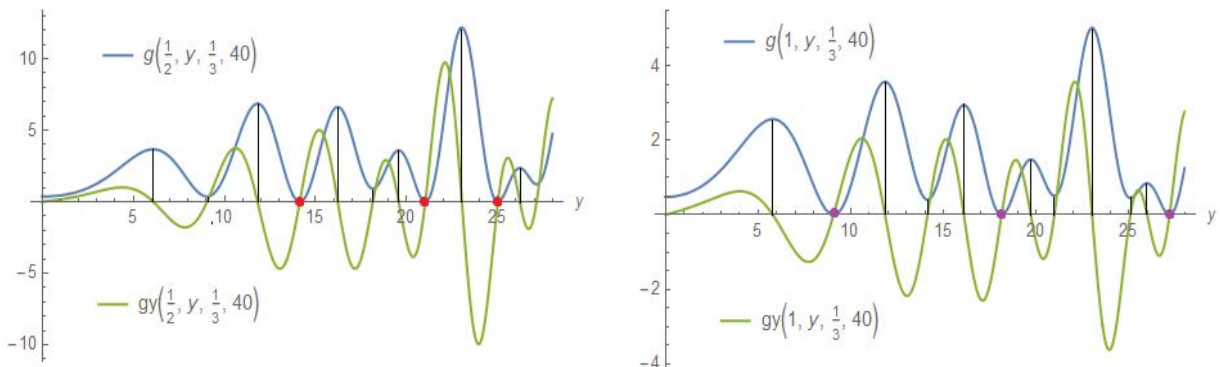
#### 4・7・2 $g(x,y)$ と $g_y(x,y)$

これらは次式で示される関数である。

$$g(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \left\{ = |\eta(x,y)|^2 \right\} \quad (3.2)$$

$$g_y(x,y) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1y)$$

これらの  $x=1/2$  及び  $x=1$  での切断図は次のとおり。左図が  $x=1/2$  での切断図で、右図が  $x=1$  での切断図である。赤点は臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。



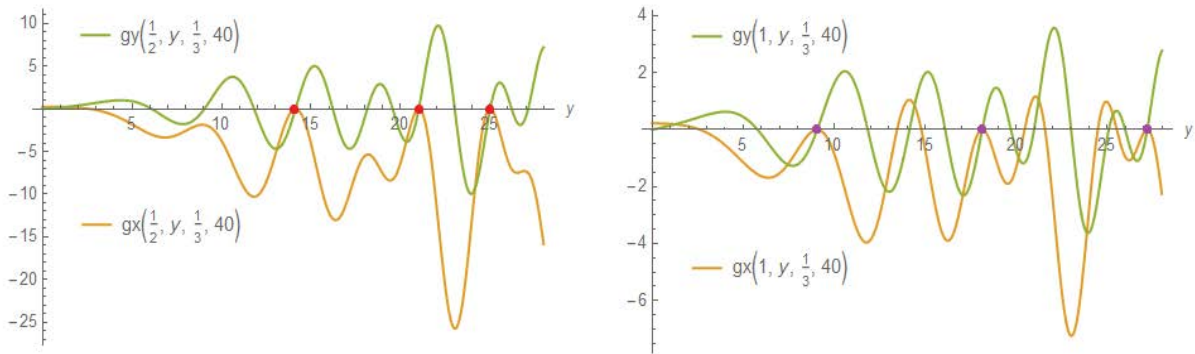
このペアの重要性は、 $g_y$  が  $g$  の  $y$  に関する導関数であることである。即ち、 $y$  軸上において、 $g$  の極値は  $g_y$  の零点に対応する。黒の縦線はこのことを示している。それ故、 $\eta(x, y)$  の零点  $(a, b)$  において両者は一致しなければならない。それは 定理4・6・1 による。また、 $g$  の極小点は  $g_y$  の上り坂の零点である。定理 4・6・2 の  $g_{yy}(a, b) > 0$  はこのことを支援している。

#### 4・7・3 $g_x(x, y)$ と $g_y(x, y)$

$$g_x(x, y) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1x)$$

$$g_y(x, y) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1y)$$

これらの  $x = 1/2$  及び  $x = 1$  での切断図は次のとおり。左図が  $x = 1/2$  での切断図で、右図が  $x = 1$  での切断図である。赤点は臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。



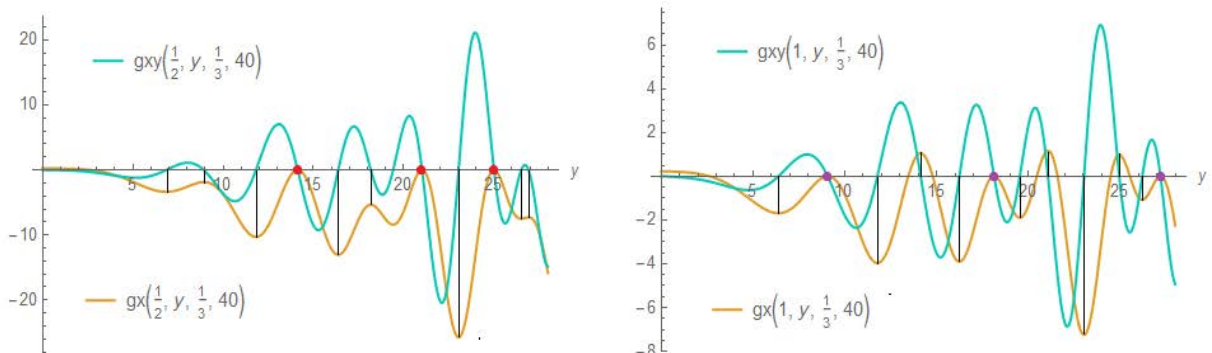
4・7・1 で見たように、 $g_x$  は  $g$  と  $y$  軸上で零点を共有し、それらは極大値である。そして 定理 4・6・1 により  $g_x = g_y = 0$  とならねばならない。かくて赤点及び紫点がそれらの零点となる。そしてこれら  $g_x$  と  $g_y$  の共有零点は必ず  $g_y$  の上り坂の零点となる。( i.e.  $g_{yy}(a, b) > 0$  )

#### 4・7・4 $g_x(x, y)$ と $g_{xy}(x, y)$

$$g_x(x, y) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad (5.1x)$$

$$g_{xy}(x, y) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^2 r}{(rs)^x} \sin\left(y \log \frac{s}{r}\right) \quad \{ = g_{yx}(x, y) \} \quad (5.xy)$$

これらの  $x = 1/2$  及び  $x = 1$  での切断図は次のとおり。左図が  $x = 1/2$  での切断図で、右図が  $x = 1$  での切断図である。赤点は臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。



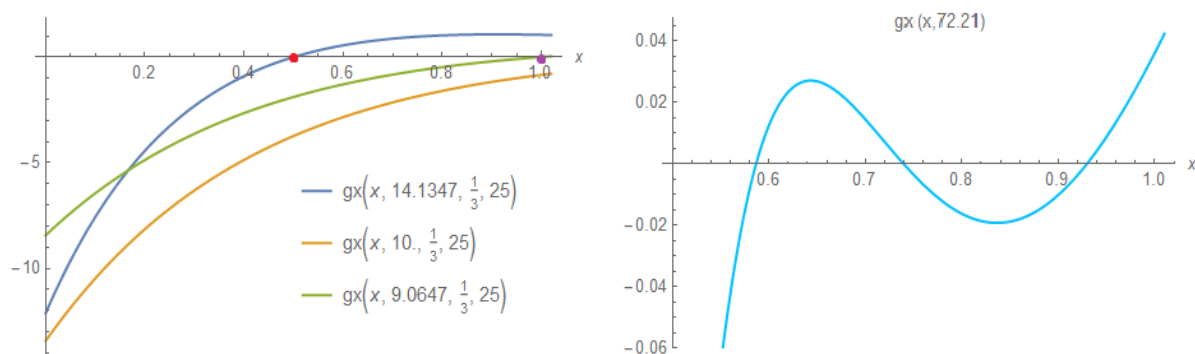
$g_{xy}$  は  $g_x$  の  $y$  に関する偏導関数である。それ故、 $g_x$  の極値と  $g_{xy}$  の零点は対応する。黒の縦線はそのことを示している。また、 $g_x$  の極大点は  $g_{xy}$  の下り坂の零点に一致する。

#### 4・7・5 $g_x(x, y)$ の2D図

1階偏導関数のうち、特に興味深いのは  $g_x$  である。そこでこれをもう少し詳しく観察しよう。

##### (1) $y$ での切断図

左図は  $g_x(x, y)$  の  $y = 14.1347\dots, 10, 9.0647\dots$  での切断図であり、右図は  $y = 72.21$  での切断図である。赤点は  $\eta(z)$  の臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。

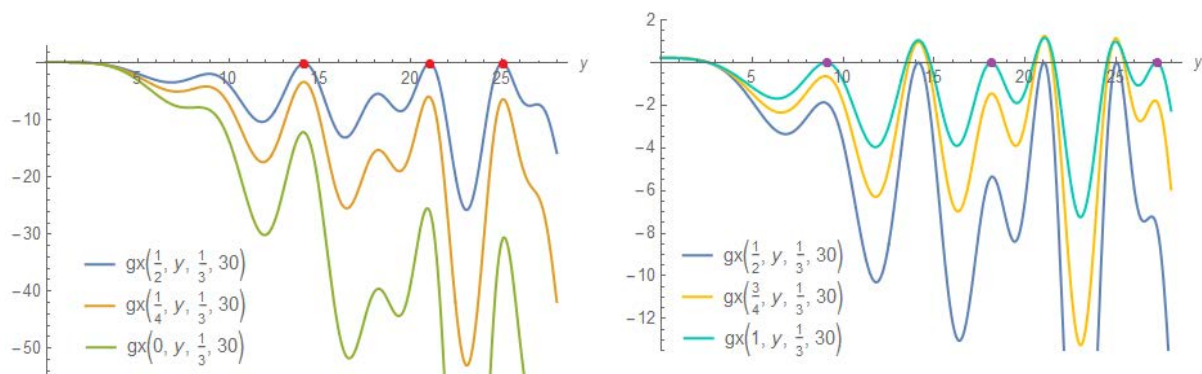


両図を観察すると、 $x < 1/2$  では  $g_x(x, y) < 0$  のように見える。

##### (2) $x$ での切断図

左図は  $g_x(x, y)$  の  $x = 0, 1/4, 1/2$  での切断図であり、右図は  $x = 1/2, 3/4, 1$  での切断図である。赤点は  $\eta(z)$  の臨界線上の零点、紫点は  $\eta$  固有の零点である。

これらは 4・3・3 (2) の切断図と  $y$  軸に関して対称的である。



$x \leq 1/2, y \geq 3$  (左図)においては、 $|g_x(x, y)|$  は  $x$  に反比例し、 $x = 1/2$  で最小、 $x = 0$  で最大である。即ち、 $x < 1/2, y \geq 3$  においては  $g_x(x, y)$  は零点を持たない。

(1) 及び (2) の左図を解析的に表現すれば、リーマン仮説と同値な次の仮説が得られる。

#### 仮説 4・7・5

$\eta(x, y)$  を複素平面上のディリクレ・イータ関数とすると、次の不等式が成立する。

$$g_x(x, y) = -2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log r}{(rs)^x} \cos\left(y \log \frac{s}{r}\right) < 0 \quad \text{for } \begin{matrix} 0 < x < 1/2 \\ y \geq 3 \end{matrix} \quad (7.5)$$

### **Note**

この仮説は臨界領域内での  $g_x(x,y) \geq 0$  の可能性を排除するものである。仮説 4・3・3 と異なり、= のみならず > も排除されなければならない。それは仮説 4・3・3 の証明よりも難しいかも知れない。

2018.05.01

2019.07.08 Renewed

2022.01.21 Renewed

Kano Kono

宇宙人の数学