# 5 ディリクレ級数の分割

## 5·1 ディリクレ級数の基本分割

本節では、ディリクレ級数を2つ以上の級数に分割する方法を検討する。

### 明示的級数

先ず、対象の級数がΣを用いて明示的に表されねばならない。
ここで明示的とは、級数の各項の値が項番の多項式で示されていることを言う。
例えば、

$$\zeta(3)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^3}\ ,\quad \beta(2)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^2}\ ,\quad s(4)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^3}\right)$$

これに対して、次のような級数は明示的級数ではない。

$$S(2)=\sum_{\rho\,:\,prime}\frac{1}{\rho^2}$$

### 分割の無限性

被分割級数が絶対収束する場合、級数の分割方法は、2分割に限っても、無数に存在する。
例えば、

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots$$

分割1

$$A_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{21^2}+\cdots$$

$$A_2=\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}\right)+\cdots$$

分割2

$$A_1=1+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}\right)+\left(\frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{18^2}+\frac{1}{19^2}\right)+\cdots$$

$$A_2=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}\right)+\left(\frac{1}{12^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots$$

分割3

$$A_1=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{32^2}+\frac{1}{64^2}+\cdots$$

$$A_2=\frac{1}{3^2}+\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots$$

*etc* .

これらの分割級数$A_1$ , $A_2$はいづれも収束するが、その総和の公式はほとんどで知られていない。そこで、各分割級数の総和が公式として得られるような分割方法を提示する。

定義 5・1・0（基本分割）

被分割級数において 第 $k$ 項（ $k=1,2,\cdots m$ ）から $(m-1)$ 個飛ばしに項を選んで正項級数または負項級数 $A_k$ $(k=1,2,\cdots m)$ を作成でるとき、我々はこれを **基本 $\boldsymbol{m}$ 分割**（ あるいは単に **$\boldsymbol{m}$ 分割** ）と呼ぶ。

基本分割が不能な級数

定義 5・1・0 に従えば、各項の符号の変化が循環的でない級数は基本分割できない。
例えば、次のような級数 $S$ は基本分割できない。

$$S=1-\frac{1}{2^n}+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)-\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^n}\right)+\left(\frac{1}{8^n}+\cdots+\frac{1}{11^n}\right)-\left(\frac{1}{12^n}+\cdots+\frac{1}{16^n}\right)+\cdots$$

基本分割が可能な級数

定義 5・1・0 に従えば、

(1) 正項級数または負項級数は**2以上任意個数の基本分割が一意に可能**である。

(2) 各項の符号の変化が循環的な級数も基本分割が可能である。但し、任意個数への分割は不可である。例えば、ディリクレ・イータ級数

$$\eta(n)=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}-\frac{1}{12^n}+-\cdots$$

は次のようにそれぞれ**一意に分割**される。

2分割

$$A_1=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots$$

$$A_2=-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}+\cdots\right)$$

3分割

不可。

4分割

$$A_1=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\cdots$$

$$A_2=-\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{18^n}+\cdots\right)$$

$$A_3=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{19^n}+\cdots$$

$$A_4=-\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{16^n}+\frac{1}{20^n}+\cdots\right)$$

5分割

不可。

⋮

ディリクレ級数をこのような方法で分割すれば、各分割級数の総和が公式として得られる。以下それを示す。

公式 5･1･1

$\zeta(n,z)$ をフルヴィッツ・ゼータ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、リーマン・ゼータ級数 $\zeta(n)$ 及びその $m$ 分割級数 $A_k$ をそれぞれ次のようであるとする。

$$\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$$

$$A_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(mr+k)^n} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

すると、$k=1,2,\cdots,m$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(mr+k)^n} = \frac{1}{m^n}\zeta\left(n,\frac{k}{m}\right) \tag{1.1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{m^n(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{k}{m}\right) \tag{1.1'}$$

$$= \frac{1}{m^n(n-1)!}\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}e^{-\frac{k}{m}t}}{1-e^{-t}}dt \tag{1.1''}$$

証明

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{mr+k}\right)^n = \frac{1}{m^n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r+k/m)^n} = \frac{1}{m^n}\zeta\left(n,\frac{k}{m}\right) \tag{1.1}$$

フルヴィッツ・ゼータ関数 $\zeta(n,z)$ と ポリガンマ関数 $\psi_n(z)$ との間には次の関係がある。

$$\psi_n(z) = (-1)^{n+1}n!\,\zeta(n+1,z)$$

これより

$$\zeta\left(n,\frac{k}{m}\right) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{k}{m}\right)$$

これを (1.1) に代入すれば

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(mr+k)^n} = \frac{(-1)^n}{m^n(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{k}{m}\right) \tag{1.1'}$$

次に、*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* ( Milton Abramowitz and Irene A. Stegun ) によれば、

$$\psi_n(z) = (-1)^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{t^n e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt$$

であるから、

$$\psi_{n-1}\left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^n\int_0^{\infty}\frac{t^{n-1}e^{-\frac{k}{m}t}}{1-e^{-t}}dt$$

これを (1.1') に代入して (1.1'') を得る。

公式 5･1･2

$\zeta(n,z)$ をフルヴィッツ･ゼータ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(n)$ 及びその $m$ 分割級数 $A_k$ をそれぞれ次のようであるとする。

$$\lambda(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^n}$$

$$A_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2mr+2k-1)^n} \qquad k=1,2, \cdots ,m$$

すると、$k=1,2, \cdots ,m$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2mr+2k-1)^n} = \frac{1}{(2m)^n}\zeta\left(n, \frac{2k-1}{2m}\right) \tag{1.2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2m)^n(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{2k-1}{2m}\right) \tag{1.2'}$$

$$= \frac{1}{(2m)^n(n-1)!}\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}e^{-\frac{2k-1}{2m}t}}{1-e^{-t}}dt \tag{1.2''}$$

証明

前公式と類似の方法による。

***Note***

定義 5･1･0（基本分割）のメリットは、各分割級数の総和がフルヴィッツ･ゼータ関数で表されることである。これは基本分割の定義とフルヴィッツ･ゼータ関数の定義が一致している故である。つまり、上記公式は当たり前である。当たり前なのにこれらを用いる理由は、$\zeta(n,z)$ や $\psi_n(z)$ が関数だからである。**分割級数の総和がこれらの関数によって記述されることに意義がある。**
このことは三角級数や双曲線級数の総和が指数関数で記述されることと同義である。

## 5･2 ディリクレ級数の2分割

### 5･2･1 $\zeta(4)$ の2分割

リーマン･ゼータ級数 $\zeta(4)$ は次のようである。

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots$$

これの2分割は次のようになる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4}$$

$$A_2 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+2)^4}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\mathrm{A1}[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(2r+1)^4} \qquad \mathrm{A2}[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(2r+2)^4}$$

```
N[{A1[10000], A2[10000]}, 10]
{1.014678032, 0.06764520211}

N[A1[10000] + A2[10000], 10]
1.082323234

N[Zeta[4], 10]
1.082323234
```

### フルヴィッツ･ゼータ関数による表示

公式 5･1･1 (1.1) により、級数 $A_1$ , $A_2$ の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^4} = \frac{1}{2^4}\zeta\left(4, \frac{1}{2}\right) =: B_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+2)^4} = \frac{1}{2^2}\zeta\left(4, \frac{2}{2}\right) =: B_2$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

```
ζ[n_, z_] := HurwitzZeta[n, z]
```

$$\mathrm{B1} := \frac{1}{2^4}\,\zeta\left[4, \frac{1}{2}\right] \qquad \mathrm{B2} := \frac{1}{2^4}\,\zeta\left[4, \frac{2}{2}\right]$$

```
N[{B1, B2}, 10]
{1.014678032, 0.06764520211}

N[B1 + B2, 10]
1.082323234
```

### $\zeta(4)$ による表示

フルヴィッツ･ゼータ関数 とリーマン･ゼータ関数 との間には次なる関係がある。

$$\zeta\left(4, \frac{1}{2}\right) = \left(2^4 - 1\right)\zeta(4) \ , \qquad \zeta\left(4, \frac{2}{2}\right) = \zeta(4)$$

よって

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^4}=\frac{(2^4-1)\zeta(4)}{2^4}=:C_1$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+2)^4}=\frac{\zeta(4)}{2^4}=:C_2$$
明らかに $C_1+C_2=\zeta(4)$ である。

### 5·2·2 $\lambda(4)$ の2分割

ディリクレ·ラムダ級数 $\lambda(4)$ は次のようである。

$$\lambda(4)=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{17^4}+\cdots$$

これの2分割は次のようになる。

$$A_1=1+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{17^4}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+1)^4}$$
$$A_2=\frac{1}{3^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{15^4}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+3)^4}$$
$$\lambda(4)=A_1+A_2$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\text{A1}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(4r+1)^4}\qquad \text{A2}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(4r+3)^4}$$

```
N[{A1[10000], A2[10000]}, 10]
{1.001811292, 0.01286673993}

N[A1[10000] + A2[10000], 10]
1.014678032

N[DirichletLambda[4], 10]
1.014678032
```

### ポリガンマ関数による表示

公式 5·1·2 (1.2') により、級数 $A_1$ , $A_2$ の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+1)^4}=\frac{1}{4^4\,3!}\psi_3\left(\frac{1}{4}\right)=:B_1$$
$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+3)^4}=\frac{1}{4^4\,3!}\psi_3\left(\frac{3}{4}\right)=:B_2$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\psi_{n\_}[z\_]:=\text{PolyGamma}[n,z]$$

$$\text{B1}:=\frac{1}{4^4\,3!}\psi_3\left[\frac{1}{4}\right]\qquad \text{B2}:=\frac{1}{4^4\,3!}\psi_3\left[\frac{3}{4}\right]$$

```
N[{B1, B2}, 10]
{1.001811292, 0.01286673993}

N[B1 + B2, 10]
1.014678032
```

**$\pi$ と $\beta(4)$ による表示**

*MathWorld*（http://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html ）によれば

$$\psi_3\left(\frac{1}{4}\right) = 8\pi^4 + 768\beta(4) \quad , \quad \psi_3\left(\frac{3}{4}\right) = 8\pi^4 - 768\beta(4)$$

ここで、$\beta(z)$ はディリクレ・ベータ関数である。これらを 上 に代入すれば

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+1)^4} = \frac{8\pi^4 + 768\beta(4)}{4^4\,3!} =: C_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+3)^4} = \frac{8\pi^4 - 768\beta(4)}{4^4\,3!} =: C_2$$

$$C_1 + C_2 = \frac{\pi^4}{96} = \lambda(4)$$

### 5・2・3 $\beta(4)$ の2分割

ディリクレ・ベータ級数 $\beta(4)$ は次のようである。

$$\beta(4) = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} - \frac{1}{11^4} + \frac{1}{13^4} - \frac{1}{15^4} + \frac{1}{17^4} - + \cdots$$

これの2分割は次のようになる。

$$\beta(4) = A_1 - A_2$$

$A_1$ , $A_2$ は 5・2・2 と同じものである。従って、

$$A_1 = 1.00181129167\cdots = \frac{1}{4^4\,3!}\psi_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8\pi^4 + 768\beta(4)}{4^4\,3!}$$

$$A_2 = 0.01286673993\cdots = \frac{1}{4^4\,3!}\psi_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{8\pi^4 - 768\beta(4)}{4^4\,3!}$$

$$A_1 - A_2 = 0.9889445517\cdots = \frac{2\times 768\beta(4)}{3!\,4^4} = \beta(4)$$

5･3 ディリクレ級数の3分割

## 5･3･1 $\zeta(3)$ の3分割

リーマン･ゼータ級数 $\zeta(3)$ は次のようである。

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} + \cdots$$

これの3分割は次のようになる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{10^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+1)^3}$$

$$A_2 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{11^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+2)^3}$$

$$A_3 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{12^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+3)^3}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\text{A1}[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(3r+1)^3} \qquad \text{A2}[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(3r+2)^3} \qquad \text{A3}[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(3r+3)^3}$$

```
N[{A1[50000], A2[50000], A3[50000]}, 10]
{1.020780044, 0.1367562327, 0.04452062604}

N[A1[50000] + A2[50000] + A3[50000], 10] 10]
 1.202056903

N[Zeta[3], 10]
1.202056903
```

### ポリガンマ関数による表示

公式 5･1･1 (1.1') により、級数 $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+1)^3} = \frac{-1}{3^3\,2!}\psi_2\left(\frac{1}{3}\right) =: B_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+2)^3} = \frac{-1}{3^3\,2!}\psi_2\left(\frac{2}{3}\right) =: B_2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(3r+3)^3} = \frac{-1}{3^3\,2!}\psi_2\left(\frac{3}{3}\right) =: B_3$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\psi_{n\_}[z\_] := \text{PolyGamma}[n, z]$$

$$\text{B1} := \frac{-1}{3^3\,2!}\psi_2\left[\frac{1}{3}\right] \qquad \text{B2} := \frac{-1}{3^3\,2!}\psi_2\left[\frac{2}{3}\right] \qquad \text{B3} := \frac{-1}{3^3\,2!}\psi_2\left[\frac{3}{3}\right]$$

```
N[{B1, B2, B3}, 10]
{1.020780044, 0.1367562327, 0.04452062604}

N[B1 + B2 + B3, 10]
1.202056903
```

### 5･3･2 $\lambda(3)$ の3分割

ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(3)$ とその3分割は次のようである。

$$\lambda(3)=1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{15^3}+\frac{1}{17^3}+\frac{1}{19^3}+\cdots$$

$$A_1=1+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{19^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+1)^3}$$

$$A_2=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{15^3}+\frac{1}{21^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+3)^3}$$

$$A_3=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{11^3}+\frac{1}{17^3}+\frac{1}{23^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+5)^3}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\text{A1}[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(6r+1)^3}\qquad \text{A2}[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(6r+3)^3}\qquad \text{A3}[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(6r+5)^3}$$

```
N[{A1[70000], A2[70000], A3[70000]}, 10]
{1.003685515, 0.03895554779, 0.009158727129}

N[A1[70000] + A2[70000] + A3[70000], 10]      1.051799790
N[DirichletLambda[3], 10]                     1.051799790
```

**ポリガンマ関数による表示**

公式 5･1･2 (1.2') により、級数 $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+1)^3}=\frac{-1}{6^3\,2!}\psi_1\left(\frac{1}{6}\right)=:B_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+3)^3}=\frac{-1}{6^3\,2!}\psi_1\left(\frac{3}{6}\right)=:B_2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+5)^3}=\frac{-1}{6^3\,2!}\psi_1\left(\frac{5}{6}\right)=:B_3$$

**$\pi$ と $\zeta(3)$ による表示**

*MathWorld* （http://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html ）によれば

$$\psi_2\left(\frac{1}{6}\right)=-182\zeta(3)-4\sqrt{3}\,\pi^3\ ,\quad \psi_2\left(\frac{3}{6}\right)=-14\zeta(3)\ ,\quad \psi_2\left(\frac{5}{6}\right)=-182\zeta(3)+4\sqrt{3}\,\pi^3$$

これらを上に代入して

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+1)^3}=\frac{182\zeta(3)+4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!}\quad=:C_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(6r+3)^3}=\frac{14\zeta(3)}{6^3\,2!}\quad=:C_2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(6r+5)^3} = \frac{182\zeta(3) - 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3 2!} \quad =: C_3$$

数式処理ソフト*Mathematica* による計算結果は次のとおり。

```
ζ3 := Zeta[3]
```

$$\mathrm{C1} := \frac{182\,\zeta3 + 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!} \qquad \mathrm{C2} := \frac{14\,\zeta3}{6^3\,2!} \qquad \mathrm{C3} := \frac{182\,\zeta3 - 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!}$$

```
N[{C1, C2, C3}, 10]
{1.003685515, 0.03895554779, 0.009158727129}
N[C1 + C2 + C3, 10]     1.051799790
```

### 5·3·3 $\beta(3)$ の3分割

ディリクレ・ベータ級数 $\beta(3)$ は交代級数であるので基本3分割は出来ない。このような級数は基本4分割以上を行なってこれらを組合せて3つの級数を構成するしかない。このような分割方法は「合成分割」とでも呼ぶべきものである。( 第5節 参照 )

## 5･4 ディリクレ級数の4分割

### 5･4･1 $\zeta(2)$ の4分割

リーマン･ゼータ級数 $\zeta(2)$ は次のようである。

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$

これの4分割は次のようになる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+1)^2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+2)^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{15^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+3)^2}$$

$$A_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+4)^2}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$A1[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(4r+1)^2} \quad A2[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(4r+2)^2} \quad A3[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(4r+3)^2} \quad A4[m\_] := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(4r+4)^2}$$

```
N[{A1[100 000], A2[100 000], A3[100 000], A4[100 000]},10]      N[Zeta[2], 10]
{ 1.074832447, 0.3084245125, 0.1588668530, 0.1028077542 }        1.644931567
N[A1[100 000] + A2[100 000] + A3[100 000] + A4[100 000], 10]     1.644934067
```

### ポリガンマ関数による表示

公式 5･1･1 (1.1') により、級数 $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ , $A_4$ の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+1)^2} = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{1}{4}\right) =: B_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+2)^2} = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{2}{4}\right) =: B_2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+3)^2} = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{3}{4}\right) =: B_3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+4)^2} = \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left(\frac{4}{4}\right) =: B_4$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\psi_{n\_}[z\_] := \mathrm{PolyGamma}[n, z]$$

$$B1 := \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left[\frac{1}{4}\right] \quad B2 := \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left[\frac{2}{4}\right] \quad B3 := \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left[\frac{3}{4}\right] \quad B4 := \frac{1}{4^2\,1!}\psi_1\left[\frac{4}{4}\right]$$

```
N[{B1, B2, B3, B4}, 10]                                         N[B1 + B2 + B3 + B4, 10]
{1.074833072, 0.3084251375, 0.1588674780, 0.1028083792 }        1.644934067
```

**$\pi$ と $\beta(2)$ による表示**

*MathWorld*（http://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html ）によれば

$$\psi_1\left(\frac{1}{4}\right)=\pi^4+8\beta(2)\ ,\ \psi_1\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2}\ ,\ \psi_1\left(\frac{3}{4}\right)=\pi^4-8\beta(2)\ ,\ \psi_1\left(\frac{4}{4}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

ここで、$\beta(z)$ はディリクレ・ベータ関数である。これらを上に代入すれば

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+1)^2}=\frac{\pi^4+8\beta(2)}{4^2\,1!}=:C_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+2)^2}=\frac{\pi^2}{2\times4^2\,1!}=:C_2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+3)^2}=\frac{\pi^4-8\beta(2)}{4^2\,1!}=:C_3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+4)^2}=\frac{\pi^2}{6\times4^2\,1!}=:C_4$$

$$C_1+C_1+C_1+C_1=\frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6}{4^2}+\frac{3}{4^2}+\frac{6}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)=\zeta(2)$$

### 5・4・2 $\lambda(2)$ の4分割

ディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(2)$ は次のようである。

$$\lambda(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}+\cdots$$

これの4分割は次のようになる。

$$A_1=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{25^2}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+1)^2}$$

$$A_2=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{27^2}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+3)^2}$$

$$A_3=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{29^2}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+5)^2}$$

$$A_4=\frac{1}{7^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{31^2}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+7)^2}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\mathrm{A1}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(8r+1)^2}\quad \mathrm{A2}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(8r+3)^2}\quad \mathrm{A3}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(8r+5)^2}\quad \mathrm{4}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(8r+7)^2}$$

```
N[{A1[200 000], A2[200 000], A3[200 000], A4[200 000]}, 10]
{1.021689507, 0.1275276974, 0.05314340895, 0.03133962434}
N[A1[200 000] + A2[200 000] + A3[200 000] + A4[200 000], 10]     1.233700238
                          N[DirichletLambda[2], 10]     1.233700550
```

積分表示

公式 5･1･2 (1.2″) により、級数 $A_1, A_2, A_3, A_4$ の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+1)^2}=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{1}{8}t}}{1-e^{-t}}dt=:B_1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+3)^2}=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{3}{8}t}}{1-e^{-t}}dt=:B_2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+5)^2}=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{5}{8}t}}{1-e^{-t}}dt=:B_3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+7)^2}=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{7}{8}t}}{1-e^{-t}}dt=:B_4$$

数式処理ソフト *Mathematica* による計算結果は次のとおり。

$$\text{B1} := \frac{1}{8^2\,1\,!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{1}{8}t}}{1-e^{-t}}\,dt \qquad \text{B2} := \frac{1}{8^2\,1\,!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{3}{8}t}}{1-e^{-t}}\,dt$$

$$\text{B3} := \frac{1}{8^2\,1\,!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{5}{8}t}}{1-e^{-t}}\,dt \qquad \text{B4} := \frac{1}{8^2\,1\,!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-\frac{7}{8}t}}{1-e^{-t}}\,dt$$

```
N[{B1, B2, B3, B4}, 10]
{1.021689585,0.1275277755,0.05314348708,0.03133970247}
```

```
N[B1 + B2 + B3 + B4, 10]
1.233700550
```

## 5･4･3 $\beta(2)$ の4分割

ディリクレ･ベータ級数 $\beta(2)$ (= 0.9159655941…) は次のように展開される。

$$\beta(2)=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}-\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}-+\cdots$$

これの4分割は次のようになる。

$$\beta(2)=A_1-A_2+A_3-A_4$$

ここで $A_1, A_2, A_3, A_4$ は 5･4･2 と同じものである。従って、

$$A_1=\ 1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{25^2}+\cdots=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-1t/8}}{1-e^{-t}}dt$$

$$A_2=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{27^2}+\cdots=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-3t/8}}{1-e^{-t}}dt$$

$$A_3=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{29^2}+\cdots=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-5t/8}}{1-e^{-t}}dt$$

$$A_4=\frac{1}{7^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{31^2}+\cdots=\frac{1}{8^2\,1!}\int_0^{\infty}\frac{t\,e^{-7t/8}}{1-e^{-t}}dt$$

## 5･5 ディリクレ級数の合成分割

**定義 5･5･0（合成分割）**

基本 $n$ 分割級数からより少ない $m$ 個の級数を合成することを **合成 $m$ 分割** と言う。

### 5･5･1 $\lambda(3)$ の合成2分割

前々節 5･3･2 によれば、ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(3)$ は次のように基本3分割された。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(6r+1)^3}$$

$$A_2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{21^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(6r+3)^3}$$

$$A_3 = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{23^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(6r+5)^3}$$

$$\lambda(3) = A_1 + A_2 + A_3$$

級数 $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ を組み合わせて2つの級数を構成するには、次の3通りの組合せがある。

$$A_1 + (A_2 + A_3) \quad , \quad A_2 + (A_1 + A_3) \quad , \quad A_3 + (A_1 + A_2)$$

これらを展開すると次のとおり。$\lambda(3) = a_1 + a_2$ と置けば、、

$A_1 + (A_2 + A_3)$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{31^3} + \cdots$$

$$a_2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} + \cdots$$

$A_2 + (A_1 + A_3)$

$$a_1 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{21^3} + \frac{1}{27^3} + \cdots$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} + \cdots$$

$A_3 + (A_1 + A_2)$

$$a_1 = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{23^3} + \frac{1}{29^3} + \cdots$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{15^3} + \cdots$$

これらの総和は、前々節 5･3･2 により次のように記述できる。

$A_1 + (A_2 + A_3)$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{31^3} + \cdots = \frac{182\zeta(3) + 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\, 2!}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} + \cdots = \frac{196\zeta(3) - 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\, 2!}$$

$A_2 + (A_1 + A_3)$

$$a_1 = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{21^3} + \frac{1}{27^3} + \cdots = \frac{14\zeta(3)}{6^3\,2!}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} + \cdots = \frac{2\times 182\zeta(3)}{6^3\,2!}$$

$A_3 + (A_1 + A_2)$

$$a_1 = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{23^3} + \frac{1}{29^3} + \cdots = \frac{182\zeta(3) - 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\,2!}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{15^3} + \cdots = \frac{196\zeta(3) + 4\sqrt{3}\pi^3}{6^3\,2!}$$

第3組を *Mathematica* で計算すれば次のとおり。

```
N[DirichletLambda[3], 10]          N[ζ3 = Zeta[3]]
1.051799790                        1.202056903
```

**A3+(A1+A2)**

$$\texttt{a1[m\_]} := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(6r+5)^3} \qquad \texttt{a2[m\_]} := \sum_{r=0}^{m} \left( \frac{1}{(6r+1)^3} + \frac{1}{(6r+3)^3} \right)$$

```
N[{a1[70000], a2[70000]}, 10]      N[a1[70000] + a2[70000], 10]
{0.009158727129, 1.042641063}      1.051799790
```

$$\texttt{c1} := \frac{182\,\zeta 3 - 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!} \qquad \texttt{c2} := \frac{196\,\zeta 3 + 4\sqrt{3}\,\pi^3}{6^3\,2!}$$

```
N[{c1, c2}, 10]                    N[c1 + c2, 10]
{0.009158727129, 1.042641063}      1.051799790
```

### 5･5･2 $\beta(2)$ の合成2分割

前節 5･4･3 によれば、ディリクレ・ベータ級数 $\beta(2)$ は次のように基本4分割された。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{25^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+1)^2}$$

$$A_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{27^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+3)^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{29^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+5)^2}$$

$$A_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{31^2} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+7)^2}$$

$$\beta(2) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

級数 $A_1, A_2, A_3, A_4$ を組み合わせて2つの級数を構成するには、次の7通りの組合せがある。

$A_1 + (-A_2 + A_3 - A_4)$ , $-A_2 + (A_1 + A_3 - A_4)$

$A_3 + (A_1 - A_2 - A_4)$ , $-A_4 + (A_1 - A_2 + A_3)$

$(A_1 - A_2) + (A_3 - A_4)$ , $(A_1 + A_3) - (A_2 + A_4)$ , $(A_1 - A_4) - (A_2 - A_3)$

$\beta(2) = a_1 + a_2$ のとき、これらを展開して 5・4・3 により各総和を積分表示すると次のとおり。

$A_1 + (-A_2 + A_3 - A_4)$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{41^2} + \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\,e^{-\frac{1}{8}t}}{1-e^{-t}}dt$$

$$a_2 = -\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{15^2} - + - \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(-e^{-\frac{3}{8}t} + e^{-\frac{5}{8}t} - e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$-A_2 + (A_1 + A_3 - A_4)$

$$a_1 = -\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{35^2} + \cdots\right) = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{-t\,e^{-\frac{3}{8}t}}{1-e^{-t}}dt$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{15^2} + + - \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t} + e^{-\frac{5}{8}t} - e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$A_3 + (A_1 - A_2 - A_4)$

$$a_1 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{21^2} + \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\,e^{-\frac{5}{8}t}}{1-e^{-t}}dt$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{15^2} + - - \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t} - e^{-\frac{3}{8}t} - e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$-A_4 + (A_1 - A_2 + A_3)$

$$a_1 = -\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{37^2} + \cdots\right) = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{-t\,e^{-\frac{7}{8}t}}{1-e^{-t}}dt$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + - + \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t} - e^{-\frac{3}{8}t} + e^{-\frac{5}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$(A_1 - A_2) + (A_3 - A_4)$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} + - \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t} - e^{-\frac{3}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$$\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} - \frac{1}{23^2} + - \cdots = \frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{5}{8}t} - e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$(A_1 + A_3) + (-A_2 - A_4)$

$$1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{21^2}+\cdots=\frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t}+e^{-\frac{5}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$$-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{11^2}-\frac{1}{15^2}-\frac{1}{19^2}-\cdots=\frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(-e^{-\frac{3}{8}t}-e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$(A_1 - A_4) + (-A_2 + A_3)$

$$1-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}-\frac{1}{23^2}+-\cdots=\frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t}-e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

$$-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}-\frac{1}{19^2}+\frac{1}{21^2}-+\cdots=\frac{1}{8^2 1!}\int_0^\infty \frac{t\left(-e^{-\frac{3}{8}t}+e^{-\frac{5}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}dt$$

第1組と第7組を *Mathematica* で計算すれば次のとおり。

```
N[DirichletBeta[2], 10]     0.9159655942
```

**A1 + (-A2 + A3 - A4)**

$$\texttt{a1[m\_]} := \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(8r+1)^2} \qquad \texttt{a2[m\_]} := \sum_{r=0}^{m} \left(-\frac{1}{(8r+3)^2}+\frac{1}{(8r+5)^2}-\frac{1}{(8r+7)^2}\right)$$

```
N[{a1[200000], a2[200000]}, 10]      N[a1[200000] + a2[200000], 10]
{1.021689507, -0.1057239128}          0.9159655942
```

$$\texttt{b1} := \frac{1}{8^2\,1!}\int_0^\infty \frac{t\,e^{-\frac{1}{8}t}}{1-e^{-t}}\,dt \qquad \texttt{b2} := \frac{1}{8^2\,1!}\int_0^\infty \frac{t\left(-e^{-\frac{3}{8}t}+e^{-\frac{5}{8}t}-e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}\,dt$$

```
N[{b1, b2}, 10]                  N[b1 + b2, 10]
{1.021689585, -0.1057239909}     0.9159655942
```

**(A1 - A4) + (-A2 + A3)**

$$\texttt{a1[m\_]} := \sum_{r=0}^{m} \left(\frac{1}{(8r+1)^2}-\frac{1}{(8r+7)^2}\right) \qquad \texttt{a2[m\_]} := \sum_{r=0}^{m} \left(-\frac{1}{(8r+3)^2}+\frac{1}{(8r+5)^2}\right)$$

```
N[{a1[200000], a2[200000]}, 10]      N[a1[200000] + a2[200000], 10]
{ 0.9903498826, -0.07438428843 }      0.9159655942
```

$$\texttt{b1} := \frac{1}{8^2\,1!}\int_0^\infty \frac{t\left(e^{-\frac{1}{8}t}-e^{-\frac{7}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}\,dt \qquad \texttt{b2} := \frac{1}{8^2\,1!}\int_0^\infty \frac{t\left(-e^{-\frac{3}{8}t}+e^{-\frac{5}{8}t}\right)}{1-e^{-t}}\,dt$$

```
N[{b1, b2}, 10]                      N[b1 + b2, 10]
{ 0.9903498826, -0.07438428843 }     0.9159655942
```

***Note***

　基本 $n$ 分割は無数に存在する。よってこれらの組み合わせである 合成 $m$ 分割（$m < n$）も無数に存在する。

### 5･6 マーダヴァ･ライプニッツ級数の合成2分割

マーダヴァ･ライプニッツ級数 $\beta(1)$ $(=\pi/4)$ は次のようである。

$$\beta(1)=1-\frac{1}{3^1}+\frac{1}{5^1}-\frac{1}{7^1}+\frac{1}{9^1}-\frac{1}{11^1}+\frac{1}{13^1}-\frac{1}{15^1}+\frac{1}{17^1}-+\cdots$$

これの4分割は

$$A_1=1+\frac{1}{9^1}+\frac{1}{17^1}+\frac{1}{25^1}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+1)^1}$$

$$A_2=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{11^1}+\frac{1}{19^1}+\frac{1}{27^1}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+3)^1}$$

$$A_3=\frac{1}{5^1}+\frac{1}{13^1}+\frac{1}{21^1}+\frac{1}{29^1}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+5)^1}$$

$$A_4=\frac{1}{7^1}+\frac{1}{15^1}+\frac{1}{23^1}+\frac{1}{31^1}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+7)^1}$$

$$\beta(1)=A_1-A_2+A_3-A_4$$

ここで級数 $A_1, A_2, A_3, A_4$ を組み合わせて2グループを作ると、次の7通りの組合せがある。

$$A_1+(-A_2+A_3-A_4)\quad,\quad -A_2+(A_1+A_3-A_4)$$

$$A_3+(A_1-A_2-A_4)\quad,\quad -A_4+(A_1-A_2+A_3)$$

$$(A_1-A_2)+(A_3-A_4)\quad,\quad (A_1+A_3)-(A_2+A_4)\quad,\quad (A_1-A_4)-(A_2-A_3)$$

しかしながら、これらの内、1個と3個の組は不可である。何故ならば、$A_1, A_2, A_3, A_4$ は発散級数だからである。そして $(A_1+A_3)-(A_2+A_4)$ もまた同じ理由で不可である。かくして可能な組み合わせは次の2組となる。これらの分割級数は全て交代級数であるから条件収束する。

分割1
$$\begin{cases} a_{11}=1-\dfrac{1}{7^1}+\dfrac{1}{9^1}-\dfrac{1}{15^1}+\dfrac{1}{17^1}-\dfrac{1}{23^1}+-\cdots & =A_1-A_4 \\ a_{12}=\dfrac{1}{3^1}-\dfrac{1}{5^1}+\dfrac{1}{11^1}-\dfrac{1}{13^1}+\dfrac{1}{19^1}-\dfrac{1}{21^1}+-\cdots & =A_2-A_3 \end{cases}$$

$$\beta(1)=a_{11}-a_{12}$$

分割2
$$\begin{cases} a_{21}=1-\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{1}{9^1}-\dfrac{1}{11^1}+\dfrac{1}{17^1}-\dfrac{1}{19^1}+-\cdots & =A_1-A_2 \\ a_{22}=\dfrac{1}{5^1}-\dfrac{1}{7^1}+\dfrac{1}{13^1}-\dfrac{1}{15^1}+\dfrac{1}{21^1}-\dfrac{1}{23^1}+-\cdots & =A_3-A_4 \end{cases}$$

$$\beta(1)=a_{21}+a_{22}$$

#### ポリガンマ関数による表示

これらの左辺はそれぞれ

分割1
$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{7^1}+\dfrac{1}{9^1}-\dfrac{1}{15^1}+\dfrac{1}{17^1}-\dfrac{1}{23^1}+-\cdots=\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8r+1)^1}-\frac{1}{(8r+7)^1}\right\} \\ \dfrac{1}{3^1}-\dfrac{1}{5^1}+\dfrac{1}{11^1}-\dfrac{1}{13^1}+\dfrac{1}{19^1}-\dfrac{1}{21^1}+-\cdots=\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8r+3)^1}-\frac{1}{(8r+5)^1}\right\} \end{cases}$$

分割2
$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{1}{9^1}-\dfrac{1}{11^1}+\dfrac{1}{17^1}-\dfrac{1}{19^1}+-\cdots = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8r+1)^1}-\frac{1}{(8r+3)^1}\right\} \\ \dfrac{1}{5^1}-\dfrac{1}{7^1}+\dfrac{1}{13^1}-\dfrac{1}{15^1}+\dfrac{1}{21^1}-\dfrac{1}{23^1}+-\cdots = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8r+5)^1}-\frac{1}{(8r+7)^1}\right\} \end{cases}$$

これらに 公式 5･1･2 (1.2') を強引に適用すれば次のようになる。

分割1
$$\begin{cases} a_{11} = -\dfrac{1}{8^1 0!}\left\{\psi_0\left(\dfrac{1}{8}\right)-\psi_0\left(\dfrac{7}{8}\right)\right\} \\ a_{12} = -\dfrac{1}{8^1 0!}\left\{\psi_0\left(\dfrac{3}{8}\right)-\psi_0\left(\dfrac{5}{8}\right)\right\} \end{cases}$$

$$\beta(1) = a_{11} - a_{12}$$

分割2
$$\begin{cases} a_{21} = -\dfrac{1}{8^1 0!}\left\{\psi_0\left(\dfrac{1}{8}\right)-\psi_0\left(\dfrac{3}{8}\right)\right\} \\ a_{22} = -\dfrac{1}{8^1 0!}\left\{\psi_0\left(\dfrac{5}{8}\right)-\psi_0\left(\dfrac{7}{8}\right)\right\} \end{cases}$$

$$\beta(1) = a_{21} + a_{22}$$

## ガウスのディガンマ定理による表示

ポリガンマ関数 $\psi_n(z)$ の内、特に $\psi_0(z)$ の特殊値はガウスにより次式で与えられている。
*MathWorld* ( http://mathworld.wolfram.com/GausssDigammaTheorem.html 参照。)

$$\psi_0\left(\frac{k}{m}\right) = -\gamma - \ln(2m) - \frac{\pi}{2}cot\left(\frac{k\pi}{m}\right) + 2\sum_{r=1}^{\lceil m/2\rceil -1} cos\left(\frac{2rk\pi}{m}\right)\ln\left[sin\frac{r\pi}{m}\right]$$

但し、$0 < k < m$ , $\gamma$ : Euler-Mascheroni constant

これより

$$\psi_0\left(\frac{1}{8}\right) = -\gamma - 4\ln 2 - \frac{\pi}{2}cot\frac{\pi}{8} + \sqrt{2}\ln tan\frac{\pi}{8}$$

$$\psi_0\left(\frac{3}{8}\right) = -\gamma - 4\ln 2 - \frac{\pi}{2}tan\frac{\pi}{8} - \sqrt{2}\ln tan\frac{\pi}{8}$$

$$\psi_0\left(\frac{5}{8}\right) = -\gamma - 4\ln 2 + \frac{\pi}{2}tan\frac{\pi}{8} - \sqrt{2}\ln tan\frac{\pi}{8}$$

$$\psi_0\left(\frac{7}{8}\right) = -\gamma - 4\ln 2 + \frac{\pi}{2}cot\frac{\pi}{8} + \sqrt{2}\ln tan\frac{\pi}{8}$$

これらを上に代入すれば、

分割1
$$\begin{cases} a_{11} = \dfrac{\pi}{8}cot\dfrac{\pi}{8} \\ a_{12} = \dfrac{\pi}{8}tan\dfrac{\pi}{8} \end{cases}$$

分割2
$$\begin{cases} a_{21} = \dfrac{\pi}{16}\left(cot\dfrac{\pi}{8} - tan\dfrac{\pi}{8}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln tan\dfrac{\pi}{8} \\ a_{22} = \dfrac{\pi}{16}\left(cot\dfrac{\pi}{8} - tan\dfrac{\pi}{8}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln tan\dfrac{\pi}{8} \end{cases}$$

更に、

$$cot\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}+1 \quad , \quad tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

であるから、

分割1
$$\begin{cases} a_{11}=1-\frac{1}{7^1}+\frac{1}{9^1}-\frac{1}{15^1}+\frac{1}{17^1}-\frac{1}{23^1}+-\cdots=\frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ a_{12}=\frac{1}{3^1}-\frac{1}{5^1}+\frac{1}{11^1}-\frac{1}{13^1}+\frac{1}{19^1}-\frac{1}{21^1}+-\cdots=\frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$$

$$\beta(1)=a_{11}-a_{12}$$

分割2
$$\begin{cases} a_{21}=1-\frac{1}{3^1}+\frac{1}{9^1}-\frac{1}{11^1}+\frac{1}{17^1}-\frac{1}{19^1}+-\cdots=\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \\ a_{22}=\frac{1}{5^1}-\frac{1}{7^1}+\frac{1}{13^1}-\frac{1}{15^1}+\frac{1}{21^1}-\frac{1}{23^1}+-\cdots=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$$

$$\beta(1)=a_{21}+a_{22}$$

これらの両辺を数式処理ソフト*Mathematica* で計算すると次のようになる。

```
N[DirichletBeta[2], 10]      0.7853981634      ψn[z_] := PolyGamma[n, z]
```

**(A1 - A4) - (A2 - A3)**

$$a1[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\left(\frac{1}{(8r+1)^1}-\frac{1}{(8r+7)^1}\right) \qquad a2[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\left(\frac{1}{(8r+3)^1}-\frac{1}{(8r+5)^1}\right)$$

```
N[{a1[1000000], a2[1000000]}, 10]      N[a1[1000000] - a2[1000000], 10]
{0.948059324, 0.1626611606}            0.7853981634
```

$$c1 := \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad c2 := \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

```
N[{c1, c2}, 10]                        N[c1 - c2, 10]
{0.948059449, 0.1626612856}            0.7853981634
```

**(A1 - A2) + (A3 - A4)**

$$a1[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\left(\frac{1}{(8r+1)^1}-\frac{1}{(8r+3)^1}\right) \qquad a2[m\_] := \sum_{r=0}^{m}\left(\frac{1}{(8r+5)^1}-\frac{1}{(8r+7)^1}\right)$$

```
N[{a1[1000000], a2[1000000]}, 10]      N[a1[1000000] + a2[1000000], 10]
{0.7043117018, 0.08108646163}          0.7853981634
```

$$c1 := \frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{Log}\left[\sqrt{2}-1\right] \qquad c2 := \frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{Log}\left[\sqrt{2}-1\right]$$

```
N[{c1, c2}, 10]                        N[c1 + c2, 10]
{0.7043117018, 0.08108646163}          0.7853981634
```

2019.01.14
2019.01.28 Added Sec.6
2019.02.13 Updated

Kano Kono

宇宙人の数学