6 ディリクレ級数の反射分割

前章ではディリクレ級数の基本分割とそれらを組み合わせた合成分割について述べた。合成分割の内には、次数に関わらず、分割級数の各総和が初等関数の特殊値で表されるものが存在する。しかもそれらの特殊値は、円周率 π を除けば、代数的解法によって得られる。

6・1 反射公式と反射分割

最初に 前章 の定義と公式をここに再掲する。次にポリガンマ関数に関する反射公式を述べ、最後にディリクレ級数の反射分割を定義する。

定義 6・1・0 (基本分割)(再掲)

被分割級数において 第 k 項($k=1,2,\cdots,m$)から $(m-1)$ 個飛ばしに項を選んで正項級数または負項級数 A_k $(k=1,2,\cdots m)$ を作成でるとき、我々はこれを **基本 *m* 分割**(あるいは単に ***m*** **分割**)と呼ぶ。

公式 6・1・1 (再掲)

$\zeta(n,z)$ をフルヴィッツ・ゼータ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、ディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(n)$ 及びその m 分割級数 A_k をそれぞれ次のようであるとする。

$$\lambda(n) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^n}$$

$$A_k = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2mr+2k-1)^n} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

すると、$k=1,2,\cdots,m$ について次式が成立する。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2mr+2k-1)^n} = \frac{1}{(2m)^n}\zeta\left(n,\frac{2k-1}{2m}\right) \tag{1.1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2m)^n(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{2k-1}{2m}\right) \tag{1.1'}$$

公式 6・1・2 (ポリガンマ関数の反射公式)

$\psi_n(z)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をポリガンマ関数とするとき、次式が成立する。

$$\psi_{2n-1}(z)+\psi_{2n-1}(1-z) = -\pi\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}cot(\pi z) \tag{1.2$_1$}$$

$$\psi_{2n-2}(z)-\psi_{2n-2}(1-z) = -\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z) \tag{1.2$_2$}$$

証明

MathWorld(http://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html)によれば、ポリガンマ関数の反射公式は次のようである。

$$\psi_n(1-z)+(-1)^{n+1}\psi_n(z) = (-1)^n\pi\frac{d^n}{dz^n}cot(\pi z)$$

両辺に $(-1)^{n+1}$ を乗じれば

$$\psi_n(z)+(-1)^{n+1}\psi_n(1-z) = -\pi\frac{d^n}{dz^n}cot(\pi z)$$

n を $2n-1$ に置換して (1.2_1) を得、n を $2n-2$ に置換して (1.2_2) を得る。

(1.2_1) , (1.2_2) についてそれぞれ最初の数個を書き下せば次のとおり。

(1.2_1)

$$\begin{aligned}
\psi_1(z)+\psi_1(1-z) &= \pi^2 csc^2(\pi z) \\
\psi_3(z)+\psi_3(1-z) &= \pi^4\left\{4cot^2(\pi z)csc^2(\pi z)+2csc^4(\pi z)\right\} \\
\psi_5(z)+\psi_5(1-z) &= \pi^6\left\{16cot^4(\pi z)csc^2(\pi z)+88cot^2(\pi z)csc^4(\pi z)\right. \\
&\qquad \left.+16csc^6(\pi z)\right\} \\
\psi_7(z)+\psi_7(1-z) &= \pi^8\left\{64cot^6(\pi z)csc^2(\pi z)+1824cot^4(\pi z)csc^4(\pi z)\right. \\
&\qquad \left.+2880cot^2(\pi z)csc^6(\pi z)+272csc^8(\pi z)\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(1.2_2)

$$\begin{aligned}
\psi_0(z)-\psi_0(1-z) &= -\pi^1 cot(\pi z) \\
\psi_2(z)-\psi_2(1-z) &= -2\pi^3 cot(\pi z)csc^2(\pi z) \\
\psi_4(z)-\psi_4(1-z) &= -\pi^5\left\{8cot^3(\pi z)csc^2(\pi z)+16cot(\pi z)csc^4(\pi z)\right\} \\
\psi_6(z)-\psi_6(1-z) &= -\pi^7\left\{32cot^5(\pi z)csc^2(\pi z)+416cot^3(\pi z)csc^4(\pi z)\right. \\
&\qquad \left.+272cot(\pi z)csc^6(\pi z)\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

なお、これらの係数はオンライン整数列大事典 (https://oeis.org) A008303 に存在する。

Note 1

前章 で見たように、n 次のディリクレ級数の総和は次の型で与えられた。

$$\frac{(-1)^n}{m^n(n-1)!}\left\{\psi_{n-1}\left(\frac{p}{m}\right)\pm\psi_{n-1}\left(\frac{q}{m}\right)\right\}$$

これらの内、$q=p-1$ であるものには、公式 6･1･2 が適用可能である。

そして、公式 6･1･2 の符号と次数を考慮すれば、次のようなことになる。

(1) (1.2_1) は偶数次の正項ディリクレ級数に適用可能である。

(2) (1.2_2) は奇数次の交代ディリクレ級数に適用可能である。

逆に言えば、奇数次の正項ディリクレ級数や偶数次の交代ディリクレ級数にはこの公式は適用出来ない。

Note 2

この公式の右辺は初等関数の多項式である。

ディリクレ級数の反射分割の定義

定義 6·1·3 (包括的定義)

定義 6·1·0 に従い、被分割級数において 第 k 項($k=1,2,\cdots,2m$)から $(2m-1)$ 個飛ばしに項を選んで正項級数または負項級数 A_k $(k=1,2,\cdots,2m)$ を作成せよ。すると、これらから構成さる合成 m 分割の内に、次のような **反射関係を満たす組み合わせ** が存在する。

$$(A_1+A_{2m}),\ (A_2+A_{2m-1}),\ \cdots,\ (A_k+A_{2m-k+1}),\ \cdots,\ (A_m+A_{2m-m+1})$$

このような合成分割を、特に **反射 m 分割** と呼ぶ。

Note

ここで、反射関係を満たす組み合わせとは (A_k+A_{2m-k+1}) において $k+(2m-k+1)=2m+1$ なる関係を言う。この定義による例は 第2節で示される。

反射分割は、少し限定的に、次のようにも定義できる。

定義 6·1·3' (限定的定義)

(1) ディリクレ·ラムダ級数 $\lambda(2n)$ が次のようであるとする。

$$\lambda(2n)=1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{9^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\frac{1}{13^{2n}}+\cdots$$

この級数が次のように分割されるとき、これを**ディリクレ·ラムダ級数の反射 m 分割** と言う。

$$a_k=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n}}+\frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n}}\right\}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=\lambda(2n)$$

(2) ディリクレ·ベータ級数 $\beta(2n-1)$ が次のようであるとする。

$$\beta(2n-1)=1-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-+\cdots$$

この級数が次のように分割されるとき、これを**ディリクレ·ベータ級数の反射 m 分割** と言う。

$$a_k=(-1)^{k-1}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n-1}}-\frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n-1}}\right\}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=\beta(2n-1)$$

定義 6·1·3'について、次の公式が成立する。

公式 6·1·4

定義 6·1·3'における反射分割級数 a_k の総和は次式で与えられる。

(1) ディリクレ·ラムダ級数 $\lambda(2n)$ のとき、

$$a_k=-\frac{\pi}{(4m)^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z)\Big|_{\frac{2k-1}{4m}}\qquad k=1,2,\cdots,m \tag{1.4$_1$}$$

(2) ディリクレ・ベータ級数 $\beta(2n-1)$ のとき

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}\pi}{(4m)^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\bigg|_{\frac{2k-1}{4m}} \qquad k=1,2,\cdots,m \tag{1.4$_2$}$$

証明

定義 6・1・3' における反射分割級数 a_k に公式 6・1・1 (1.1') を適用すると、

(1) ディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(2n)$ のとき、

$$a_k = \frac{1}{(4m)^{2n}(2n-1)!}\left\{\psi_{2n-1}\left(\frac{2k-1}{4m}\right)+\psi_{2n-1}\left(\frac{4m-2k+1}{4m}\right)\right\} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

公式 6・1・2 によれば、

$$\psi_{2n-1}(z)+\psi_{2n-1}(1-z) = -\pi\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z) \tag{1.2$_1$}$$

$z=(2k-1)/4m$ をこれに代入すれば

$$\psi_{2n-1}\left(\frac{2k-1}{4m}\right)+\psi_{2n-1}\left(\frac{4m-2k+1}{4m}\right) = -\pi\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z)\bigg|_{\frac{2k-1}{4m}}$$

これを上の右辺に代入して (1.4$_1$) を得る。

(2) ディリクレ・ベータ級数 $\beta(2n-1)$ のとき

(1) と同様の計算をして (1.4$_2$) を得る。

この公式より直ちに次の定理が従う。

定理 6・1・5

定義 6・1・3' における反射分割級数 a_k の総和は初等関数の特殊値である。

証明

初等関数の高階微分は初等関数である。よって(1.4$_1$) , (1.4$_2$) の右辺は初等関数の特殊値である。

6・2 ディリクレ級数の反射2分割

6・2・0 $\lambda(2n)$ の基本4分割

ディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(2n)$ は次のようである。

$$\lambda(2n) = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \frac{1}{13^{2n}} + \cdots$$

これの基本4分割は次のようになる。

$$A_1 = 1 + \frac{1}{9^{2n}} + \frac{1}{17^{2n}} + \frac{1}{25^{2n}} + \frac{1}{33^{2n}} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+1)^{2n}}$$

$$A_2 = \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \frac{1}{19^{2n}} + \frac{1}{27^{2n}} + \frac{1}{35^{2n}} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+3)^{2n}}$$

$$A_3 = \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{13^{2n}} + \frac{1}{21^{2n}} + \frac{1}{29^{2n}} + \frac{1}{37^{2n}} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+5)^{2n}}$$

$$A_4 = \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{15^{2n}} + \frac{1}{23^{2n}} + \frac{1}{31^{2n}} + \frac{1}{39^{2n}} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+7)^{2n}}$$

ポリガンマ関数による表示

公式 6・1・1 (1.1') により、級数 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+1)^{2n}} = \frac{1}{8^{2n}(2n-1)!}\psi_{2n-1}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$A_2 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+3)^{2n}} = \frac{1}{8^{2n}(2n-1)!}\psi_{2n-1}\left(\frac{3}{8}\right)$$

$$A_3 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+5)^{2n}} = \frac{1}{8^{2n}(2n-1)!}\psi_{2n-1}\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$A_4 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(8r+7)^{2n}} = \frac{1}{8^{2n}(2n-1)!}\psi_{2n-1}\left(\frac{7}{8}\right)$$

6・2・1 $\lambda(2n)$ の反射2分割

級数 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 を組み合わせて2つの級数を構成するには7通りの組合せがあるが、ここでは 添え字の合計が5となるような $(A_1 + A_4)$, $(A_2 + A_3)$ を 選ぶ。すると、

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \frac{1}{15^{2n}} + \frac{1}{17^{2n}} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(8r+1)^{2n}} + \frac{1}{(8r+7)^{2n}} \right\}$$

$$a_1 = \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \frac{1}{13^{2n}} + \frac{1}{19^{2n}} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(8r+3)^{2n}} + \frac{1}{(8r+5)^{2n}} \right\}$$

$$\lambda(2n) = a_1 + a_2$$

級数 a_1 , a_2 の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$1 + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} + \frac{1}{15^{2n}} + \frac{1}{17^{2n}} + \cdots = \frac{1}{8^{2n}(2n-1)!}\left\{ \psi_{2n-1}\left(\frac{1}{8}\right) + \psi_{2n-1}\left(\frac{7}{8}\right) \right\}$$

$$\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \frac{1}{13^{2n}} + \frac{1}{19^{2n}} + \cdots = \frac{1}{8^{2n}(2n-1)!}\left\{ \psi_{2n-1}\left(\frac{3}{8}\right) + \psi_{2n-1}\left(\frac{5}{8}\right) \right\}$$

これらの右辺はそれぞれ 公式 6·1·2 (1.2_1) の要件を満たしていることが分かる。即ち

$$\psi_{2n-1}(z)+\psi_{2n-1}(1-z) = -\pi \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z) \tag{1.2_1}$$

これに $z=1/8$, $3/8$ をそれぞれ代入すると

$$\psi_{2n-1}\left(\frac{1}{8}\right)+\psi_{2n-1}\left(\frac{7}{8}\right) = -\pi \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z)\bigg|_{1/8}$$

$$\psi_{2n-1}\left(\frac{3}{8}\right)+\psi_{2n-1}\left(\frac{5}{8}\right) = -\pi \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z)\bigg|_{3/8}$$

これらを上に代入して、ディリクレ·ラムダ級数 $\lambda(2n)$ の反射2分割の一般式を得る。

$$1+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{9^{2n}}+\frac{1}{15^{2n}}+\frac{1}{17^{2n}}+\cdots = -\frac{\pi}{8^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z)\bigg|_{1/8}$$

$$\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\frac{1}{13^{2n}}+\frac{1}{19^{2n}}+\cdots = -\frac{\pi}{8^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\cot(\pi z)\bigg|_{3/8}$$

例 $n=2$

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{17^4}+\cdots &= -\frac{\pi}{8^4 3!}\frac{d^3}{dz^3}\cot(\pi z)\bigg|_{1/8}\\ &= \frac{\pi^4\left\{4\cot^2(\pi z)\csc^2(\pi z)+2\csc^4(\pi z)\right\}}{8^4 3!}\bigg|_{1/8}\\ &= \frac{\pi^4}{8^4 3!}\left\{4\cot^2\frac{\pi}{8}\csc^2\frac{\pi}{8}+2\csc^4\frac{\pi}{8}\right\}\\ &= \frac{\pi^4}{8^4 3!}\left\{4\left(\sqrt{2}+1\right)^2\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^4\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{19^4}+\cdots &= -\frac{\pi}{8^4 3!}\frac{d^3}{dz^3}\cot(\pi z)\bigg|_{3/8}\\ &= \frac{\pi^4\left\{4\cot^2(\pi z)\csc^2(\pi z)+2\csc^4(\pi z)\right\}}{8^4 3!}\bigg|_{3/8}\\ &= \frac{\pi^4}{8^4 3!}\left\{4\cot^2\frac{3\pi}{8}\csc^2\frac{3\pi}{8}+2\csc^4\frac{3\pi}{8}\right\}\\ &= \frac{\pi^4}{8^4 3!}\left\{4\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^4\right\}\end{aligned}$$

即ち

$$a_1 = 1+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{17^4}+\cdots = \frac{\pi^4\left(16+11\sqrt{2}\right)}{3072} = 1.000610446\cdots$$

$$a_2 = \frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{19^4}+\cdots = \frac{\pi^4\left(16-11\sqrt{2}\right)}{3072} = 0.01406758545\cdots$$

$$a_1+a_2 = \frac{\pi^4\left(16+11\sqrt{2}\right)}{3072}+\frac{\pi^4\left(16-11\sqrt{2}\right)}{3072} = \frac{\pi^4}{96} = \lambda(4) = 1.014678031\cdots$$

6·2·2 $\boldsymbol{\beta(2n-1)}$ の反射2分割

ディリクレ・ベータ級数 $\beta(2n-1)$ は次のようである。

$$\beta(2n-1)=1-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-+\cdots$$

これの基本4分割は次のようになる。

$$A_1=\ 1+\frac{1}{9^{2n-1}}+\frac{1}{17^{2n-1}}+\frac{1}{25^{2n-1}}+\frac{1}{33^{2n-1}}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+1)^{2n-1}}$$

$$A_2=-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{19^{2n-1}}+\frac{1}{27^{2n-1}}+\frac{1}{35^{2n-1}}+\cdots\right)=-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+3)^{2n-1}}$$

$$A_3=\frac{1}{5^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}+\frac{1}{21^{2n-1}}+\frac{1}{29^{2n-1}}+\frac{1}{37^{2n-1}}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+5)^{2n-1}}$$

$$A_4=-\left(\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{15^{2n-1}}+\frac{1}{23^{2n-1}}+\frac{1}{31^{2n-1}}+\frac{1}{39^{2n-1}}+\cdots\right)=-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+7)^{2n-1}}$$

ポリガンマ関数による表示

公式 6·1·1 (1.1') により、級数 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$A_1=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+1)^{2n-1}}=-\frac{1}{8^{2n-1}(2n-2)!}\psi_{2n-2}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$A_2=-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+3)^{2n-1}}=\frac{1}{8^{2n-1}(2n-2)!}\psi_{2n-2}\left(\frac{3}{8}\right)$$

$$A_3=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+5)^{2n-1}}=-\frac{1}{8^{2n-1}(2n-2)!}\psi_{2n-2}\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$A_4=-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(8r+7)^{2n-1}}=\frac{1}{8^{2n-1}(2n-2)!}\psi_{2n-2}\left(\frac{7}{8}\right)$$

$\boldsymbol{\beta(2n-1)}$ の反射2分割

級数 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 を組み合わせて2つの級数を構成するには7通りの組合せがあるが、ここでは 添え字の合計が5となるような $\left(A_1+A_4\right)$, $\left(A_2+A_3\right)$ を 選ぶ。すると、

$$a_1=\ 1-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{15^{2n-1}}+\frac{1}{17^{2n-1}}-\frac{1}{23^{2n-1}}+\frac{1}{25^{2n-1}}-+\cdots$$

$$a_2=-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{5^{2n-1}}+\frac{1}{11^{2n-1}}-\frac{1}{13^{2n-1}}+\frac{1}{19^{2n-1}}-\frac{1}{21^{2n-1}}+-\cdots\right)$$

$$\beta(2n-1)=a_1+a_2$$

級数 a_1 , a_2 の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$1-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{15^{2n-1}}+-\cdots=-\frac{1}{8^{2n-1}(2n-2)!}\left\{\psi_{2n-2}\left(\frac{1}{8}\right)-\psi_{2n-2}\left(\frac{7}{8}\right)\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{5^{2n-1}}+\frac{1}{11^{2n-1}}-\frac{1}{13^{2n-1}}+-\cdots\right)=\frac{1}{8^{2n-1}(2n-2)!}\left\{\psi_{2n-2}\left(\frac{3}{8}\right)-\psi_{2n-2}\left(\frac{5}{8}\right)\right\}$$

これらの右辺はそれぞれ 公式 6･1･2 (1.2_2) の要件を満たしていることが分かる。即ち

$$\psi_{2n-2}(z)-\psi_{2n-2}(1-z)=-\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z) \tag{1.2$_2$}$$

これに $z=1/8$, $3/8$ をそれぞれ代入すると

$$\psi_{2n-2}\left(\frac{1}{8}\right)-\psi_{2n-2}\left(\frac{7}{8}\right)=-\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\Bigg|_{1/8}$$

$$\psi_{2n-2}\left(\frac{3}{8}\right)-\psi_{2n-2}\left(\frac{5}{8}\right)=-\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\Bigg|_{3/8}$$

これらを上に代入して、ディリクレ･ベータ級数 $\beta(2n-1)$ の反射2分割の一般式を得る。

$$1-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}-\frac{1}{15^{2n-1}}+-\cdots=\frac{\pi}{8^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\Bigg|_{1/8}$$

$$-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{5^{2n-1}}+\frac{1}{11^{2n-1}}-\frac{1}{13^{2n-1}}+-\cdots\right)=-\frac{\pi}{8^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\Bigg|_{3/8}$$

例 $n=3$

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{15^5}+\frac{1}{17^5}-\frac{1}{23^5}+-\cdots&=\frac{\pi}{8^5 4!}\frac{d^4}{dz^4}\cot(\pi z)\Bigg|_{1/8}\\&=\frac{\pi^5\{8\cot^3(\pi z)\csc^2(\pi z)+16\cot(\pi z)\csc^4(\pi z)\}}{8^5 4!}\Bigg|_{1/8}\\&=\frac{\pi^5}{8^5 4!}\left\{8\cot^3\frac{\pi}{8}\csc^2\frac{\pi}{8}+16\cot\frac{\pi}{8}\csc^4\frac{\pi}{8}\right\}\\&=\frac{\pi^5}{8^5 4!}\left\{8(\sqrt{2}+1)^3\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+16(\sqrt{2}+1)\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^4\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{1}{11^5}-\frac{1}{13^5}+\frac{1}{19^5}-\frac{1}{21^5}+-\cdots\right)&=-\frac{\pi}{8^5 4!}\frac{d^4}{dz^4}\cot(\pi z)\Bigg|_{3/8}\\&=-\frac{\pi^5\{8\cot^3(\pi z)\csc^2(\pi z)+16\cot(\pi z)\csc^4(\pi z)\}}{8^5 4!}\Bigg|_{3/8}\\&=-\frac{\pi^5}{8^5 4!}\left\{8\cot^3\frac{3\pi}{8}\csc^2\frac{3\pi}{8}+16\cot\frac{3\pi}{8}\csc^4\frac{3\pi}{8}\right\}\\&=-\frac{\pi^5}{8^5 4!}\left\{8(\sqrt{2}-1)^3\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^2+16(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^4\right\}\end{aligned}$$

即ち

$$a_1=1-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{15^5}+\frac{1}{17^5}-\frac{1}{23^5}+-\cdots=\frac{\pi^5(80+57\sqrt{2})}{49152}$$

$$a_2=-\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{1}{11^5}-\frac{1}{13^5}+\frac{1}{19^5}-\frac{1}{21^5}+-\cdots\right)=\frac{\pi^5(80-57\sqrt{2})}{49152}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{\pi^5\left(80+57\sqrt{2}\right)}{49152} + \frac{\pi^5\left(80-57\sqrt{2}\right)}{49152} = \frac{5\pi^5}{1536} = \beta(5)$$

$$= 0.9999567572\cdots - 0.003798929159\cdots = 0.9961578280\cdots$$

6・3 ディリクレ級数の反射3分割

ディリクレ級数は反射奇数分割も可能である。本節ではその一例としてディリクレ・ベータ級数の反射3分割を取り上げる。

6・3・1 $\beta(2n-1)$ の反射3分割

定義 6・1・3' (2) より

$$a_k = (-1)^{k-1}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n-1}} - \frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n-1}}\right\} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

$m=3$ と置けば、

$$a_1 = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(12r+1)^{2n-1}} - \frac{1}{(12r+11)^{2n-1}}\right\}$$

$$a_2 = -\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(12r+3)^{2n-1}} - \frac{1}{(12r+9)^{2n-1}}\right\}$$

$$a_3 = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(12r+5)^{2n-1}} - \frac{1}{(12r+7)^{2n-1}}\right\}$$

展開すれば、

$$a_1 = 1 - \frac{1}{11^{2n-1}} + \frac{1}{13^{2n-1}} - \frac{1}{23^{2n-1}} + \frac{1}{25^{2n-1}} - \frac{1}{35^{2n-1}} +-\cdots$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{9^{2n-1}} + \frac{1}{15^{2n-1}} - \frac{1}{21^{2n-1}} + \frac{1}{27^{2n-1}} - \frac{1}{33^{2n-1}} +-\cdots\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{5^{2n-1}} - \frac{1}{7^{2n-1}} + \frac{1}{17^{2n-1}} - \frac{1}{19^{2n-1}} + \frac{1}{29^{2n-1}} - \frac{1}{31^{2n-1}} +-\cdots$$

$$\beta(2n-1) = a_1 + a_2 + a_3$$

公式 6・1・1 (1.1') により、級数 a_1 , a_2 , a_3 の総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$a_1 = -\frac{1}{12^{2n-1}(2n-2)!}\left\{\psi_{2n-2}\left(\frac{1}{12}\right) - \psi_{2n-2}\left(\frac{11}{12}\right)\right\}$$

$$a_2 = \frac{1}{12^{2n-1}(2n-2)!}\left\{\psi_{2n-2}\left(\frac{3}{12}\right) - \psi_{2n-2}\left(\frac{9}{12}\right)\right\}$$

$$a_3 = -\frac{1}{12^{2n-1}(2n-2)!}\left\{\psi_{2n-2}\left(\frac{5}{12}\right) - \psi_{2n-2}\left(\frac{7}{12}\right)\right\}$$

これらの右辺はそれぞれ 公式 6・1・2 (1.2_2) の要件を満たしていることが分かる。即ち

$$\psi_{2n-2}(z) - \psi_{2n-2}(1-z) = -\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z) \qquad (1.2_2)$$

これに $z=1/12$, $3/12$, $5/12$ をそれぞれ代入すると

$$\psi_{2n-2}\left(\frac{1}{12}\right) - \psi_{2n-2}\left(\frac{11}{12}\right) = -\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\bigg|_{1/12}$$

$$\psi_{2n-2}\left(\frac{3}{12}\right) - \psi_{2n-2}\left(\frac{9}{12}\right) = -\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\cot(\pi z)\bigg|_{3/12}$$

$$\psi_{2n-2}\left(\frac{5}{12}\right)-\psi_{2n-2}\left(\frac{7}{12}\right)=-\pi\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{5/12}$$

これらを 上 に代入して、ディリクレ・ベータ級数 $\beta(2n-1)$ の反射3分割の一般式を得る。

$$1-\frac{1}{11^{2n-1}}+\frac{1}{13^{2n-1}}-\frac{1}{23^{2n-1}}+\frac{1}{25^{2n-1}}+-\cdots=-\frac{\pi}{12^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{1/12}$$

$$-\left(\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{9^{2n-1}}+\frac{1}{15^{2n-1}}-\frac{1}{21^{2n-1}}+-\cdots\right)=\frac{\pi}{12^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{3/12}$$

$$\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\frac{1}{17^{2n-1}}-\frac{1}{19^{2n-1}}+-\cdots=-\frac{\pi}{12^{2n-1}(2n-2)!}\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}cot(\pi z)\Bigg|_{5/12}$$

例 n=3

$$1-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}-\frac{1}{23^5}+\frac{1}{25^5}-\frac{1}{35^5}+-\cdots=-\frac{\pi}{12^7 4!}\frac{d^4}{dz^4}cot(\pi z)\Bigg|_{1/12}$$

$$-\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{9^5}+\frac{1}{15^5}-\frac{1}{21^5}+\frac{1}{27^5}-\frac{1}{33^5}+-\cdots\right)=\frac{\pi}{12^7 4!}\frac{d^4}{dz^4}cot(\pi z)\Bigg|_{3/12}$$

$$\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{17^5}-\frac{1}{19^5}+\frac{1}{29^5}-\frac{1}{31^5}+-\cdots=-\frac{\pi}{12^7 4!}\frac{d^4}{dz^4}cot(\pi z)\Bigg|_{5/12}$$

前節 と同様に計算すると

$$1-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}-\frac{1}{23^5}+\frac{1}{25^5}-\frac{1}{35^5}+-\cdots=\frac{\pi^5(305+176\sqrt{3})}{186624}$$

$$-\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{9^5}+\frac{1}{15^5}-\frac{1}{21^5}+\frac{1}{27^5}-\frac{1}{33^5}+-\cdots\right)=-\frac{5\pi^5}{373248}$$

$$\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{17^5}-\frac{1}{19^5}+\frac{1}{29^5}-\frac{1}{31^5}+-\cdots=\frac{\pi^5(305-176\sqrt{3})}{186624}$$

$$\frac{\pi^5(305+176\sqrt{3})}{186624}-\frac{5\pi^5}{373248}+\frac{\pi^5(305-176\sqrt{3})}{186624}=\frac{5\pi^5}{1536}=\beta(5)$$

合成反射2分割

かくて上記 a_1, a_2, a_3 は全て初等関数の特殊値である。そこでこれらより $\beta(5)$ の2分割級数を合成すると、(a_1, a_2+a_3), (a_2, a_1+a_3), (a_3, a_1+a_2) の3組が出来る。これらの級数の総和はもちろん初等関数の特殊値である。そしてこれらは前節の反射2分割級数とも異なっている。即ち、4組の反射2分割級数が出来たことになる。このような演算を基本8分割以上の級数についても行えば、無限個の反射2分割級数が得られることになる。

合成反射分割の無限性

同様にして 無限個の反射 m 分割級数 ($m=3,4,5,\cdots$) が得られることになる。

6・4 反射分割の代数的可解性

ポリガンマ関数に関する反射公式を満たす分割級数の各総和は、円周率 π を除けば、代数的解法により得られる。本節ではそれを証明しかつ例示する。

6・4・1 三角関数の反射公式

公式 6・4・1 (三角関数の反射公式)

自然数 n および $k=1,2,3,\cdots,n-1$ について次式が成り立つ。

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}-(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\} \tag{4.1c}$$

$$\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2i}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\} \tag{4.1s}$$

証明

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\quad,\quad\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$z=k\pi/n$ を代入すると

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{k\pi i}{n}}+e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right)\quad,\quad\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{k\pi i}{n}}-e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right)$$

ここで $e^{\pi i}=-1$ であるから

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{-\frac{k}{n}}\right\}\quad,\quad\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2i}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}-(-1)^{-\frac{k}{n}}\right\}$$

さらに、

$$(-1)^{-\frac{k}{n}}=-(-1)^1(-1)^{-\frac{k}{n}}=-(-1)^{1-\frac{k}{n}}$$

であるから、これを上に代入して

$$\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}-(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\}\quad,\quad\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2i}\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\}$$

例　$\cos 2\pi/7$, $\sin 2\pi/7$

```
N[{Cos[2π/7], 1/2 ((-1)^(2/7) - (-1)^(5/7))}, 8]
{0.62348980 , 0.62348980 + 0 × 10^-10 ⅈ}
```

```
N[{Sin[2π/7], 1/(2ⅈ) ((-1)^(2/7) + (-1)^(5/7))}, 8]
{0.78183148 , 0.78183148 + 0 × 10^-10 ⅈ}
```

系 6・4・1

自然数 n および $k=1,2,3,\cdots,n-1$ について次式が成り立つ。

$$\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{i\left\{(-1)^{\frac{k}{n}}-(-1)^{1-\frac{k}{n}}\right\}}{(-1)^{\frac{k}{n}}+(-1)^{1-\frac{k}{n}}}$$

$$csc\frac{k\pi}{n} = \frac{2i}{(-1)^{\frac{k}{n}} + (-1)^{1-\frac{k}{n}}}$$

6･4･2 反射分割の代数的可解性

系 6･4･1 を用いれば、反射分割級数の各総和が π を除いて開冪と四則演算のみで表わされることを証明できる。

定理 6･4･2 (代数的可解性)

定義 6･1･3'における反射分割級数 a_k $k=1,2,\cdots,m$ の総和は、π を除いて、開冪と四則演算のみで表わされる。

証明

公式 6･1･4 によれば、定義 6･1･3'の a_k は次で与えられた。

(1) ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2n)$ のとき、

$$a_k = -\frac{\pi}{(4m)^{2n}(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}cot(\pi z)\Bigg|_{\frac{2k-1}{4m}} \qquad k=1,2,\cdots,m \tag{1.4$_1$}$$

公式 6･1･2 の計算例で見たように、この高階微係数は $cot\frac{(2k-1)\pi}{4m}$ と $csc\frac{(2k-1)\pi}{4m}$ の多項式となる。すると 系 6･4･1 により、これは (-1) の冪根と四則演算のみによって表わされる。

(2) ディリクレ･ベータ級数 $\beta(2n-1)$ のとき

(1) と同様の理由により、a_k は π は除いて (-1) の冪根と四則演算のみによって表わされる。

Q. E. D.

Remark

確かにこれは代数的演算である。そもそも $(-1)^{1/n}, (-1)^{2/n}, \cdots, (-1)^{(n-1)/n}$ はガウス平面上に描かれた単位半円の n 等分点である。即ち、これらは方程式 $z^n+1=0$ の解である。5次以上の代数方程式は一般に代数的には解けないが、このような円分方程式は代数的に解けることが **ガウス** により証明されている。

例 $\beta(3)$ の反射7分割

定義 6･1･3'(2) より、ディリクレ･ベータ級数 $\beta(3)$ とその反射7分割は次のようになる。

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} -+\cdots$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{27^3} + \frac{1}{29^3} - \frac{1}{55^3} + \frac{1}{57^3} - \frac{1}{83^3} +-\cdots$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{25^3} + \frac{1}{31^3} - \frac{1}{53^3} + \frac{1}{59^3} - \frac{1}{81^3} +-\cdots\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{5^3} - \frac{1}{23^3} + \frac{1}{33^3} - \frac{1}{51^3} + \frac{1}{61^3} - \frac{1}{79^3} +-\cdots$$

$$a_4 = -\left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{21^3} + \frac{1}{35^3} - \frac{1}{49^3} + \frac{1}{63^3} - \frac{1}{77^3} + - \cdots\right)$$

$$a_5 = \frac{1}{9^3} - \frac{1}{19^3} + \frac{1}{37^3} - \frac{1}{47^3} + \frac{1}{65^3} - \frac{1}{75^3} + - \cdots$$

$$a_6 = -\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{39^3} - \frac{1}{45^3} + \frac{1}{67^3} - \frac{1}{73^3} + - \cdots\right)$$

$$a_7 = \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{41^3} - \frac{1}{43^3} + \frac{1}{69^3} - \frac{1}{71^3} + - \cdots$$

$$\beta(3) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7$$

公式 6･1･1 (1.1') により、級数 a_1 , a_2 , a_3 , … , a_7 の各総和はそれぞれ次式で与えられる。

$$a_1 = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(28r+1)^3} - \frac{1}{(28r+27)^3}\right\} = -\frac{1}{28^3 2!}\left\{\psi_2\left(\frac{1}{28}\right) - \psi_2\left(\frac{27}{28}\right)\right\}$$

$$a_2 = -\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(28r+3)^3} - \frac{1}{(28r+25)^3}\right\} = \frac{1}{28^3 2!}\left\{\psi_2\left(\frac{3}{28}\right) - \psi_2\left(\frac{25}{28}\right)\right\}$$

⋮

$$a_6 = -\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(28r+11)^3} - \frac{1}{(28r+17)^3}\right\} = \frac{1}{28^3 2!}\left\{\psi_2\left(\frac{11}{28}\right) - \psi_2\left(\frac{17}{28}\right)\right\}$$

$$a_7 = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(28r+13)^3} - \frac{1}{(28r+15)^3}\right\} = -\frac{1}{28^3 2!}\left\{\psi_2\left(\frac{13}{28}\right) - \psi_2\left(\frac{15}{28}\right)\right\}$$

これらの右辺はそれぞれ 公式 6･1･2 (1.2_2) の要件を満たしていることが分かる。即ち

$$\psi_{2n-2}(z) - \psi_{2n-2}(1-z) = -\pi \frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}} cot(\pi z) \qquad (1.2_2)$$

これに z=1/28 , 3/28 , 5/28 , … , 13/28 をそれぞれ代入すると

$$1 - \frac{1}{27^3} + \frac{1}{29^3} - \frac{1}{55^3} + \frac{1}{57^3} - \frac{1}{83^3} + - \cdots = \frac{\pi}{28^3 2!} \frac{d^2}{dz^2} cot(\pi z) \Big|_{1/28}$$

$$-\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{25^3} + \frac{1}{31^3} - \frac{1}{53^3} + \frac{1}{59^3} - \frac{1}{81^3} + - \cdots\right) = -\frac{\pi}{28^3 2!} \frac{d^2}{dz^2} cot(\pi z) \Big|_{3/28}$$

⋮

$$-\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{39^3} - \frac{1}{45^3} + \frac{1}{67^3} - \frac{1}{73^3} + - \cdots\right) = -\frac{\pi}{28^3 2!} \frac{d^2}{dz^2} cot(\pi z) \Big|_{11/28}$$

$$\frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{41^3} - \frac{1}{43^3} + \frac{1}{69^3} - \frac{1}{71^3} + - \cdots = \frac{\pi}{28^3 2!} \frac{d^2}{dz^2} cot(\pi z) \Big|_{13/28}$$

これらの右辺を計算すると

$$1 - \frac{1}{27^3} + \frac{1}{29^3} - \frac{1}{55^3} + \frac{1}{57^3} - \frac{1}{83^3} + - \cdots = \frac{\pi^3}{28^3 2!}\left\{2cot\frac{\pi}{28} csc^2\frac{\pi}{28}\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{25^3} + \frac{1}{31^3} - \frac{1}{53^3} + \frac{1}{59^3} - \frac{1}{81^3} + - \cdots\right) = -\frac{\pi^3}{28^3 2!}\left\{2cot\frac{3\pi}{28} csc^2\frac{3\pi}{28}\right\}$$

⋮

$$-\left(\frac{1}{11^3}-\frac{1}{17^3}+\frac{1}{39^3}-\frac{1}{45^3}+\frac{1}{67^3}-\frac{1}{73^3}+-\cdots\right)=-\frac{\pi^3}{28^3 2!}\left\{2\cot\frac{11\pi}{28}\csc^2\frac{11\pi}{28}\right\}$$

$$\frac{1}{13^3}-\frac{1}{15^3}+\frac{1}{41^3}-\frac{1}{43^3}+\frac{1}{69^3}-\frac{1}{71^3}+-\cdots=\frac{\pi^3}{28^3 2!}\left\{2\cot\frac{13\pi}{28}\csc^2\frac{13\pi}{28}\right\}$$

これらに 系 6•4•1 を適用すれば、次を得る。

$$1-\frac{1}{27^3}+\frac{1}{29^3}-\frac{1}{55^3}+\frac{1}{57^3}-\frac{1}{83^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{1}{28}}-(-1)^{\frac{27}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{1}{28}}+(-1)^{\frac{27}{28}}\right\}^3}$$

$$-\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{25^3}+\frac{1}{31^3}-\frac{1}{53^3}+\frac{1}{59^3}-\frac{1}{81^3}+-\cdots\right)=\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{3}{28}}-(-1)^{\frac{25}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{3}{28}}+(-1)^{\frac{25}{28}}\right\}^3}$$

$$\frac{1}{5^3}-\frac{1}{23^3}+\frac{1}{33^3}-\frac{1}{51^3}+\frac{1}{61^3}-\frac{1}{79^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{5}{28}}-(-1)^{\frac{23}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{5}{28}}+(-1)^{\frac{23}{28}}\right\}^3}$$

$$-\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{21^3}+\frac{1}{35^3}-\frac{1}{49^3}+\frac{1}{63^3}-\frac{1}{77^3}+-\cdots\right)=\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{7}{28}}-(-1)^{\frac{21}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{7}{28}}+(-1)^{\frac{21}{28}}\right\}^3}$$

$$\frac{1}{9^3}-\frac{1}{19^3}+\frac{1}{37^3}-\frac{1}{47^3}+\frac{1}{65^3}-\frac{1}{75^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{9}{28}}-(-1)^{\frac{19}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{9}{28}}+(-1)^{\frac{19}{28}}\right\}^3}$$

$$-\left(\frac{1}{11^3}-\frac{1}{17^3}+\frac{1}{39^3}-\frac{1}{45^3}+\frac{1}{67^3}-\frac{1}{73^3}+-\cdots\right)=\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{11}{28}}-(-1)^{\frac{17}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{11}{28}}+(-1)^{\frac{17}{28}}\right\}^3}$$

$$\frac{1}{13^3}-\frac{1}{15^3}+\frac{1}{41^3}-\frac{1}{43^3}+\frac{1}{69^3}-\frac{1}{71^3}+-\cdots=-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left\{(-1)^{\frac{13}{28}}-(-1)^{\frac{15}{28}}\right\}}{\left\{(-1)^{\frac{13}{28}}+(-1)^{\frac{15}{28}}\right\}^3}$$

数式処理ソフト *Mathematica* による第1と第2の級数の計算結果は次のとおり。

$$\mathrm{a1}[m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{1}{(28r+1)^3}-\frac{1}{(28r+27)^3}\right)$$

N[a1[10000], 10]

0.9999893925

$$\mathrm{N}\left[-\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left((-1)^{\frac{1}{28}}-(-1)^{\frac{27}{28}}\right)}{\left((-1)^{\frac{1}{28}}+(-1)^{\frac{27}{28}}\right)^3},\ 10\right]$$

$0.9999893925+0\times10^{-12}\,i$

$$\mathrm{a2}[m\_]:=-\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{1}{(28r+3)^3}-\frac{1}{(28r+25)^3}\right)$$

N[a2[10000], 10]

-0.03700417387

$$\mathrm{N}\left[\frac{2^2\pi^3}{28^3}\frac{i\left((-1)^{\frac{3}{28}}-(-1)^{\frac{25}{28}}\right)}{\left((-1)^{\frac{3}{28}}+(-1)^{\frac{25}{28}}\right)^3},\ 10\right]$$

$-0.03700417387+0\times10^{-14}\,i$

6・5 ディリクレ級数の反射 $m2^n$ 分割

反射分割の内、特に $m2^n$ 分割級数の各総和は m や 2 の多重根号とそれらの四則演算により表される。本節ではそれを証明しかつ例示する。

公式 6・5・1

T_n を第1種チェビシェフ多項式とするとき、自然数 m, k について次式が成り立つ。

$$cos\frac{(2k-1)\pi}{m} = T_{2k-1}\left(cos\frac{\pi}{m}\right) \tag{5.1c}$$

$$sin\frac{(2k-1)\pi}{m} = (-1)^{k-1}T_{2k-1}\left(sin\frac{\pi}{m}\right) \tag{5.1s}$$

証明

http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html によれば、三角関数に関する多倍角公式は第1種チェビチェフ多項式を用いて次のように表される。

$$cos\,nx = T_n(cos\,x)$$

$$sin\,nx = (-1)^{(n-1)/2}\,T_n(sin\,x) \qquad for\ n\ odd$$

これらに $n=2k-1$, $x=\pi/m$ を代入して与式を得る。

例

$$sin\frac{5\pi}{32} = (-1)^{3-1}T_{2\cdot3-1}\left(sin\frac{\pi}{32}\right) = 5\,sin\frac{\pi}{32} - 20\,sin^3\frac{\pi}{32} + 16\,sin^5\frac{\pi}{32}$$

公式 6・5・2

自然数 n について次式が成り立つ。

$$\begin{cases} cos\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ sin\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases} \quad (n-1)\text{-}nests \tag{5.2$_2$}$$

$$\begin{cases} cos\dfrac{\pi}{3\cdot2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}} \\ sin\dfrac{\pi}{3\cdot2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}} \end{cases} \quad n\text{-}nests \tag{5.2$_3$}$$

$$\begin{cases} cos\dfrac{\pi}{5\cdot2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}}} \\ sin\dfrac{\pi}{5\cdot2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}}} \end{cases} \quad n\text{-}nests \tag{5.2$_5$}$$

証明

$$\cos\frac{\theta}{2^1} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$$

において $\theta = \pi/2$ と置けば、

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+0} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}}}} = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

以下、帰納法により $\cos(\pi/2^n)$ を得る。$\sin(\pi/2^n)$ は $\sqrt{1-\cos^2 z}$ により得る。
(5.2_3) , (5.2_5) も類似の方法により導出される。

定理 6･5･3

定義 6･1･3'における反射分割級数 $a_k \quad k=1,2,\cdots,2^n$ の総和は、π を除いて、2 の多重平方根と四則演算のみで表される。

証明

公式 6･1･4 によれば、2^n 分割における分割級数の総和 a_k は次で与えられた。

(1) ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2h)$ のとき、

$$a_k = -\frac{\pi}{\left(4\cdot 2^n\right)^{2h}(2h-1)!}\frac{d^{2h-1}}{dz^{2h-1}}\cot(\pi z)\Bigg|_{\frac{2k-1}{4\cdot 2^n}} \qquad k=1,2,\cdots,2^n$$

公式 6･1･2 の計算例で見たように、この高階微係数は $\cot\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}$ と $\csc\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}$ の多項式となる。$\cot z = \cos z/\sin z$, $\csc z = 1/\sin z$ であるから、公式 6･5･1 により、この高階微係数は $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ と $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ の多項式で表される。そして 公式 6･5･2 (5.2_2) により、この高階微係数は次を要素とする多項式に帰着する。

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \qquad (n+1)\text{-}nests$$

系 6･5･3

(1) 反射分割級数 $a_k \quad k=1,2,\cdots,3\cdot 2^n$ の総和は、π を除いて、3 と 2 の多重平方根と四則演算のみで表される。

(2) 反射分割級数 a_k　$k=1,2,\cdots,5\cdot 2^n$ の総和は、π を除いて、5 と 2 の多重平方根と四則演算のみで表される。

例1 $\lambda(2)$ の反射8分割

ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2)$ は次のようである。

$$\lambda(2)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots$$

定義 6･1･3' (1) より

$$a_k=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n}}+\frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n}}\right\}\qquad k=1,2,\cdots,m$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=\lambda(2n)$$

$n=1,\ m=8$ と置けば、

$$a_k=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(32r+2k-1)^2}+\frac{1}{(32r+32-2k+1)^2}\right\}\qquad k=1,2,\cdots,8$$

展開すれば、

$$a_1=1+\frac{1}{31^2}+\frac{1}{33^2}+\frac{1}{63^2}+\frac{1}{65^2}+\frac{1}{95^2}+\cdots$$

$$a_2=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{29^2}+\frac{1}{35^2}+\frac{1}{61^2}+\frac{1}{67^2}+\frac{1}{93^2}+\cdots$$

$$\vdots$$

$$a_8=\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{47^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{79^2}+\frac{1}{81^2}+\cdots$$

$$\lambda(2)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$$

公式 6･1･4 (1) より

$$a_k=-\frac{\pi}{32^2 1!}\frac{d}{dz}\cot(\pi z)\Big|_{\frac{2k-1}{32}}\qquad k=1,2,\cdots,8$$

ここで

$$\frac{d}{dz}\cot(\pi z)=-\pi\csc^2(\pi z)$$

であるから

$$a_k=\frac{\pi^2}{32^2 1!}\csc^2\frac{(2k-1)\pi}{32}=\frac{\pi^2}{32^2 1!}\left\{\sin\frac{(2k-1)\pi}{32}\right\}^{-2}\qquad k=1,2,\cdots,8$$

公式 6･5･1 より、$k=1,2,\cdots,8$ について次式が成立する。

$$\sin\frac{(2k-1)\pi}{32}=(-1)^{k-1}T_{2k-1}(\beta)\ ,\quad \beta=\sin\frac{\pi}{32}$$

公式 6･5･2 (5.2_2) を用いて

$$s_k=(-1)^{k-1}T_{2k-1}(\beta)\ ,\quad \beta=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

と置けば

$$a_k = \frac{\pi^2}{32^2 1!}\frac{1}{s_k^2} =: b_k \qquad k=1,2,\cdots,8$$

Mathematica で b_k を計算し簡約して a_k と一緒に書くと、次のようになる。勿論、両辺は数値的に一致している。

$$a_1 = 1 + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{65^2} + \frac{1}{95^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{61^2} + \frac{1}{67^2} + \frac{1}{93^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{69^2} + \frac{1}{91^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{71^2} + \frac{1}{89^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{73^2} + \frac{1}{87^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{85^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_7 = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{83^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_8 = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{79^2} + \frac{1}{81^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$\lambda(2) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$$

Note

$\lambda(2)$ を 2^n 分割した場合、右辺の分母は 2 の n 重平方根となる。符号は k により異なる。

$$a_k = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\left(4\cdot 2^n r+2k-1\right)^2} + \frac{1}{\left(4\cdot 2^n r+4\cdot 2^n-2k+1\right)^2}\right\} = \frac{\pi^2}{2^{2n+2}\left(2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\cdots\pm\sqrt{2}}}\right)}$$

例2 $\boldsymbol{\beta(3)}$ の反射6分割

ディリクレ・ベータ級数 $\beta(3)$ は次のようである。

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + - \cdots$$

定義 6･1･3'(2) より

$$a_k = (-1)^{k-1}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(4mr+2k-1)^{2n-1}} - \frac{1}{(4mr+4m-2k+1)^{2n-1}}\right\} \qquad k=1,2,\cdots,m$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \beta(2n-1)$$

$n=2,\ m=6$ と置けば、

$$a_k = (-1)^{k-1}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(24r+2k-1)^3} - \frac{1}{(24r+24-2k+1)^3}\right\} \qquad k=1,2,\cdots,6$$

展開すれば、

$$a_1 = \quad 1 - \frac{1}{23^3} + \frac{1}{25^3} - \frac{1}{47^3} + \frac{1}{49^3} - \frac{1}{71^3} + - \cdots$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{21^3} + \frac{1}{27^3} - \frac{1}{45^3} + \frac{1}{51^3} - \frac{1}{69^3} + - \cdots\right)$$

$$\vdots$$

$$a_5 = \frac{1}{9^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{33^3} - \frac{1}{39^3} + \frac{1}{57^3} - \frac{1}{63^3} + - \cdots$$

$$a_6 = -\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} + \frac{1}{35^3} - \frac{1}{37^3} + \frac{1}{59^3} - \frac{1}{61^3} + - \cdots\right)$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = \beta(3)$$

公式 6・1・4 (2) より

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}\pi}{24^3 2!}\frac{d^2}{dz^2}cot(\pi z)\Big|_{\frac{2k-1}{24}} \qquad k=1,2,\cdots,6$$

ここで

$$\frac{d^2}{dz^2}cot(\pi z) = 2\pi^2 cot(\pi z)csc^2(\pi z)$$

であるから

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}\pi^3}{24^3}cot\frac{(2k-1)\pi}{24}csc^2\frac{(2k-1)\pi}{24}$$

公式 6・5・1 より、$k=1,2,\cdots,6$ について次式が成立する。

$$cos\frac{(2k-1)\pi}{24} = T_{2k-1}(\alpha) \quad , \quad \alpha = cos\frac{\pi}{24}$$

$$sin\frac{(2k-1)\pi}{24} = (-1)^{k-1}T_{2k-1}(\beta) \quad , \quad \beta = sin\frac{\pi}{24}$$

公式 6・5・2 (5.2$_3$) より

$$cos\frac{\pi}{24} = cos\frac{\pi}{3\cdot 2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$sin\frac{\pi}{24} = sin\frac{\pi}{3\cdot 2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

であったから

$$c_k = T_{2k-1}(\alpha) \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$s_k = (-1)^{k-1} T_{2k-1}(\beta)\ , \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

と置いてこれらを上に代入すれば

$$a_k = (-1)^{k-1}\frac{\pi^3}{24^3}\frac{c_k}{s_k^3} =: b_k \qquad k=1,2,\cdots,6$$

Mathematica で b_k を計算し簡約して a_k と一緒に書くと、次のようになる。但し、b_6 は分母の有理化が困難なので $cos(\pi-\theta) = -cos\theta\ ,\ sin(\pi-\theta) = sin\theta$ を用いて導出した。勿論、両辺は数値的に一致している。

$$a_1 = \quad 1 - \frac{1}{23^3} + \frac{1}{25^3} - \frac{1}{47^3} + \frac{1}{49^3} - \frac{1}{71^3} +-\cdots$$
$$= \frac{(56+39\sqrt{2}+32\sqrt{3}+23\sqrt{6})\pi^3}{6912}$$

$$a_2 = -\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{21^3} + \frac{1}{27^3} - \frac{1}{45^3} + \frac{1}{51^3} - \frac{1}{69^3} +-\cdots\right) = \frac{(-4-3\sqrt{2})\pi^3}{6912}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^3} - \frac{1}{19^3} + \frac{1}{29^3} - \frac{1}{43^3} + \frac{1}{53^3} - \frac{1}{67^3} +-\cdots$$
$$= \frac{(56-39\sqrt{2}-32\sqrt{3}+23\sqrt{6})\pi^3}{6912}$$

$$a_4 = -\left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{31^3} - \frac{1}{41^3} + \frac{1}{55^3} - \frac{1}{65^3} +-\cdots\right)$$
$$= \frac{(56+39\sqrt{2}-32\sqrt{3}-23\sqrt{6})\pi^3}{6912}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{33^3} - \frac{1}{39^3} + \frac{1}{57^3} - \frac{1}{63^3} +-\cdots = \frac{(-4+3\sqrt{2})\pi^3}{6912}$$

$$a_6 = -\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} + \frac{1}{35^3} - \frac{1}{37^3} + \frac{1}{59^3} - \frac{1}{61^3} +-\cdots\right)$$
$$= \frac{(56-39\sqrt{2}+32\sqrt{3}-23\sqrt{6})\pi^3}{6912}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = \beta(3)$$

6・6 $\lambda(2)$ の反射 $m2^n$ 分割

本節では、専らディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(2)$ の $m2^n$ 分割を扱う。ディリクレ・ラムダ級数 $\lambda(2)$ は次のような級数である。

$$\lambda(2) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$$

前節で述べた方法により、これの 2分割、4分割、6分割、8分割、10分割を行うと、それぞれ次のようになる。

2分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{23^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{21^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

4分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{47^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{45^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{43^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{41^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{64\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

6分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{71^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{69^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3^2\,16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{67^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{65^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{63^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3^2\,16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{61^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{144\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$$

ここで、a_2, a_5 は $\lambda(2)$ の2分割級数の $1/3^2$ である。

8分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{63^2} + \frac{1}{65^2} + \frac{1}{95^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{61^2} + \frac{1}{67^2} + \frac{1}{93^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{59^2} + \frac{1}{69^2} + \frac{1}{91^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{71^2} + \frac{1}{89^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{55^2} + \frac{1}{73^2} + \frac{1}{87^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{53^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{85^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_7 = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{83^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)}$$

$$a_8 = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{79^2} + \frac{1}{81^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{256\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}$$

10分割

$$a_1 = 1 + \frac{1}{39^2} + \frac{1}{41^2} + \frac{1}{79^2} + \frac{1}{81^2} + \frac{1}{119^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{43^2} + \frac{1}{77^2} + \frac{1}{83^2} + \frac{1}{117^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{35^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{85^2} + \frac{1}{115^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{5^2\,16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$a_4 = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{33^2} + \frac{1}{47^2} + \frac{1}{73^2} + \frac{1}{87^2} + \frac{1}{113^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_5 = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{71^2} + \frac{1}{89^2} + \frac{1}{111^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_6 = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{29^2} + \frac{1}{51^2} + \frac{1}{69^2} + \frac{1}{91^2} + \frac{1}{109^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_7 = \frac{1}{13^2}+\frac{1}{27^2}+\frac{1}{53^2}+\frac{1}{67^2}+\frac{1}{93^2}+\frac{1}{107^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_8 = \frac{1}{15^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{55^2}+\frac{1}{65^2}+\frac{1}{95^2}+\frac{1}{105^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{5^2\,16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$a_9 = \frac{1}{17^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{57^2}+\frac{1}{63^2}+\frac{1}{97^2}+\frac{1}{103^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

$$a_{10} = \frac{1}{19^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{59^2}+\frac{1}{61^2}+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{101^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{400\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)}$$

ここで、$a_3\,,a_8$ は $\lambda(2)$ の2分割級数の $1/5^2$ である。

Remark

敢えて分母の有理化はしていない。この表現によれば、各級数の総和は多重平方根内の＋と－の組み合わせによって表される。但し、6分割と10分割においては、これらの組み合わせのみでは全ての総和を表現できない。面白いことに、その不足分は $\lambda(2)$ の2分割によって補われている。そこで次の定理が成立する。

定理 6･6･1

p は3以上の素数、ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2)$ の反射 $2p$ 分割級数 a_k は次のようであるとせよ。

$$a_k = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(8pr+2k-1)^2}+\frac{1}{(8pr+8p-2k+1)^2}\right\} \qquad k=1,2,\cdots,2p$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2p} = \lambda(2)$$

すると、次式が成立する。

$$a_{\frac{p+1}{2}} = \frac{\pi^2}{p^2 16\left(2-\sqrt{2}\right)} \quad , \quad a_{\frac{3p+1}{2}} = \frac{\pi^2}{p^2 16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

証明

公式 6･1･4 (1) によれば、ディリクレ･ラムダ級数 $\lambda(2)$ の反射2分割級数の総和 b_k と反射 $2p$ 分割の総和 a_k はそれぞれ次式で与えられる。

$$b_1 = \frac{\pi^2}{8^2}\csc^2\frac{1\pi}{8} = \frac{\pi^2}{16\left(2-\sqrt{2}\right)} \quad , \quad b_2 = \frac{\pi^2}{8^2}\csc^2\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2}{16\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$a_k = \frac{\pi^2}{(8p)^2}\csc^2\frac{(2k-1)\pi}{8p} \qquad k=1,2,\cdots,2p$$

$2k-1=p \quad i.e.\ \ k=(p+1)/2$ のとき、

$$a_{\frac{p+1}{2}} = \frac{\pi^2}{(8p)^2}\csc^2\frac{p\pi}{8p} = \frac{\pi^2}{p^2 8^2}\csc^2\frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{p^2 16\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$2k-1=3p$ i.e. $k=(3p+1)/2$ のとき、

$$a_{\frac{3p+1}{2}}=\frac{\pi^2}{(8p)^2}csc^2\frac{3p\pi}{8p}=\frac{\pi^2}{p^2 8^2}csc^2\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi^2}{p^2 16(2+\sqrt{2})}$$

例 14分割

このためには先ず $cos(\pi/7)$ の多重根号表現が必要であるが、それらは次式で示される。

(https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_constants_expressed_in_real_radicals 参照。)

$$cos\frac{\pi}{7}=\frac{1}{24}\sqrt{3\left(80+\sqrt[3]{14336+\sqrt{-5549064193}}+\sqrt[3]{14336-\sqrt{-5549064193}}\right)}$$

これに半角公式を3回適用して $sin(\pi/56)$ を求め、各分割級数の和 a_k $(k=1,2,3,\cdots,2p)$ を計算しなければならない。しかしそれらは非常に長い式になり、ここに記述することは困難である。

ところが、定理において $p=7$ と置けば、a_4, a_{11} のみは例外的に極めて簡単に表される。即ち、

$$a_4=\frac{1}{7^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{63^2}+\frac{1}{105^2}+\frac{1}{119^2}+\frac{1}{161^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{7^2 16(2-\sqrt{2})}$$

$$a_{11}=\frac{1}{21^2}+\frac{1}{35^2}+\frac{1}{77^2}+\frac{1}{91^2}+\frac{1}{133^2}+\frac{1}{147^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{7^2 16(2+\sqrt{2})}$$

実際、数式処理ソフト *Mathematica* による両辺の計算結果は次のとおり。

$$a_{k\_}:=\sum_{r=0}^{200\,000}\left(\frac{1}{(56r+2k-1)^2}+\frac{1}{(56r+56-2k+1)^2}\right)$$

$N\left[\left\{a_4,\frac{\pi^2}{7^2\,16\,(2-\sqrt{2})}\right\}\right]$　　　$N\left[\left\{a_{11},\frac{\pi^2}{7^2\,16\,(2+\sqrt{2})}\right\}\right]$

{0.0214904 , 0.0214904}　　　{0.00368717 , 0.00368717}

2019.02.13
2019.02.26 Renewed
2019.03.04 Added Sec.5
2019.03.10 Added Sec.6

Kano Kono

宇宙人の数学