

## 7 p-級数の零点

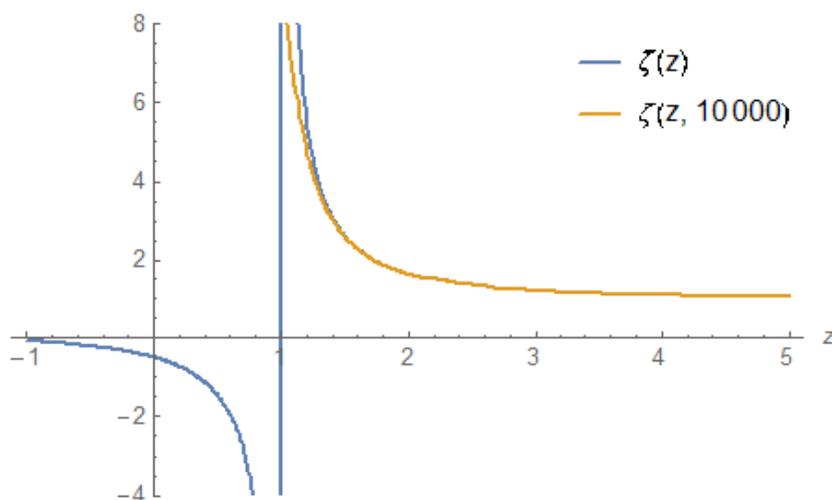
### 7.1 リーマン・ゼータ関数とp-級数

リーマン・ゼータ関数  $\zeta(z)$  ( $z=x+iy$ ) はしばしば次式で定義される

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots \quad x > 1 \quad (1.\zeta)$$

この右辺は **p-級数** と呼ばれており、ディリクレ級数の1種である。

この両辺を図示すると次のとおり。青が左辺で橙が右辺である。Σの上限は10000項取っているが、特異点  $z=1$  付近で両辺は一致していない。また、特異点  $z=1$  より左側では **p-級数** が描かれていない。これは  $z < 1$  では **p-級数** が発散するためである。



$\zeta(z)$  の零点が存在する領域  $0 < x < 1$  は臨界領域と呼ばれているが、**p-級数**はこの領域内で  $\zeta(z)$  を記述することが出来ない。少なくとも、級数理論からすればそうである。

#### $\zeta(z)$ の臨界領域内でのディリクレ級数表示

それならば、臨界領域内で  $\zeta(z)$  を記述できるディリクレ級数はどのようなものであろうか？

臨界領域内での  $\zeta(z)$  を記述するため、オイラー以降今日まで、次式が用いられてきた。

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \eta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \left( \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots \right) \quad x > 0$$

( )内は確かにディリクレ級数であるが、これ全体がディリクレ級数であるか否かは疑わしい。筆者は長年この問題に悩んで来たが、最近、この右辺もまた **p-級数** であることに気付いた。そこで、これを公式として述べる。

#### 公式 7.1.1

リーマン・ゼータ関数  $\zeta(z)$  ( $z=x+iy$ ) について次式が成立する。

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots \quad x > 0, x \neq 1 \quad (1.1)$$

証明

ディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  ( $z = x + iy$ ) について次式が成立する。

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^z} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots \quad x > 0 \quad (1.\eta)$$

ここで  $\eta(z)$  は次のような  $\eta$  固有の零点を持つことが知られている。

$$x = 1, y = \frac{2k\pi}{\log 2} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

このような零点を持つ関数  $\eta_s(z)$  は次のようなディリクレ型の多項式で与えられる。

$$\eta_s(z) = 1 - 2^{1-z} = \frac{1}{1^z} - \frac{2}{2^z} \quad \left( = \frac{1}{1^{z-1}} - \frac{1}{2^{z-1}} \right)$$

$\eta(z)$  から  $\eta$  固有の零点を持つ因子を除去すれば  $\zeta(z)$  が得られるから

$$\zeta(z) = \eta(z) / \left( \frac{1}{1^z} - \frac{2}{2^z} \right) = \left( \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{6^z} + \dots \right) / \left( \frac{1}{1^z} - \frac{2}{2^z} \right)$$

これを筆算すると

$$\begin{array}{r} \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots \\ \hline \frac{1}{1^z} - \frac{2}{2^z} \left) \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{6^z} + \dots \right. \\ \hline \frac{1}{1^z} - \frac{2}{2^z} \\ \hline \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{6^z} + \dots \\ \hline \frac{1}{2^z} - \frac{2}{4^z} \\ \hline \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{6^z} + \frac{1}{7^z} - \frac{1}{8^z} + \dots \\ \hline \frac{1}{3^z} - \frac{2}{6^z} \\ \hline \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{7^z} - \frac{1}{8^z} + \frac{1}{9^z} - \frac{1}{10^z} + \dots \\ \hline \frac{1}{4^z} - \frac{2}{8^z} \\ \hline \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{8^z} + \frac{1}{9^z} - \frac{1}{10^z} + \frac{1}{11^z} - \frac{1}{12^z} + \dots \\ \hline \vdots \end{array}$$

Q.E.D.

### p-級数の実部と虚部

かくして、p-級数は臨界領域  $0 < x < 1$  においても成立しなければならないことが示された。そこで、これを実部・虚部別に見てみよう。それらは次の公式で示される。

#### 公式 7・1・1ri

複素平面上的のリーマン・ゼータ関数  $\zeta(x, y)$  の実部と虚部をそれぞれ  $\zeta_r, \zeta_i$  とするとき、 $x > 0, x \neq 1$  において次式が成立する。

$$\zeta_r(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(y \log s)}{s^x} \quad (1.1r)$$

$$\zeta_i(x, y) = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(y \log s)}{s^x} \quad (1.1i)$$

#### 証明

公式 7・1・1 より

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{x+iy}} = \sum_{s=1}^{\infty} e^{-(x+iy) \log s} \quad \text{for } x > 0, x \neq 1 \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} e^{-x \log s} \cdot e^{-iy \log s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^x} \{ \cos(y \log s) - i \sin(y \log s) \} \end{aligned}$$

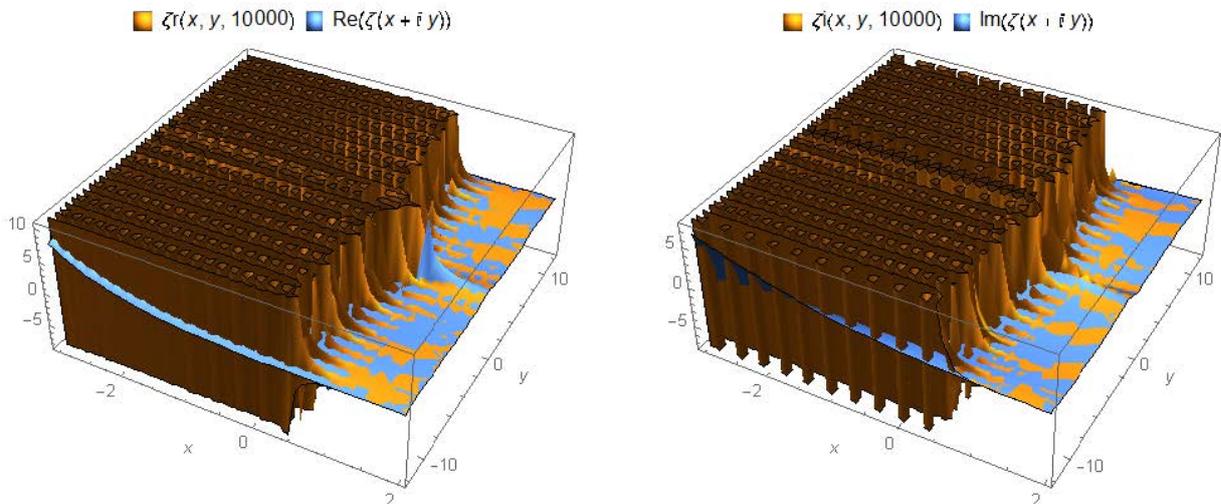
i.e.

$$\zeta(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(y \log s)}{s^x} - i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin(y \log s)}{s^x} \quad \text{for } x > 0, x \neq 1$$

これより与式を得る。

#### 3D図

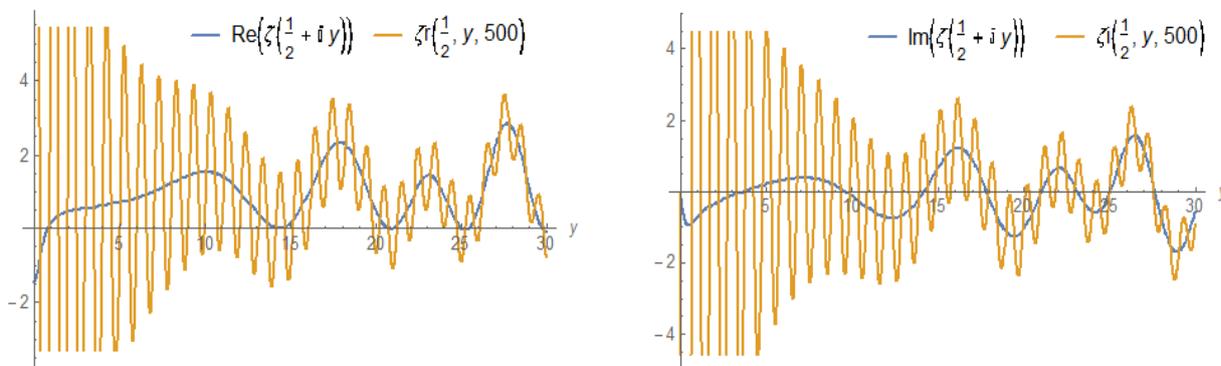
(1.1r), (1.1i) を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において青が左辺で橙が右辺である。



両図において、 $x = 1$  に収束軸が観察される。p-級数(橙)はこれより右側では収束し、左側では発散している。

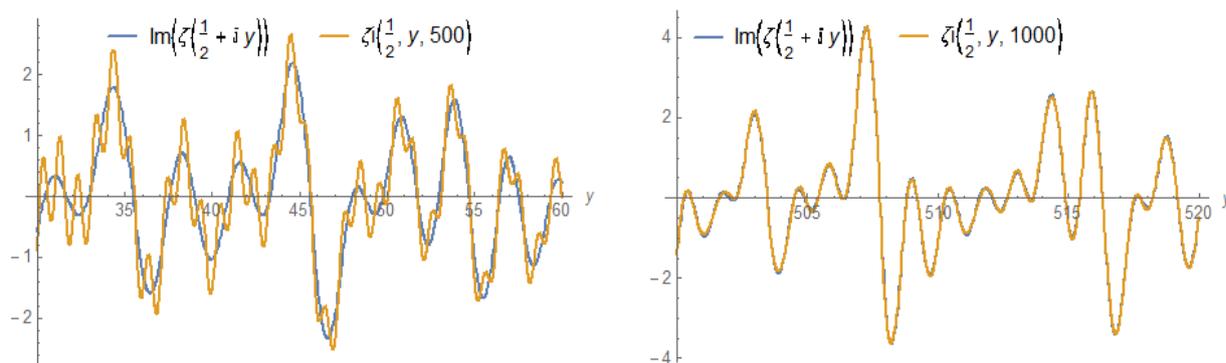
## 臨界線上の2D図

$0 \leq y \leq 30$  における臨界線  $x=1/2$  上の2D図を描くと次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において青が左辺で橙が右辺である。



$p$ -級数は激しく振動しており、振動の中心値が  $\operatorname{Re}\{\zeta(1/2 + iy)\}$  または  $\operatorname{Im}\{\zeta(1/2 + iy)\}$  となっている。

しかしながら、その振幅は  $y$  の増加に従って小さくなっている。虚部について、 $30 \leq y \leq 60$  と  $500 \leq y \leq 520$  における2D図を描くとそれぞれ次のようである。左図が  $30 \leq y \leq 60$ 、右図が  $500 \leq y \leq 520$  である。



$500 \leq y \leq 520$  においては両辺はほとんど重なっているように見えるが  $p$ -級数(橙)は振動しており収束しない。つまり、 $y$  が与えられても  $p$ -級数の値は確定しない。

しかし、それは  $\Sigma$  の上限が  $\infty$  のときの話である。数値計算上は  $p$ -級数は有限の項で打ち切れ、その時点で何らかの値が得られる。例えば、 $p$ -級数を1000項で打ち切り、 $y=515$  付近の上り坂の零点を数値計算したところ、次の値を得た。

$$\text{FindRoot}\left[\zeta\left[\frac{1}{2}, y, 1000\right], \{y, 515.5\}\right] \quad \text{N}[\text{Im}[\text{ZetaZero}[281]]]$$

$$\{y \rightarrow 515.437\} \quad 515.435$$

これは  $\zeta(z)$  の281番目の非自明な零点にかなり近い。 $y$  がこの大きさのときは、運が良ければ、これぐらいの精度の近似値が得られるということである。

cf.

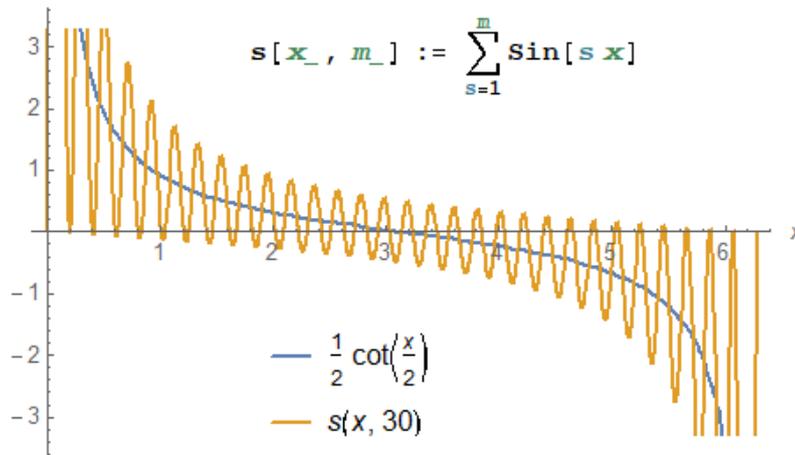
フーリエ級数

$$-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(sx)}{s} \quad 0 < x < 2\pi$$

の両辺を  $x$  で微分すれば

$$\frac{1}{2} \cot\frac{x}{2} = \sum_{s=1}^{\infty} \sin(sx) \quad 0 < x < 2\pi \quad (1.2)$$

この右辺は収束しないから、(1.2) は実は成立しない。この両辺の2D図を描くと次のようである。青が左辺で橙が右辺である。



級数  $s(x)$  は激しく振動しており、振動の中心値が  $\frac{1}{2} \cot\frac{x}{2}$  となっている。上記の臨界線上の2D図はこの図に似ている。但し、 $p$ -級数の振幅が  $y$  の増加に従って限りなく減少するのに対し、級数  $s(x)$  の振幅は一定以下には減少しない。

### 総和法の必要性

以上、3D図や2D図を見たところでは、臨界領域内の  $p$ -級数はそのままでは使用に耐えそうにない。公式 7・1・1 の解釈のためには、(1.2) を正当化できるぐらい強力な総和法が必要であるように思われる。

## 7・2p - 級数の収束加速

本節では、クノッパ変換の持つ総和法を  $p$ -級数に適用することを試みる。クノッパ変換は正項級数には有効でないので (1.ζ) の加速は望めない。しかし、(1.1r), (1.1i) は交代級数に似ているから、これらには総和法の効果が期待できる。

なお、クノッパ変換については「10 二重関数項級数による収束加速と総和法」(アラカルト編)を参照されたい。

### 公式 7・2・1ri (クノッパ変換)

複素平面上的リーマン・ゼータ関数  $\zeta(x, y)$  の実部と虚部をそれぞれ  $\zeta_r, \zeta_i$  とするとき、 $x > 0, x \neq 1$  において次式が成立する。

$$\zeta_r(x, y, q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{\cos(y \log s)}{s^x} \quad (2.1r)$$

$$\zeta_i(x, y, q) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{\sin(y \log s)}{s^x} \quad (2.1i)$$

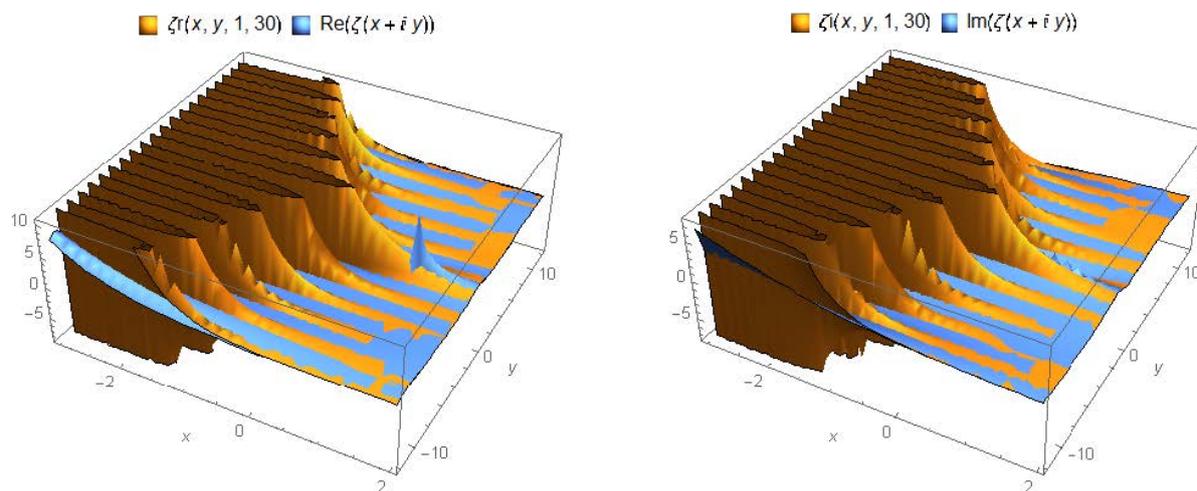
但し、 $q$  は任意の正数とする。

### 証明

公式 7・1・1ri にクノッパ変換を施して与式を得る。

### 3D図

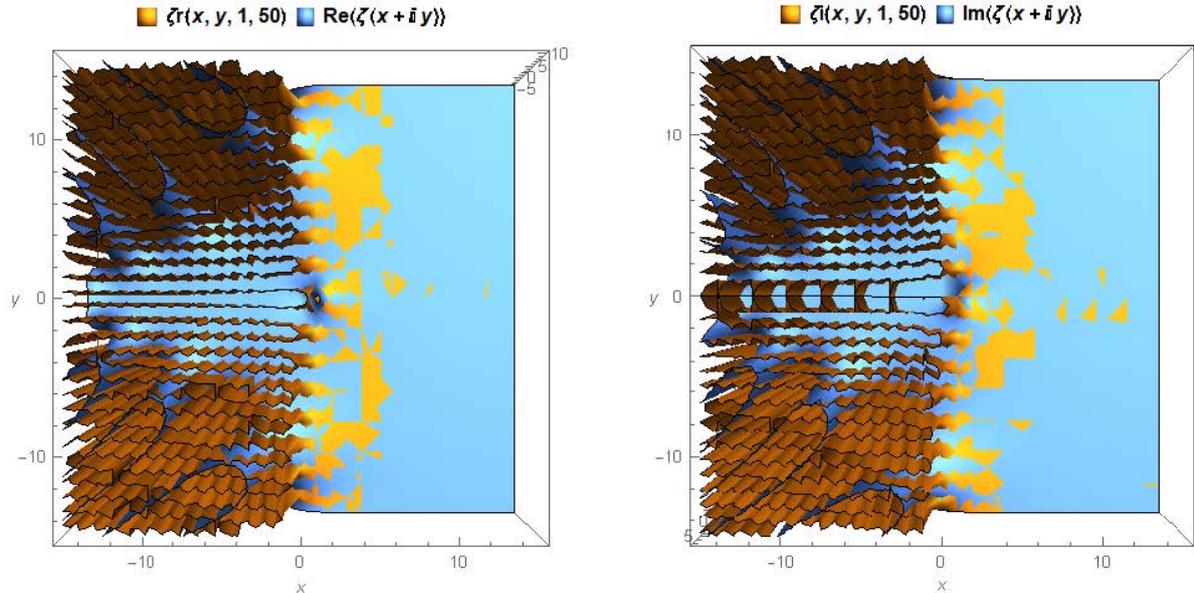
(2.1r), (2.1i) を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において青が左辺で橙が右辺である。



両図において、注目すべきは収束軸である。収束軸は  $y$  の絶対値に比例して負方向に傾斜しているように見える。少なくとも、 $x$  軸に対して垂直であるようには見えない。

### 縦横比が1の3D図

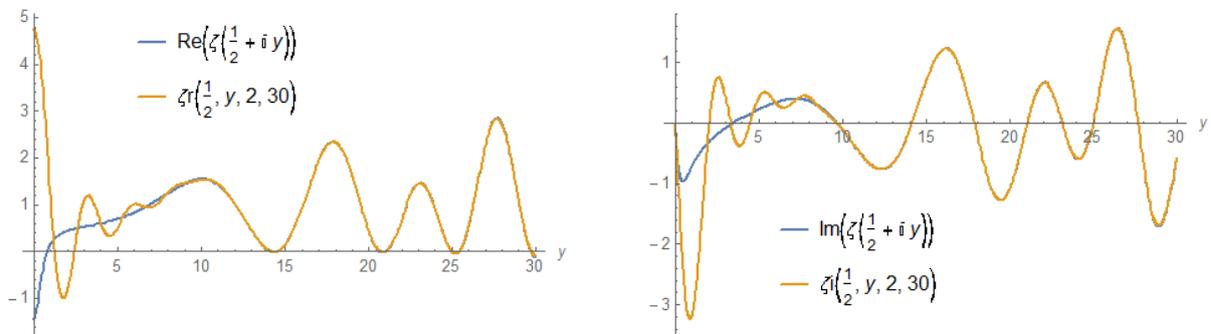
このことをより詳しく観察するために、縦横比のを等しい図を描き、それらを上から見てみよう。すると次のようになる。



これらの図を見ても、収束軸が負方向に>字型に後退し、収束域が拡大していることが判る。これはクノップ変換の持つ解析接続効果であると思われる。この結果、**臨界領域  $0 < x < 1$  の大部分がこの拡大した収束域に含まれる**ことになりそうである。

### 臨界線上の2D図

$0 \leq y \leq 30$  における臨界線  $x=1/2$  上の2D図を描くと次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において青が左辺で橙が右辺である。



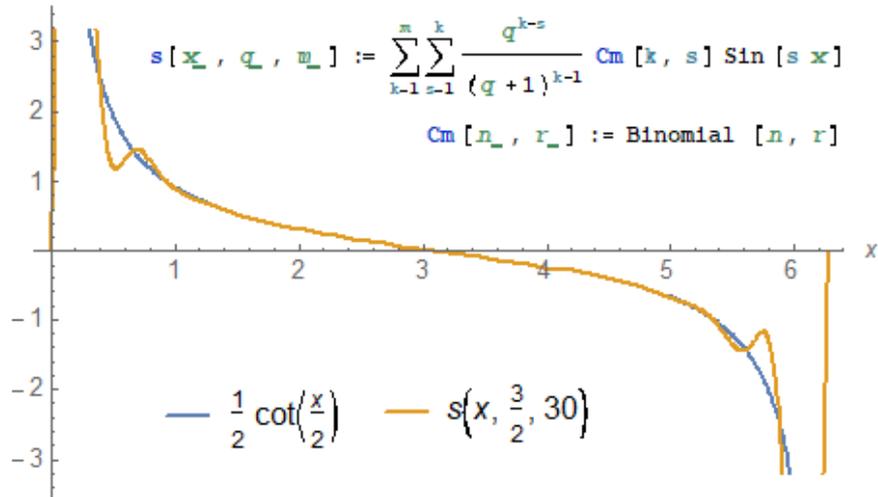
$p$ -級数は  $y$  が小さいところでは  $Re\{\zeta(1/2+iy)\}$ ,  $Im\{\zeta(1/2+iy)\}$  との乖離が大きい、 $y$  の大きいところでは急速に  $Re\{\zeta(1/2+iy)\}$ ,  $Im\{\zeta(1/2+iy)\}$  に接近している。ここで重要なことは  $p$ -級数が発散していないことである。即ち、 **$y$  が与えられれば  $p$ -級数の値は確定する**。そしてそれらは  $|y|$  の増大に伴って限りなく  $Re\{\zeta(1/2+iy)\}$ ,  $Im\{\zeta(1/2+iy)\}$  に接近する。

cf.

前節 (1.2) の右辺にクノップ変換を施せば次のようになる。

$$\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} \sin(sx) \quad 0 < x < 2\pi \quad (2.2)$$

そして、この両辺の2D図を描くと次のようである。青が左辺で橙が右辺である。



級数  $s(x)$  は  $x = \pi$  付近では左辺  $\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$  と極めて良く一致している。。上記の臨界線上の2D図はこの図に似ている。

#### クノップ変換による総和法の効果

以上、3D図や2D図を見たところ、クノップ変換の持つ総和法の効果により、 $y$  が大きいところでは  $p$ -級数は十分使用に耐えそうに見える。しかし、 $y$  が小さいところでは  $p$ -級数を  $\zeta(z)$  と同一視するのは困難である。これはおそらく、クノップ変換の持つ総和法がそれほど強力でないためであろう。

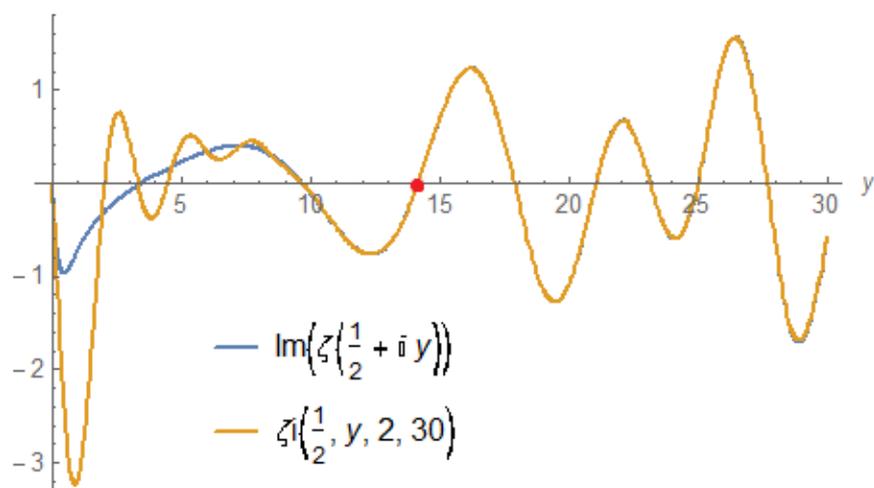
### 7.3 $p$ -級数の零点

本節では、次の公式により  $p$ -級数の臨界線上の零点を計算する。

$$\zeta_i(x, y, q) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{\sin(y \log s)}{s^x} \quad (2.1i)$$

#### 最初の零点

$0 \leq y \leq 30$  における臨界線  $x=1/2$  上の虚部は次のようである。青が左辺で橙が右辺である。



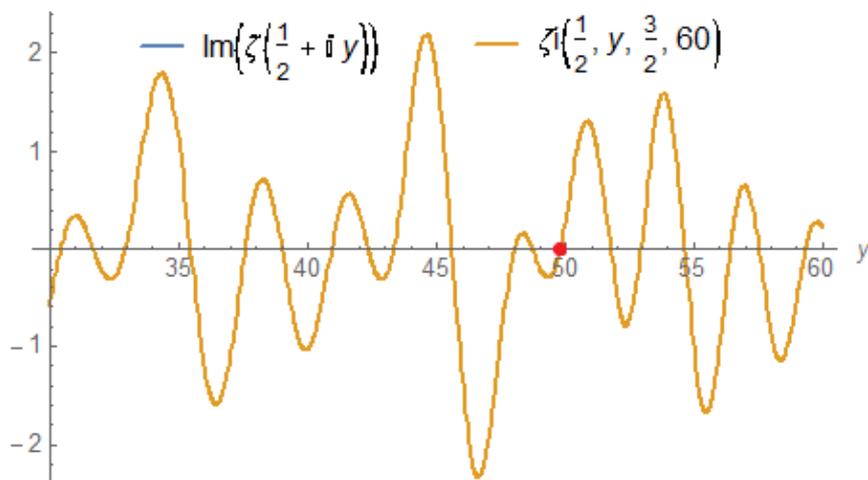
$\zeta(1/2+iy)$  の最初の零点は虚部の2番目の上り坂の零点(赤点)に一致する。そこで  $y=14$  付近の両辺の零点を計算したところ、次の値を得た。有効4桁が得られたが、これより良い近似値は得られなかった。

$$\text{FindRoot}\left[\zeta_i\left[\frac{1}{2}, y, 1, 30\right], \{y, 14\}\right] \quad \text{N}[\text{Im}[\text{ZetaZero}[1]]]$$

$$\{y \rightarrow 14.1394\} \quad 14.1347$$

#### 10番目の零点

$30 \leq y \leq 60$  における臨界線  $x=1/2$  上の虚部は次のようである。青が左辺で橙が右辺であるが、両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



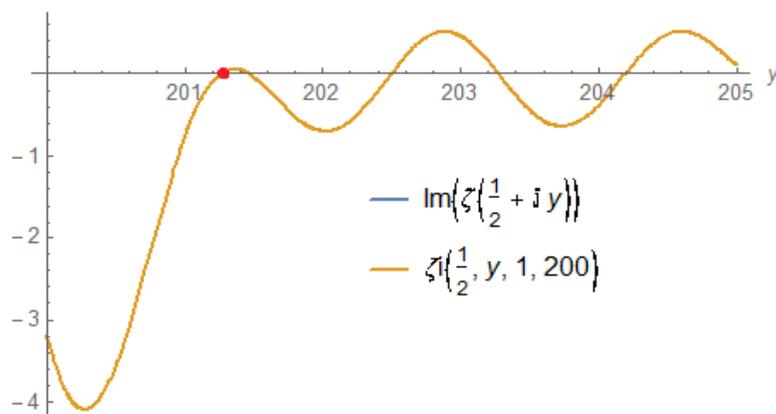
$\zeta(1/2+iy)$  の10番目の零点は虚部の11番目の上り坂の零点(赤点)に一致する。そこで

y=50 付近の両辺の零点を計算したところ、次の有効10桁が得られた。

```
SetPrecision[FindRoot[ $\zeta\left[\frac{1}{2}, y, 1, 60\right]$ , {y, 50}], 11]    {y → 49.773832470}
SetPrecision[Im[ZetaZero[10]], 11]                                49.773832478
```

### 80番目の零点

200 ≤ y ≤ 205 における臨界線 x=1/2 上の虚部は次のようである。青が左辺で橙が右辺であるが、両辺はぴったり重なっていて青(左辺)は見えない。



$\zeta(1/2 + iy)$  の80番目の零点は虚部の(多分)81番目の上り坂の零点(赤点)に一致する。そこで y=201 付近の両辺の零点を計算したところ、次の有効15桁が得られた。

```
SetPrecision[FindRoot[ $\zeta\left[\frac{1}{2}, y, 1, 200\right]$ , {y, 201}], 16]
{y → 201.2647519437039}
SetPrecision[Im[ZetaZero[80]], 16]
201.2647519437038
```

### 結論

現在のところ、公式 7・2・1ri は臨界領域  $0 < x < 1$  においては漸近展開と考えざるを得ない。しかし、これらの計算精度は独立変数の虚部 |y| が大きくなるほど高くなる。2004年時点で臨界線上の最初の10兆個はリーマン仮説を満たすことが知られている。10兆番目以降の虚部 |y<sub>r</sub>| は非常に大きいから、公式 7・2・1ri は臨界領域  $0 < x < 1$  においても十分に有用である。

もし将来より強力な総和法が発見されたならば、p-級数は全臨界領域において  $\zeta(z)$  と同一視できるであろう。

2019.10.01

2020.09.01 Reuped

Kano Kono

宇宙人の数学