

8 ディリクレ・イータ関数の級数展開

8.1 ディリクレ・イータ級数

ディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ は $Re(z) > 0$ においては、ディリクレ・イータ級数と呼ばれる次式で定義される。

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-z \log s} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots \quad (1.0)$$

これを実数部・虚数部別に記述すれば次のようになる。

公式 8.1.1

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、 $x > 0$ について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\cos(y \log s)}{s^x}$$

$$\eta_i(x, y) = - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\sin(y \log s)}{s^x}$$

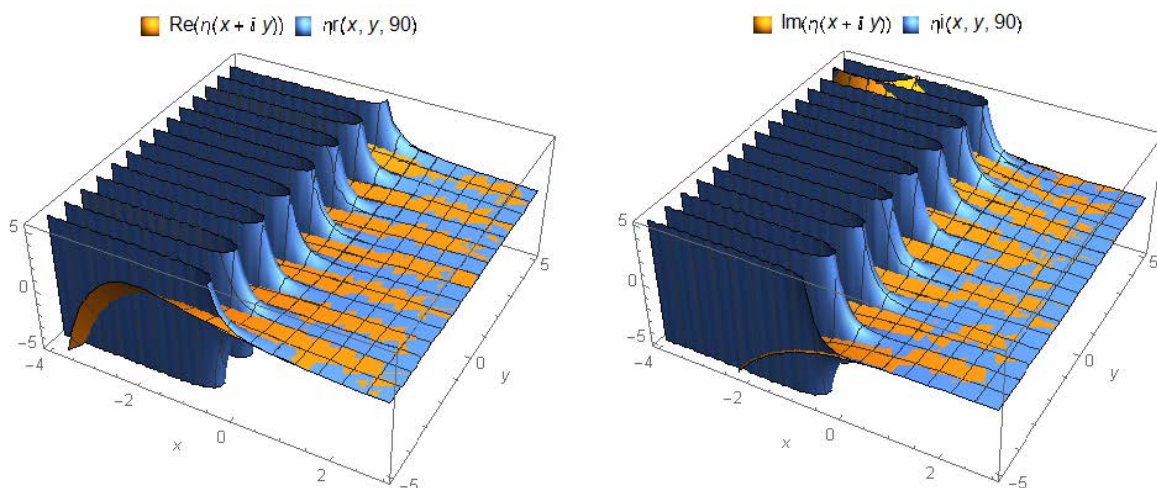
証明

$z = x + iy$ とすれば、(1.0) より

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-(x+iy) \log s} = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-x \log s} \cdot e^{-iy \log s} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\cos(y \log s) - i \sin(y \log s)}{s^x} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\cos(y \log s)}{s^x} - i \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\sin(y \log s)}{s^x} \end{aligned}$$

これより与式を得る。

これらを図示すると次のようになる。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。 $x = 0$ が収束軸であることは周知のことである。



公式 8・1・1 は、これにクノップ変換を施してその収束を加速することができる他、解析接続も期待できる。なお、クノップ変換については「10 二重関数項級数による収束加速と総和法」(アラカルト編)を参照されたい。

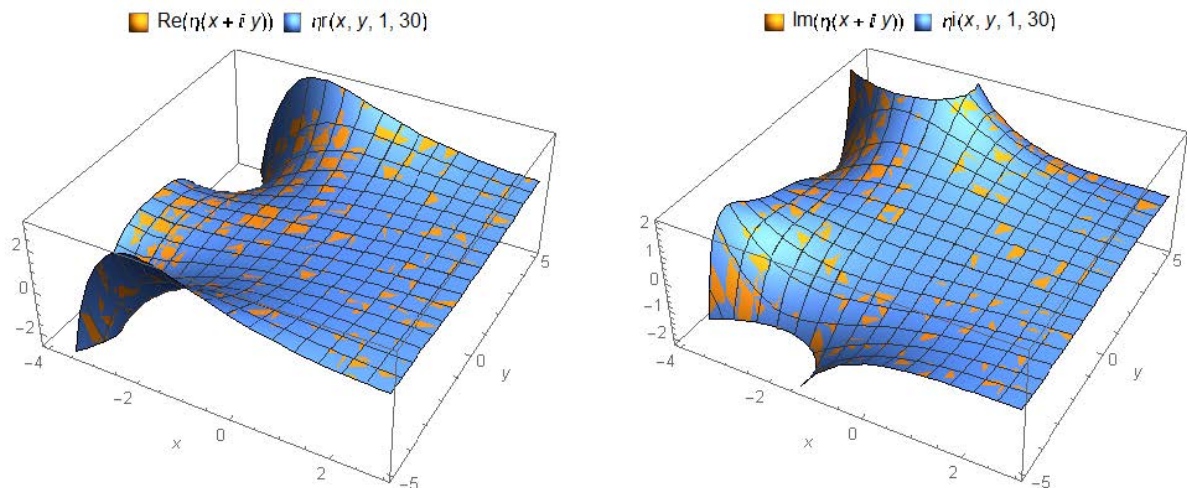
公式 8・1・1' (加速型)

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、任意の正数 q について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} (-1)^{s-1} \frac{\cos(y \log s)}{s^x}$$

$$\eta_i(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{q^{k-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{s} (-1)^{s-1} \frac{\sin(y \log s)}{s^x}$$

$q=1$ のとき これらを図示すると次のようになる。。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。解析接続効果により、収束軸 $x=0$ が消滅していることが分かる。



リーマン・ゼータ関数の非自明な零点

定理 8・1・2

リーマン・ゼータ関数の非自明な零点は次の連立方程式の実数解として与えられる。

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\cos(y \log s)}{s^x} = 0 \\ - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\sin(y \log s)}{s^x} = 0 \end{cases} \quad \text{但し, } 0 < x < 1$$

そして、この解の一方は必ず $x=1/2$ であろうと言うのがリーマン仮説である。しかしながら、この連立方程式は x 及び y に関して超越方程式であり、これの解析は容易ではない。

8・2 スチルチェス定数による冪級数

8・2・0 複素数の冪

Lemma 8・2・0

x, y は実数、 r は非負の整数とするとき、次式が成立する。

$$(x+iy)^r = \sum_{s=0}^{\lceil \frac{r-1}{2} \rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} x^{r-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} x^{r-2s-1} y^{2s+1} \quad (2.0)$$

但し、 $0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数, $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

$$\begin{aligned} (x+iy)^1 &= \sum_{s=0}^1 {}_1C_s x^{1-s} i^s y^s \\ &= {}_1C_0 x^{1-0} y^0 + i ({}_1C_1 x^{1-1} y^1) \\ &= \sum_{s=0}^0 (-1)^s {}_1C_{2s} x^{1-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^0 (-1)^s {}_1C_{2s+1} x^{1-2s-1} y^{2s+1} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} 0 = \left\lceil \frac{1-1}{2} \right\rceil \\ 0 = \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 &= \sum_{s=0}^2 {}_2C_s x^{2-s} i^s y^s \\ &= {}_2C_0 x^{2-0} y^0 - {}_2C_2 x^{2-2} y^2 + i ({}_2C_1 x^{2-1} y^1) \\ &= \sum_{s=0}^1 (-1)^s {}_2C_{2s} x^{2-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^0 (-1)^s {}_2C_{2s+1} x^{2-2s-1} y^{2s+1} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} 1 = \left\lceil \frac{2-1}{2} \right\rceil \\ 0 = \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} (x+iy)^3 &= \sum_{s=0}^3 {}_3C_s x^{3-s} i^s y^s \\ &= {}_3C_0 x^{3-0} y^0 - {}_3C_2 x^{3-2} y^2 + i ({}_3C_1 x^{3-1} y^1 - {}_3C_3 x^{3-3} y^3) \\ &= \sum_{s=0}^1 (-1)^s {}_3C_{2s} x^{3-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^1 (-1)^s {}_3C_{2s+1} x^{3-2s-1} y^{2s+1} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} 1 = \left\lceil \frac{3-1}{2} \right\rceil \\ 1 = \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} (x+iy)^4 &= \sum_{s=0}^4 {}_4C_s x^{4-s} i^s y^s \\ &= {}_4C_0 x^{4-0} y^0 - {}_4C_2 x^{4-2} y^2 - {}_4C_4 x^{4-4} y^4 + i ({}_4C_1 x^{4-1} y^1 - {}_4C_3 x^{4-3} y^3) \\ &= \sum_{s=0}^2 (-1)^s {}_4C_{2s} x^{4-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^1 (-1)^s {}_4C_{2s+1} x^{4-2s-1} y^{2s+1} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} 2 = \left\lceil \frac{4-1}{2} \right\rceil \\ 1 = \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor \end{array} \right)$$

以下、帰納法により与式を得る。

8・2・1 スチルチェス定数による冪級数展開

「3 ディリクレ級数の相補級数」公式 3・1・2 は次のようであった。

$$\eta(z) = \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left\{ \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \frac{(z-1)^r}{r!} \quad (1.2)$$

$$\text{但し、} \gamma_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(\log k)^s}{k} - \frac{(\log n)^{s+1}}{s+1} \right\}$$

これを実数部・虚数部別に記述すれば次のようになる。

公式 8・2・1

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\begin{aligned} \eta_r(x, y) &= \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left\{ \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \\ &\quad \times \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t} (x-1)^{r-2t} y^{2t} \\ \eta_i(x, y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left\{ \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} \\ &\quad \times \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t+1} (x-1)^{r-2t-1} y^{2t+1} \end{aligned}$$

但し、 $0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数, $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

「3 ディリクレ級数の相補級数」(ディリクレ級数偏) 公式 3・1・2 は次のようであった。

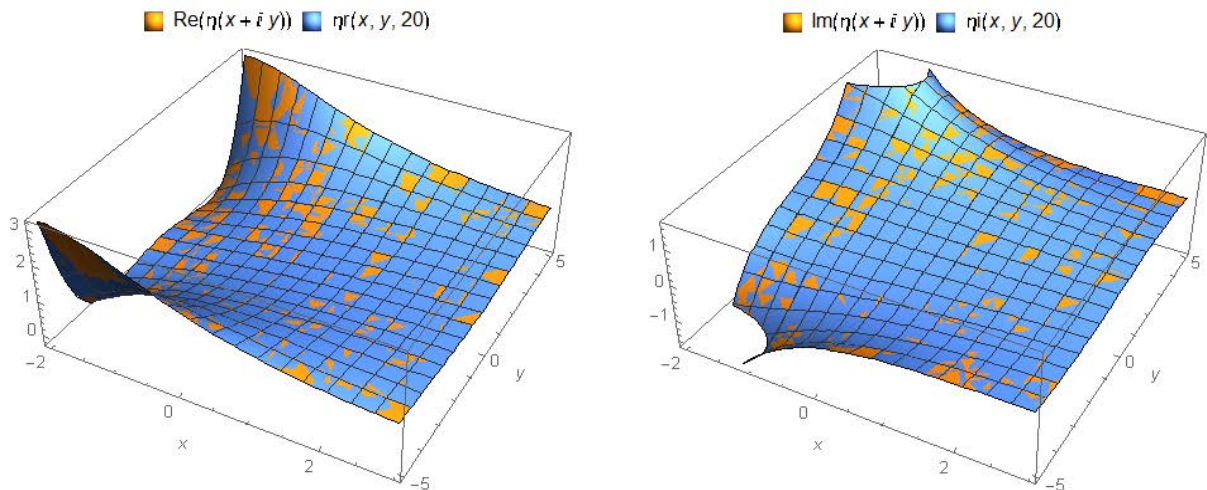
$$\eta(z) = \log 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left\{ \frac{\log^{r+1} 2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r}{s} \gamma_s (\log 2)^{r-s} \right\} (z-1)^r$$

他方、Lemma 8・2・0 において x を $x-1$ に置換すれば、

$$\begin{aligned} (x-1+iy)^r &= \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t} (x-1)^{r-2t} y^{2t} \\ &\quad + i \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t+1} (x-1)^{r-2t-1} y^{2t+1} \end{aligned}$$

これを上の $(z-1)^r$ に代入し 実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i と記述して 与式を得る。

これを図示すると次頁のようになる。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。この公式は全複素平面上で成立していることが分かる。



この公式 8・2・1 は収束が非常に速い。けれども、二項係数2個を含んでおり、美しい公式とは言い難い。そこで、「14 複素関数の実部虚部別テイラー展開」(アラカルト編)の公式 14・1・2 を(1.2)に適用すると、次が得られる。これは綺麗な2変数のテイラー級数であり、収束も速い。

公式 8・2・2

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$\eta(z) = \log 2 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left\{ \frac{(\log 2)^{s+1}}{s+1} - \sum_{t=0}^{s-1} \binom{s}{t} \gamma_t (\log 2)^{s-t} \right\} \frac{(z-1)^s}{s!}$$

$$\eta_r(x, y) = \log 2 + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\log 2)^{s+1}}{s+1} - \sum_{t=0}^{s-1} \binom{s}{t} \gamma_t (\log 2)^{s-t} \right\} \frac{(-1)^s (x-1)^s}{s!}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\log 2)^{2r+s+1}}{2r+s+1} - \sum_{t=0}^{2r+s-1} \binom{2r+s}{t} \gamma_t (\log 2)^{2r+s-t} \right\} \frac{(-1)^s (x-1)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\eta_i(x, y) = - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\log 2)^{2r+s+2}}{2r+s+2} - \sum_{t=0}^{2r+s} \binom{2r+s+1}{t} \gamma_t (\log 2)^{2r+s+1-t} \right\}$$

$$\times \frac{(-1)^s (x-1)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$\text{但し、} \gamma_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(\log k)^t}{k} - \frac{(\log n)^{t+1}}{t+1} \right\}, \quad 0^0 = 1$$

実部と虚部の数値計算による検証結果は次のとおり。上段が実部で下段が虚部である。両辺は完全に一致している。

$$\mathbf{N}[\{\mathbf{Re}[\mathbf{DirichletEta}[-5 + \mathbf{i} 1]], \eta_r[-5, 1, 30]\}]$$

$$\{0.483565, 0.483565\}$$

$$\mathbf{N}[\{\mathbf{Im}[\mathbf{DirichletEta}[-5 + \mathbf{i} 1]], \eta_i[-5, 1, 30]\}]$$

$$\{-0.306893, -0.306893\}$$

8.3 テイラー級数と相補級数

8.3.1 テイラー級数

公式 8.3.1

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、 $x > 0$ と η の零点以外の実定数 c について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \log^r(s+1)}{(s+1)^c} \right\} \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t} (x-c)^{r-2t} y^{2t}$$

$$\eta_i(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \log^r(s+1)}{(s+1)^c} \right\} \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t+1} (x-c)^{r-2t-1} y^{2t+1}$$

但し、 $0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数, $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

「3 ディリクレ級数の相補級数」(ディリクレ級数偏) 公式 3.4.1 は次のようであった。

$$\eta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \log^r(s+1)}{(s+1)^c} \right\} \frac{(-1)^r}{r!} (z-c)^r \quad \text{但し、} 0^0 = 1$$

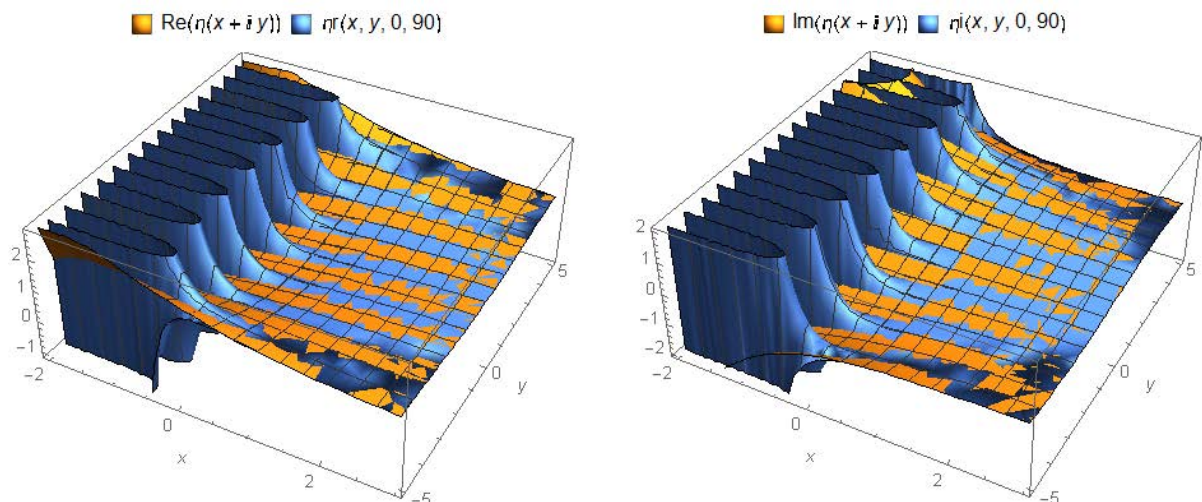
他方、Lemma 8.2.0 から

$$(x-c+iy)^r = \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t} (x-c)^{r-2t} y^{2t}$$

$$+ i \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t+1} (x-c)^{r-2t-1} y^{2t+1}$$

これを上の $(z-c)^r$ に代入し 実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i と記述して 与式を得る。

$c=0$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。



この公式はテイラー展開であるにもかかわらず、収束円は見られず 収束軸 $x = 0$ が見られる。
この公式は煩雑な上、収束が非常に遅い

そこで、この公式 8・3・1 の収束加速を試みる。加速方法は並列加速法を用いる。なお、この加速法については「13 多重級数の収束加速」(アラカルト編)を参照されたい。

公式 8・3・1' (並列加速)

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、任意の正数 q と η の零点以外の実定数 c について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^k \frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r+s} \frac{(-1)^s \log^r(s+1)}{(s+1)^c} \frac{(-1)^r}{r!}$$

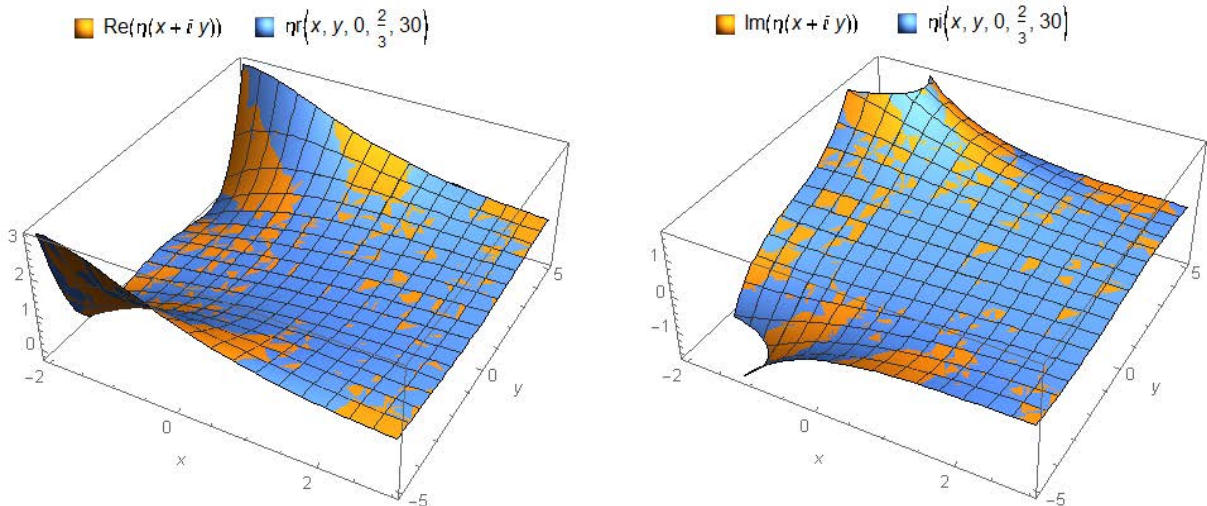
$$\times \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t} (x-c)^{r-2t} y^{2t}$$

$$\eta_i(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^k \frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r+s} \frac{(-1)^s \log^r(s+1)}{(s+1)^c} \frac{(-1)^r}{r!}$$

$$\times \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{r}{2t+1} (x-c)^{r-2t-1} y^{2t+1}$$

但し、 $0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

$c = 0, q = 2/3$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。公式 8・3・1 が左方向に解析接続されて収束軸は消滅していることが分かる。



8・3・2 相補級数

公式 8・3・1 の二重級数を対角線に沿って並べ替えると、その収束軸の反対側を表示する相補級数が得られる。

公式 8・3・2

ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、 η の零点以外の実定数 c について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \frac{\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c} \frac{(-1)^r}{s!} \sum_{t=0}^{\lceil \frac{s-1}{2} \rceil} (-1)^t \binom{s}{2t} (x-c)^{s-2t} y^{2t}$$

$$\eta_i(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r \frac{\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c} \frac{(-1)^r}{s!} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t+1} (x-c)^{s-2t-1} y^{2t+1}$$

但し、 $0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

「3 ディリクレ級数の相補級数」(ディリクレ級数偏) 公式 3・4・2 は次のようであった。

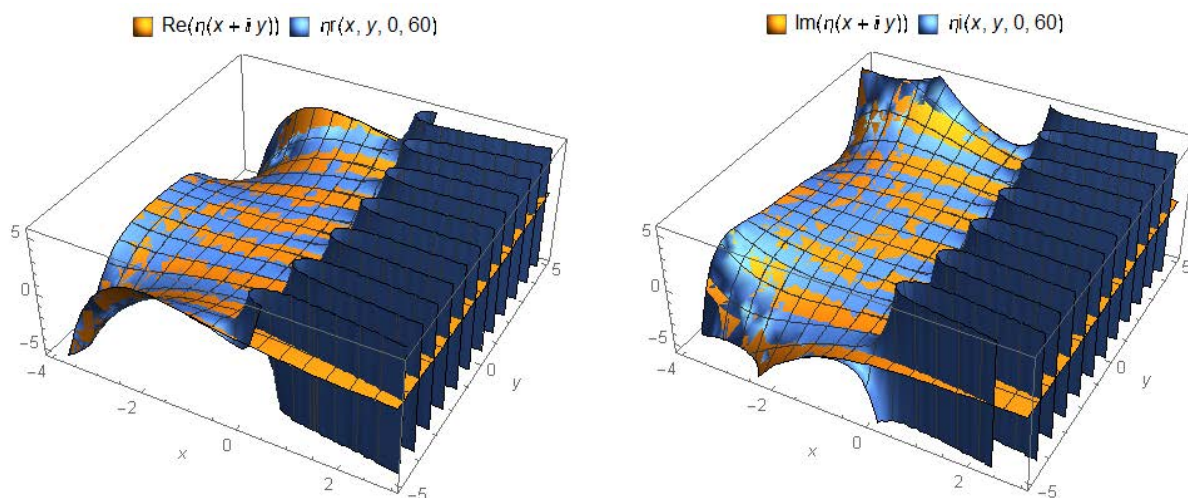
$$\eta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^r (-1)^r \frac{\log^s(r-s+1)}{(r-s+1)^c} \frac{(z-c)^s}{s!} \quad \text{但し、} 0^0 = 1$$

他方、Lemma 8・2・0 から

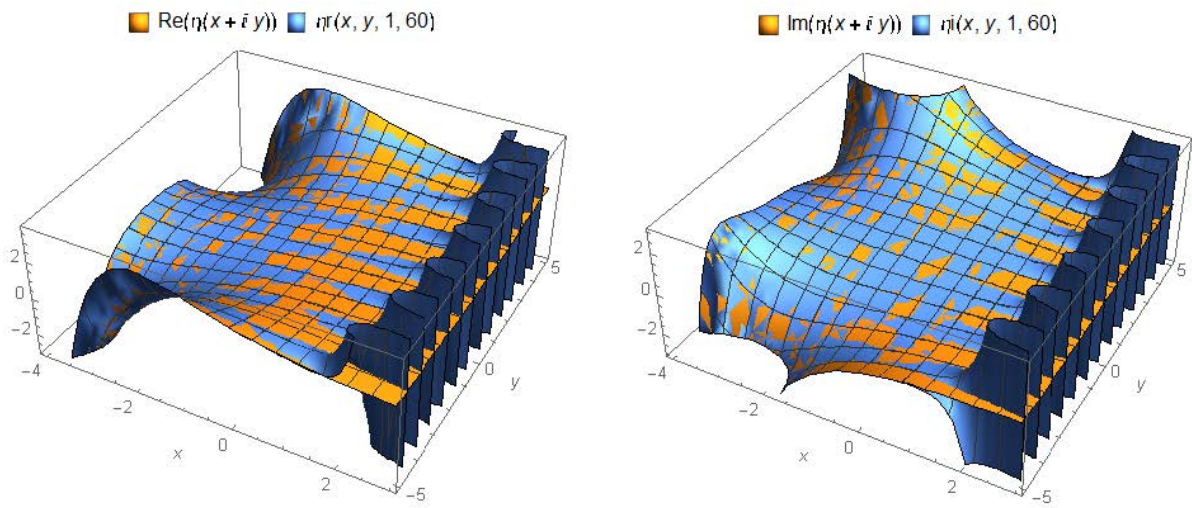
$$(x-c+iy)^s = \sum_{t=0}^{\lceil \frac{s-1}{2} \rceil} (-1)^t \binom{s}{2t} (x-c)^{s-2t} y^{2t} + i \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{s}{2t+1} (x-c)^{s-2t-1} y^{2t+1}$$

これを上の $(z-c)^s$ に代入し 実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i と記述して 与式を得る。

$c=0$ としてこの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。これらはまさしく 公式 8・3・1 の図の反対側である。



更に驚いたことに、この公式においては収束軸が可動である。例えば、 $c=1$ としてこの両辺を図示すると次のように 収束軸が $x=0$ から $x=2$ に移動している。



色々作図した結果、本公式の収束軸は可動であり、その横座標は $x = 2c$ であることが分った。

8・4 デイリクレ・マクローリン級数

前2節における公式はどれも煩雑なものばかりであった。その原因は Lemma 8・2・0 にあったと思われる。そこで本節では、この Lemma に依存しない公式を提示する。

公式 8・4・1

デイリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、 $x > 0$ について次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\eta_i(x, y) = - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r+1}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、 $0^0 = 1$ とする。

証明

$$\eta(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-(x+iy)\log s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^x} e^{-iy \log s}$$

i.e.

$$\eta(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} \cos(y \log s)}{s^x} - i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} \sin(y \log s)}{s^x}$$

ここで、 $\cos(y \log s), \sin(y \log s)$ を y に関してマクローリン展開すれば

$$\cos(y \log s) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \log^{2r} s \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\sin(y \log s) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \log^{2r+1} s \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

これらを上に代入すれば

$$\eta(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^x} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \log^{2r} s \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$- i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^x} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \log^{2r+1} s \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

行列を入れ替えて

$$\eta(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s-1} \frac{\log^{2r} s}{s^x} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$- i \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{r+s-1} \frac{\log^{2r+1} s}{s^x} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

s の初期値を1から0に変更して

$$\eta(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

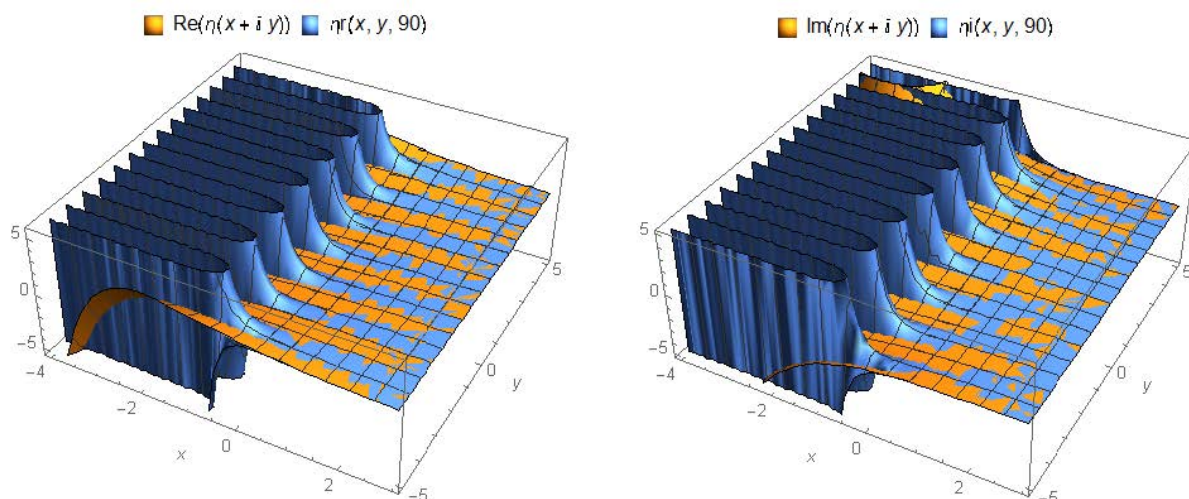
$$-i \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r+1}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i と記述して 与式を得る。

Note

この公式は、実数部 x に関してはディリクレ級数であり、虚数部 y に関してはマクローリン級数である。それ故、これをディリクレ・マクローリン級数と呼ぶことにする。この公式はこれまでで最も簡明である。

これを図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。マクローリン展開であるにもかかわらず、収束円は見られず 収束軸 $x=0$ が見られる。



公式 8・4・1の欠点

この公式は、 x に関してはディリクレ級数であり、 y に関してはマクローリン級数である。そこで、臨界線 $x=1/2$ 上でこれらの級数を先頭から数項ほど展開してみよう。

まず、数式処理ソフト *Mathematica* の関数 `Series[]` を用いて左辺を展開すると、

```
Normal[N[Series[DirichletEta[1/2 + i y], {y, 0, 7}]]];
ComplexExpand[%]
0.604899 + 0.03368 y^2 + 0.00134612 y^4 - 0.000019988 y^6
+ i {0. + 0.193289 y + 0.000498958 y^3 - 0.000271163 y^5 - 2.27817 x 10^-6 y^7}
```

次に、 Σ の上限をそれぞれ1000として右辺の先頭4項を展開すると、

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Normal[N[Series[ηr[1/2, y, 1000], {y, 0, 7}]]]
0.620698 - 0.34348 {0.+ y}^2 + 1.50158 {0.+ y}^4 - 2.38728 {0.+ y}^6
```

```
Normal[N[Series[ηi[1/2, y, 1000], {y, 0, 7}]]]
0.0841258 {0.+ y} + 0.869033 {0.+ y}^3 - 2.07337 {0.+ y}^5 + 2.35631 {0.+ y}^7
```

両計算結果を比較すると、一致しているのは実数部の先頭1桁のみであり、第2項以降は全く一致していない。この原因を調べるため、右辺の各係数を計算してみた。すると、

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
```

$$cr[r, x, m] := \sum_{s=0}^m (-1)^{r+s} \frac{(\text{Log}[s+1])^{2r}}{(s+1)^x} \frac{1}{(2r)!}$$

$$ci[r, x, m] := -\sum_{s=0}^m (-1)^{r+s} \frac{(\text{Log}[s+1])^{2r+1}}{(s+1)^x} \frac{1}{(2r+1)!}$$

```
N[cr[0, 1/2, 350000000000]]      N[ci[0, 1/2, 310000000000000]]
0.604899                          0.193289 + 0. i
```

実数部と虚数部の各初項の正しい値を得るために、それぞれこれだけの項数が必要であった。第2項以下はアンダーフローの発生により正しく計算出来なかった。これらは ① 収束速度が非常に遅いこと及び ② 係数が小さすぎることに起因する。公式 8・4・1 は数値計算的にはあまり良い級数ではない。

この欠点を補うためには、この公式を加速すれば良い。そこで、オイラー変換による直列加速法を用いてこれら二重級数の加速を試みる。なお、オイラー変換はクノップ変換の1種である。直列加速法については「13 多重級数の収束加速」(アラカルト編)を、クノップ変換については「10 二重関数項級数による収束加速と総和法」(アラカルト編)を参照されたい。

公式 8・4・1' (直列加速)

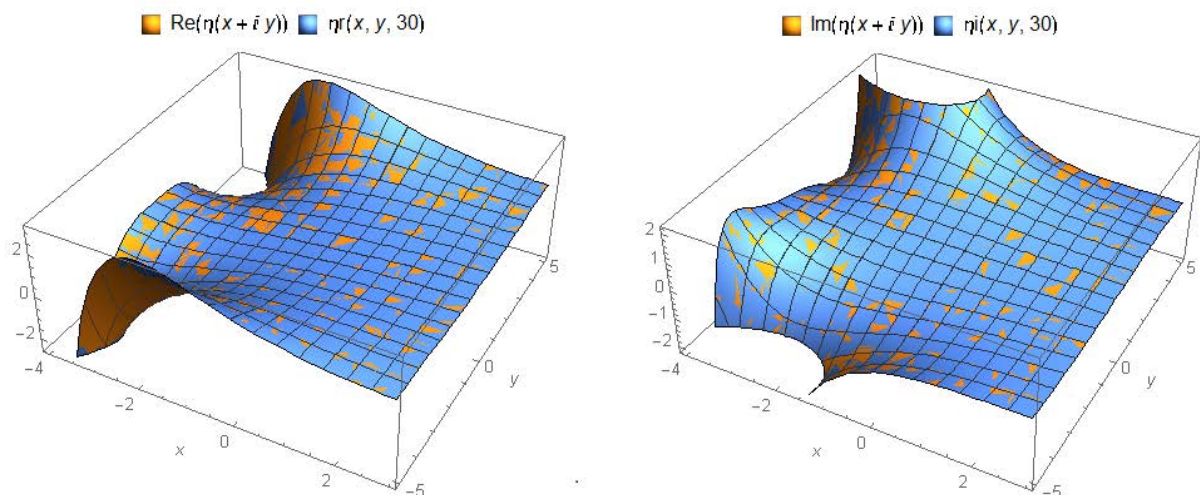
ディリクレ・イータ関数 $\eta(x, y)$ の実数部と虚数部をそれぞれ η_r, η_i とするとき、次式が成立する。

$$\eta_r(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^r \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} (-1)^r \frac{\log^{2r-2s}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{y^{2r-2s}}{(2r-2s)!}$$

$$\eta_i(x, y) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^r \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} (-1)^r \frac{\log^{2r-2s+1}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{y^{2r-2s+1}}{(2r-2s+1)!}$$

但し、 $0^0 = 1$ とする。

これらの両辺を図示すると次頁のようになる。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。公式 8・4・1 は加速されると同時に左方向に解析接続されており、その結果、収束軸は消滅している。



この公式により臨界線 $x=1/2$ 上の右辺の先頭4項を計算するとそれぞれ次のようになる。
 これらの係数は 左辺を直接展開した結果 と正確に一致している。

$$\text{Normal}\left[\text{N}\left[\text{Series}\left[\eta_r\left[\frac{1}{2}, y, 40\right], \{y, 0, 7\}\right]\right]\right]$$

$$0.604899 + 0.033638 (0 + y)^2 + 0.00134612 (0 + y)^4 - 0.000019988 (0 + y)^6$$

$$\text{Normal}\left[\text{N}\left[\text{Series}\left[\eta_i\left[\frac{1}{2}, y, 35\right], \{y, 0, 7\}\right]\right]\right]$$

$$0.193289(0.+y) + 0.000498958(0.+y)^3 - 0.000271163(0.+y)^5 - 2.27817 \times 10^{-6}(0.+y)^7$$

Note

公式 8・4・1 の係数のみの加速は次による。

η_r, η_i の係数をそれぞれ $c_r(r, x), c_i(r, x)$ とするとき、

$$c_r(r, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{1}{(2r)!}$$

$$c_i(r, x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r+1}(s+1)}{(s+1)^x} \frac{1}{(2r+1)!}$$

但し、 $0^0 = 1$ とする。

8.5 リーマン・ゼータ関数の非自明な零点

前節 公式 8.4.1 を用いて、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点に関する次の定理を得る。

定理 8.5.1

リーマン・ゼータ関数の非自明な零点は、次の連立方程式の実数解として与えられる。

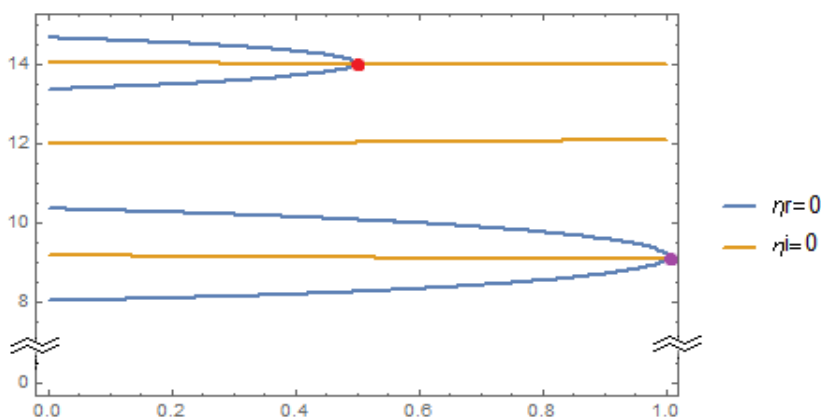
$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r}(s+1)}{(s+1)^x (2r)!} \right\} y^{2r} = 0 \\ - \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r+1}(s+1)}{(s+1)^x (2r+1)!} \right\} y^{2r+1} = 0 \end{cases}$$

但し、 $0^0 = 1$, $0 < x < 1$ 。

証明

領域 $0 < x < 1$ においてリーマン・ゼータ関数とディリクレ・イータ関数の零点は共通であることは周知である。よって、公式 8.4.1 において $\eta_r(x, y) = \eta_i(x, y) = 0$, $0 < x < 1$ なる実数解 (x, y) はリーマン・ゼータ関数の零点である。

前節 公式 8.4.1' を用いて $\eta_r(x, y) = \eta_i(x, y) = 0$ なる等高線図を描くと次のようになる。赤点は非自明な零点で、紫点は η 固有の零点である。



この定理は第1節の 定理 8.1.2 と実質的に同じものである。しかしながら、定理 8.1.2 が x に関しても y に関しても超越方程式であったのに対し、この **定理 8.5.1 は y に関しては代数方程式である**。そうであるならば、代数方程式論が応用できるように思われる。

リーマン仮説と同値な仮説

例えば、代数方程式論が応用できそうで且つリーマン仮説と同値な次の仮説が提示できる。

仮説 8.5.2

定理 8.5.1 の連立方程式は y に関して重根を持たない。

同値性の証明

リーマン仮説が偽であるとせよ。すると「7 完備化されたリーマン・ゼータ」(リーマン・ゼータ偏) 定理 7.4.1 により、リーマン・ゼータ関数は次のような零点を少なくとも1組持つ。

$$1/2 + \alpha_1 \pm i\beta_1, \quad 1/2 - \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad (0 < \alpha_1 < 1/2)$$

β_1 は重根であり、このことは本仮説に反する。よってリーマン仮説は真でなければならない。

臨界線上の零点

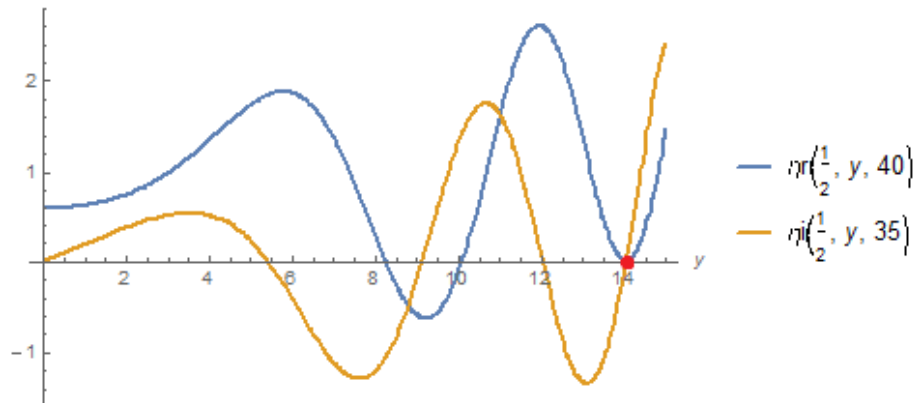
定理 8・5・1 に $x=1/2$ を与えれば次のようになる。

$$\left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r}(s+1)}{\sqrt{s+1} (2r)!} \right\} y^{2r} \right. = 0 \quad (5.2r)$$

$$\left. - \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{r+s} \frac{\log^{2r+1}(s+1)}{\sqrt{s+1} (2r+1)!} \right\} y^{2r+1} \right\} = 0 \quad (5.2i)$$

但し、 $0^0 = 1$ 。

前節 公式 8・4・1' を用いて臨界線上の実数部と虚数部を描くと次のようになる。赤点が臨界線上の零点であり、この連立方程式の最初の解である。



(5.2r), (5.2i) において $\{ \}$ 内は定数であるから、これらは代数方程式となる。即ち、**臨界線上の零点を得ることは代数方程式 (5.2r), (5.2i) をそれぞれ解くことに帰着する。**このことは上記の連立方程式を解くよりも 更に容易であるように思われる。

2019.10.25

Kano Kono

宇宙人の数学