9 リーマン・ゼータ等の実数部虚数部別ベキ級数

要 旨

本章では、ディリクレ・イータ関数、ディリクレ・ベータ関数、リーマン・ゼータ関数および正則化されたリーマン・ゼータ関数について、それらの実数部及び虚数部をそれぞれ冪級数に展開する。

準 備

このためには、「14 複素関数の実数部虚数部別テイラー展開 」(アラカルト編) 定理 14・1・2 を用いる。再掲すれば次のとおり。

定理 14・1・2（再掲）

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

するとこの実数部と虚数部をそれぞれ $f_r(x,y)$, $f_i(x,y)$ とするとき、次式が成立する。

$$f_r(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$f_i(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$。

Mathematica における 0^0 の扱い

本章では描画や計算に数式処理ソフト *Mathematica* を使用しているが、計算や描画に先立ち次のオプションを指定している。

```
Unprotect[Power]; Power[0,0] = 1;
```

9·1 $\eta(z)$ のマクローリン級数

ディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ は半平面 $Re(z)>0$ では次のように定義される

$$\eta(z)=\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t-1}e^{-z\log t}=\frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+-\cdots \tag{1.0}$$

この関数は次のようにマクローリン展開できる。

公式 9·1·1

ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy)$ とするとき、半平面 $x>0$ において次式が成立する。

$$\eta(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^s(t+1)\frac{(-1)^s z^s}{s!} \tag{1.z}$$

$$Re\{\eta(z)\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s}(t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.r}$$

$$Im\{\eta(z)\}=-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s+1}(t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.i}$$

但し、$0^0=1$

証明

「26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分」（超微積分偏 ）公式 26·3·2h によれば、$Re(z)>0$ のとき、$\eta(z)$ の高階微分は次のようであった。

$$\eta^{(s)}(z)=\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}+(-1)^{-s}\sum_{t=2}^{\infty}(-1)^{t-1}\frac{\log^s t}{t^z}\qquad s=0,1,2,\cdots$$

t の初期値を 2 から 1 に変更数れば

$$\eta^{(s)}(z)=\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}+(-1)^{-s}\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t}\frac{\log^s (t+1)}{(t+1)^z}\qquad s=0,1,2,\cdots$$

s が非整数である可能性を考慮しないならば、

$$\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}=(-1)^0\frac{\log^s(0+1)}{(0+1)^z}=\begin{cases}1 & for\ \ s=0 \qquad (\because\ 0^0=1)\\ 0 & for\ \ s=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

すると t の初期値を 1 から 0 に変更でき、

$$\eta^{(s)}(z)=(-1)^s\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t\log^s(t+1)}{(t+1)^z}\qquad s=0,1,2,\cdots\quad 但し、0^0=1$$

$z=0$ を代入すれば

$$\eta^{(s)}(0)=(-1)^s\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^s(t+1)\qquad s=0,1,2,\cdots\quad 但し、0^0=1 \tag{1.s}$$

よって $\eta(z)$ のマクローリン展開は

$$\eta(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^s(t+1)\frac{(-1)^s z^s}{s!} \tag{1.z}$$

次に、(1.s) より、

$$\eta^{(2r+s)}(0)=(-1)^s\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s}(t+1)\qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

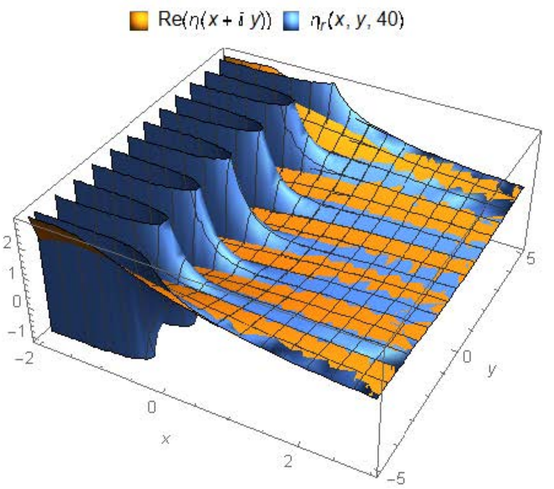
$$\eta^{(2r+s+1)}(0)=(-1)^{s+1}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s+1}(t+1)\qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

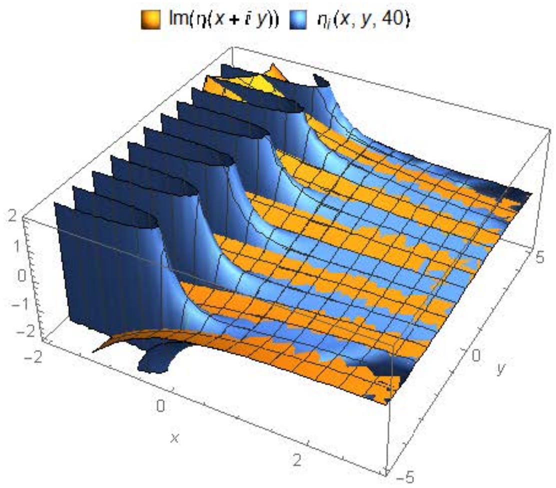
定理 14･1･2 をこれらに適用すれば

$$Re\{\eta(z)\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s}(t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}\tag{1.r}$$

$$Im\{\eta(z)\}=-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s+1}(t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\tag{1.i}$$

(1.r), (1.i) の両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。$x=0$ のところに収束軸が観察される。





これらの級数は収束が非常に遅いため、両辺の重なり具合はあまり良くない。実際、点 $(3,5)$ における (1.r), (1.i) の関数値を計算すると次のとおり。

```
N[{Re[η[3+ⅈ 5]], ηr[3, 5, 40]}]
{1.13283, 1.13283}

N[{Im[η[3+ⅈ 5]], ηi[3, 5, 59]}]
{-0.00976753, -0.00976591}
```

公式 9･1･1の加速形(係数のみ)

そこで、(1.r), (1.i) の収束加速を試みる。三重級数全体を加速するのが常道であるが、ここでは最も収束の遅い係数部分のみをオイラー変換によって加速する。それは次のようになる。なお、オイラー変換については「 10 二重関数項級数による収束加速と総和法 」(アラカルト編) を参照されたい。

$$\eta(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(-1)^t}{2^{k+1}}\log^s(t+1)\right\}\frac{(-1)^s z^s}{s\,!}$$

$$Re\{\eta(z)\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(-1)^t}{2^{k+1}}\log^{2r+s}(t+1)\right\}\frac{(-1)^s x^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

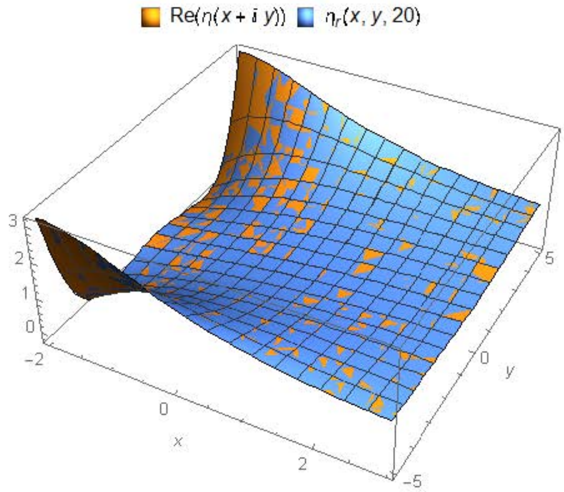
$$Im\{\eta(z)\}=-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(-1)^t}{2^{k+1}}\log^{2r+s+1}(t+1)\right\}\frac{(-1)^s x^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

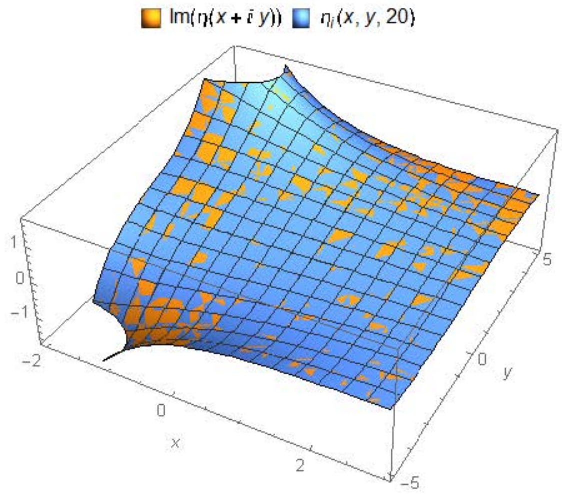
Re, Im の両辺を図示すると次のようである。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;     Cm[n_, r_] := Binomial[n, r]
```

$$\eta_r[x\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{t=0}^{k}\mathrm{Cm}[k, t]\,\frac{(-1)^t}{2^{k+1}}\,(\mathrm{Log}[t+1])^{2r+s}\right)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\eta_i[x\_, y\_, m\_] := -\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{t=0}^{k}\mathrm{Cm}[k, t]\,\frac{(-1)^t}{2^{k+1}}\,(\mathrm{Log}[t+1])^{2r+s+1}\right)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$





左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なって斑に見えている。更に、上記の収束域が半平面から全平面に解析接続されていることが見て取れる。

9·2 $\beta(z)$ のマクローリン級数

ディリクレ・ベータ関数はディリクレ L 関数の一種であり、半平面 $Re(z)>0$ で次のように定義される

$$\beta(z)=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t}{(2t+1)^z}=1-\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}-\frac{1}{7^z}+-\cdots \tag{2.0}$$

この関数は次のようにマクローリン展開できる。

公式 9·2·1

ディリクレ・ベータ関数を $\beta(z)$ $(z=x+iy)$ とするとき、半平面 $x>0$ において次式が成立する。

$$\beta(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^s(2t+1)\frac{(-1)^s z^s}{s!} \tag{2.z}$$

$$Re\{\beta(z)\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s}(2t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{2.r}$$

$$Im\{\beta(z)\}=-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^{2r+s+1}(2t+1)\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{2.i}$$

但し、$0^0=1$

証明

「26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分 」（超微積分偏 ）公式 26·4·2h によれば、$Re(z)>0$ のとき、$\beta(z)$ の高階微分は次のようであった。

$$\beta^{(s)}(z)=\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}+(-1)^{-s}\sum_{t=2}^{\infty}(-1)^{t-1}\frac{\log^s(2t-1)}{(2t-1)^z} \qquad s=0,1,2,\cdots$$

t の初期値を 2 から 1 に変更すれば

$$\beta^{(s)}(z)=\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}+(-1)^{-s}\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t}\frac{\log^s(2t+1)}{(2t+1)^z} \qquad s=0,1,2,\cdots$$

s が非整数である可能性を考慮しないならば、

$$\frac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}=(-1)^0\frac{\log^s(0+1)}{(0+1)^z}=\begin{cases}1 & for\ \ s=0 \qquad (\because\ 0^0=1)\\ 0 & for\ \ s=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

すると t の初期値を 1 から 0 に変更でき、

$$\beta^{(s)}(z)=(-1)^{-s}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{t}\frac{\log^s(2t+1)}{(2t+1)^z} \qquad s=0,1,2,\cdots \qquad \text{但し、}0^0=1$$

$z=0$ を代入すれば

$$\beta^{(s)}(0)=(-1)^{-s}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{t}\log^s(2t+1) \qquad s=0,1,2,\cdots \qquad \text{但し、}0^0=1 \tag{2.s}$$

よって $\beta(z)$ のマクローリン展開は

$$\beta(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\log^s(2t+1)\frac{(-1)^s z^s}{s!} \tag{2.z}$$

次に、(2.s) より、

$$\beta^{(2r+s)}(0) = (-1)^{-s}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{t}\log^{2r+s}(2t+1) \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

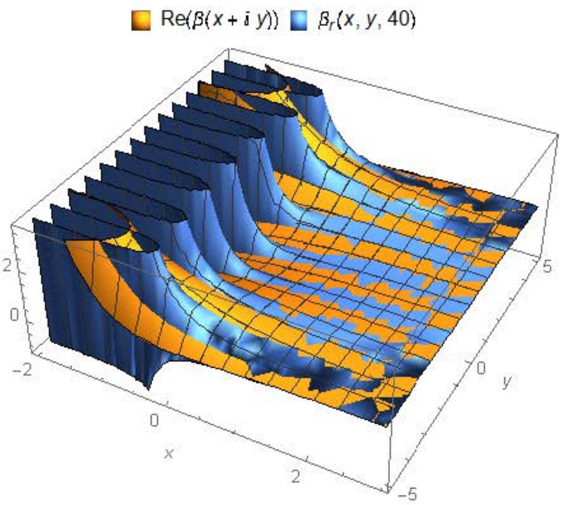
$$\beta^{(2r+s+1)}(0) = (-1)^{-s-1}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{t}\log^{2r+s+1}(2t+1) \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

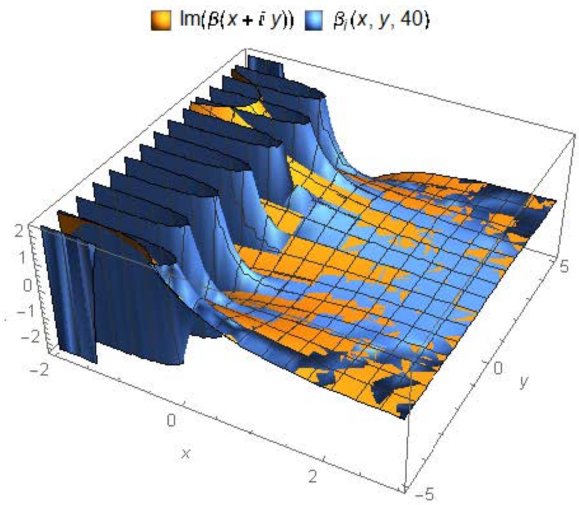
定理 14･1･2 をこれらに適用すれば

$$Re\{\beta(z)\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{t}\log^{2r+s}(2t+1)\frac{(-1)^{s}x^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r}}{(2r)!} \tag{2.r}$$

$$Im\{\beta(z)\} = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{t}\log^{2r+s+1}(2t+1)\frac{(-1)^{s}x^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{2.i}$$

(2.r), (2.i) の両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。$x=0$ のところに収束軸が観察される。





これらの級数は収束が非常に遅いため、両辺の重なり具合はあまり良くない。実際、点 $(3,5)$ における (2.r), (2.i) の関数値を計算すると次のとおり。

```
N[{Re[β[3+i 5]], β_r[3, 5, 51]}]
    {0.9748363 , 0.974837}

N[{Im[β[3+i 5]], β_i[3, 5, 44]}]
    {-0.03407 , -0.034072}
```

公式 9･2･1の加速形(係数のみ)

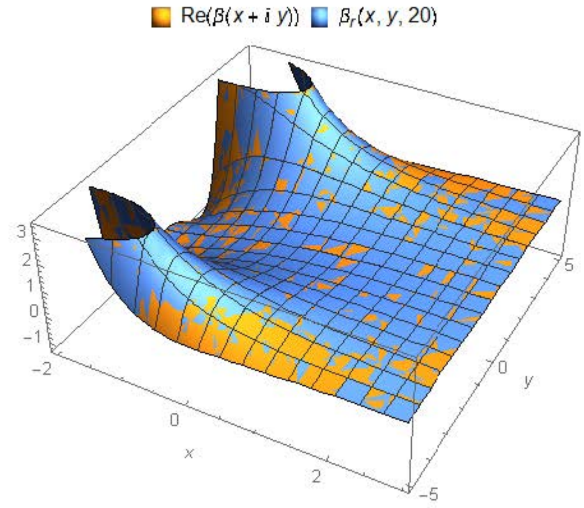
そこで、(2.r), (2.i) の収束加速を試みる。三重級数全体を加速するのが常道であるが、ここでは最も収束の遅い係数部分のみをオイラー変換によって加速する。それは次のようになる。

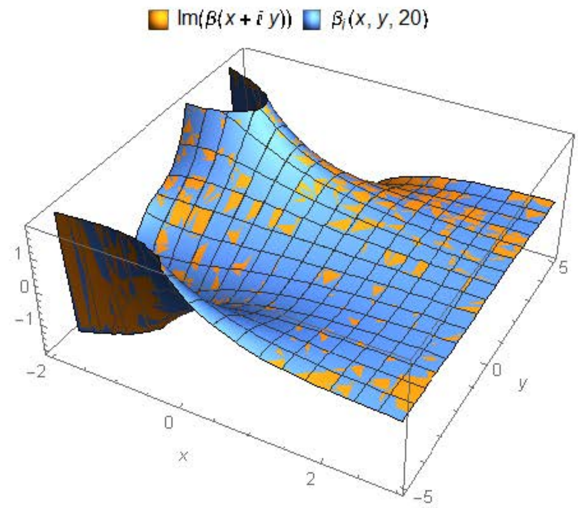
$$\beta(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(-1)^{t}}{2^{k+1}}\log^{s}(2t+1)\right\}\frac{(-1)^{s}z^{s}}{s!}$$

$$Re\{\beta(z)\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(-1)^{t}}{2^{k+1}}\log^{2r+s}(2t+1)\right\}\frac{(-1)^{s}x^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r}}{(2r)!}$$

$$Im\{\beta(z)\} = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(-1)^{t}}{2^{k+1}}\log^{2r+s+1}(2t+1)\right\}\frac{(-1)^{s}x^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

Re, Im の両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なって斑に見えている。更に、上記の収束域が半平面から全平面に解析接続されていることが見て取れる。





9･3 ζ(z) のローラン級数

リーマン･ゼータ関数は $Re(z)>1$ においては p - 級数と呼ばれる次の級数で定義される。

$$\zeta(z) = \sum_{t=1}^{\infty} e^{-z\log t} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots \tag{3.0}$$

この関数は１の周りで次のようにローラン展開できる。

公式 9･3･1

リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ ($z=x+iy$)、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=1$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \frac{(-1)^s (z-1)^s}{s!} \tag{3.z}$$

$$Re\{\zeta(z)\} = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_{2r+s} \frac{(-1)^s (x-1)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{3.r}$$

$$Im\{\zeta(z)\} = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_{2r+s+1} \frac{(-1)^s (x-1)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{3.i}$$

但し、$0^0 = 1$

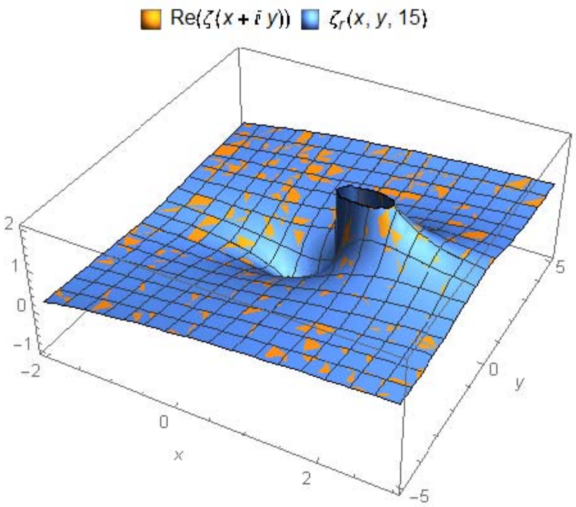
証明

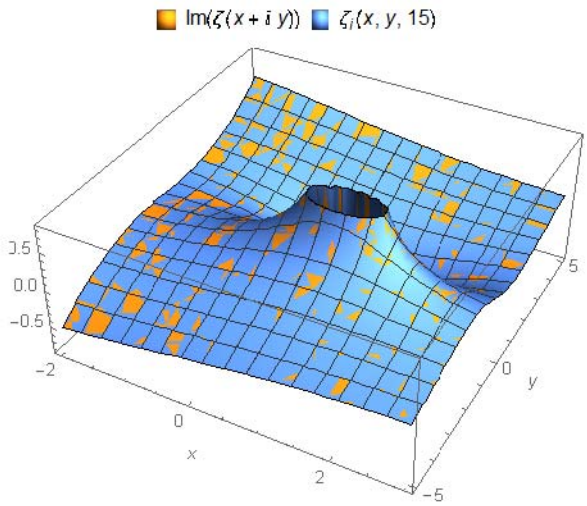
$z=1$ を除く複素平面で次式が成立することが知られている。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \frac{(-1)^s (z-1)^s}{s!} \tag{3.z}$$

第1項を実数部と虚数部に分離し、第2項に 定理14･1･2 を適用して与式を得る。

(3.r), (3.i) の両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なって斑に見えている。更に、上記の収束域が $Re(z)>1$ から全平面に解析接続されていることが見て取れる。





9・4 (z−1)ζ(z) のテイラー級数

前節 で見たように、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ は $z=1$ に特異点が存在する。そこで、これに $(z-1)$ を乗じた関数 $(z-1)\zeta(z)$ を作る。すると、この関数は全複素平面上で正則となる。この正則化された関数 $(z-1)\zeta(z)$ は、1 の周りで次のようにテイラー展開できる。

公式 9・4・1

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(z)$ $(z=x+iy)$ 、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$(z-1)\zeta(z)=1-\sum_{s=1}^{\infty}s\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!} \tag{4.z}$$

$$Re\{(z-1)\zeta(z)\}=1-\sum_{s=1}^{\infty}s\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)\gamma_{2r+s-1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{4.r}$$

$$Im\{(z-1)\zeta(z)\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)\gamma_{2r+s}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{4.i}$$

但し、$0^0=1$

証明

$z=1$ を除く全複素平面で次式が成立することが知られている。

$$\zeta(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!} \tag{3.z}$$

これより、

$$(z-1)\zeta(z)=1-\sum_{s=1}^{\infty}s\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!} \tag{4.z}$$

ここで $f(z)$ を

$$f(z)=(z-1)\zeta(z)=1-\sum_{s=1}^{\infty}s\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(z-1)^s}{s!}$$

とすれば、

$$f^{(s)}(1)=\begin{cases}1 & s=0\\ -(-1)^s s\gamma_{s-1} & s=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

これより

$$f^{(2r+s)}(1)=-(-1)^s(2r+s)\gamma_{2r+s-1} \qquad \begin{cases}r=1,2,3,\cdots\\ s=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

$$f^{(2r+s+1)}(1)=-(-1)^{s+1}(2r+s+1)\gamma_{2r+s} \qquad \begin{cases}r=0,1,2,\cdots\\ s=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

定理 14・1・2 をこれらに適用すれば

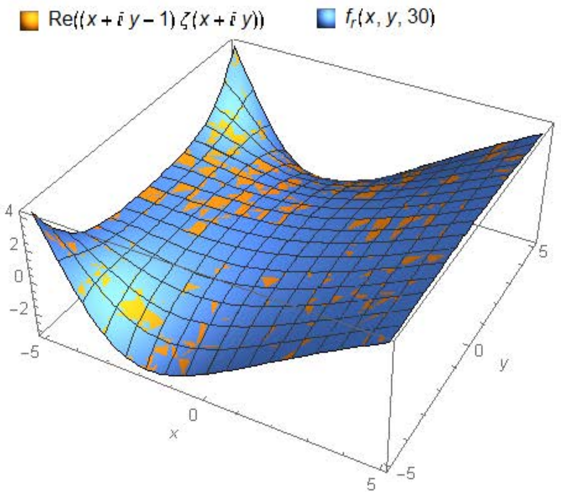
$$f_r(x,y) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} s\gamma_{s-1}\frac{(-1)^s(x-1)^s}{s\,!}$$

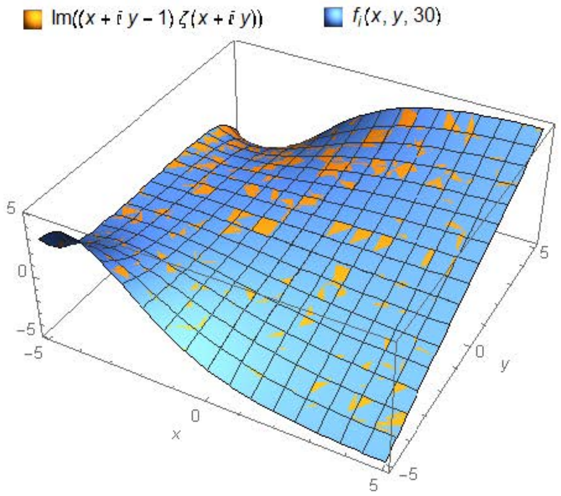
$$- \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+s)\gamma_{2r+s-1}\frac{(x-1)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$f_i(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}(2r+s+1)\gamma_{2r+s}\frac{(x-1)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

$f_r(x,y)$, $f_i(x,y)$ を $Re\{(z-1)\zeta(z)\}$, $Im\{(z-1)\zeta(z)\}$ に書き換えて与式を得る。

(4.r), (4.i) の両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なって斑に見えている。更に、これらは全複素平面上で成立していることも明らかである。





2020.01.10

Kano Kono

宇宙人の数学