10 ディリクレ級数とテイラー級数

要　旨

(1) ディリクレ級数はその収束域内でテイラー級数に変換できる。
(2) ディリクレ級数の係数とテイラー展開の中心を実数に限定すれば、実部・虚部別のテイラー級数が得られる。
(3) 双曲線関数は無限または有限の一般ディリクレ級数で表される。

10・1 一般ディリクレ級数とテイラー級数

定義 10・1・0（一般ディリクレ級数）

R を実数集合とし、$\lambda_t \in R$, $\lambda_t < \lambda_{t+1}$ 　$t=1,2,3,\cdots$ とし、a_t を任意の複素数とする。
このとき、級数

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-\lambda_t z}$$

を **一般ディリクレ級数** と言う。

一般ディリクレ級数はその収束域内でテイラー級数に変換できる。次はその変換公式を示す。

公式 10・1・1

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が一般ディリクレ級数に展開されるとき、その収束域に属する任意の複素数 z,c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-\lambda_t z} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s!} \tag{1.1}$$

証明

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-\lambda_t z}$$

$e^{-\lambda_t z}$ を z に関して c の周りでテイラー展開すれば

$$e^{-\lambda_t z} = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

これを右辺に代入してΣを入れ替えて与式を得る。

Note

関数 $f(z)$ の c における s 階微係数を $f^{(s)}(c)$ と表すとき、明らかに次式が成立する。

$$f^{(s)}(c) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s \qquad s=0,1,2,\cdots \tag{1.1c}$$

例1 $\coth z - 1$

$\coth z$ は $Re(z)>0$ について次のようにフーリエ展開される。

$$\coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{1+e^{-2z}}{1-e^{-2z}} = \left(1+e^{-2z}\right)\left(1+e^{-2z}+e^{-4z}+e^{-6z}+\cdots\right)$$
$$= 1 + \left(2e^{-2z} + 2e^{-4z} + 2e^{-6z} + 2e^{-8z} + - \cdots\right)$$

これより

$$\coth z - 1 = \sum_{t=1}^{\infty} 2\, e^{-2tz} \qquad Re(z) > 0$$

右辺において $a_t = 2$, $\lambda_t = 2t$ と置けば、$\lambda_t < \lambda_{t+1}$ であるから、これは一般ディリクレ級数である。 よって 公式 により

$$\coth z - 1 = \sum_{t=1}^{\infty} 2\, e^{-2tz} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-2tc}(-2t)^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

$z=2+1.5i$ における3者の関数値を計算すると次のとおり。中央が一般ディリクレ級数で右端が $c=1+i$ の周りのテイラー級数である。3者とも正確に一致している。

N[Coth[2 + 1.5 ⅈ] - 1]	N[f[2 + 1.5 ⅈ, 20]]	N[f[2 + 1.5 ⅈ, 1 + ⅈ, 77]]
-0.0356315 - 0.00498689 ⅈ	-0.0356315 - 0.00498689 ⅈ	-0.0356315 - 0.00498689 ⅈ

また、(1.1c) より次が成立しなければならない。

$$(\coth c)^{(s)} = \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-2tc}(-2t)^s \quad \left(=: Ch_s(c)\right) \qquad s=1,2,3,\cdots$$

$c=1+i$ のとき $s=1,2$ について両辺を計算すると次のようになる。1階 2階とも両辺は一致している。

The 1st order	N[{Coth'[1 + ⅈ] {0.293911 + 0.377797 ⅈ	, Ch₁[1 + ⅈ, 12]}] , 0.293911 + 0.377797 ⅈ}
The 2nd order	N[{Coth''[1 + ⅈ] {-0.674671 - 0.527944 ⅈ	, Ch₂[1 + ⅈ, 12]}] , -0.674671 - 0.527944 ⅈ}

同様にして、以下の例が得られる。

例2 $\tanh z - 1$

$$\tanh z - 1 = \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^t e^{-2tz} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^t e^{-2tc}(-2t)^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

例3 $\operatorname{csch} z$

$$\operatorname{csch} z = \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-(2t-1)z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2e^{-c(2t-1)}\left\{-(2t-1)\right\}^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

例4 $\operatorname{sech} z$

$$\operatorname{sech} z = \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^{t-1} e^{-(2t-1)z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} 2(-1)^{t-1} e^{-c(2t-1)}\left\{-(2t-1)\right\}^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

ディリクレ級数の係数 a_t とテイラー展開の中心 c を実数に限定すれば、実部・虚部別のテイラー級数が得られる。

公式 10・1・2

$f(z)=\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t z}$ ($z=x+iy$) を一般ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t $t=1,2,3,\cdots$ を任意の実数とするとき、収束範囲内において次式が成立する。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

証明

$$f(z)=\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t z}$$

$$f(x,y)=\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t(x+iy)}=\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t x}\{\cos(\lambda_t y)-i\sin(\lambda_t y)\}$$

i.e.

$$f(x,y)=\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t x}\cos(\lambda_t y)-i\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t x}\sin(\lambda_t y)$$

これより

$$u(x,y)=\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t x}\cos(\lambda_t y)$$

$$v(x,y)=-\sum_{t=1}^{\infty}a_t e^{-\lambda_t x}\sin(\lambda_t y)$$

$\cos(\lambda_s y)$, $\sin(\lambda_s y)$ をそれぞれ y に関してマクローリン展開すれば

$$\cos(\lambda_t y)=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda_t^{2r}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\sin(\lambda_s y)=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda_t^{2r+1}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

次に、$e^{-\lambda_t x}$ を x に関して 実数 c の周りでテイラー展開すれば

$$e^{-\lambda_t x}=\sum_{s=0}^{\infty}e^{-c\lambda_t}(-1)^s\lambda_t^s\frac{(x-c)^s}{s!}$$

これらを上に代入すれば

$$u(x,y)=\sum_{t=1}^{\infty}a_t\sum_{s=0}^{\infty}e^{-c\lambda_t}(-1)^s\lambda_t^s\frac{(x-c)^s}{s!}\sum_{r=0}^{\infty}\lambda_t^{2r}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{t=1}^{\infty} a_t \sum_{s=0}^{\infty} e^{-c\lambda_t} (-1)^s \lambda_t^s \frac{(x-c)^s}{s\,!} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_t^{2r+1} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

Σを並べ替えて

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-1)^s \lambda_t^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} e^{-c\lambda_t} (-1)^{s+1} \lambda_t^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

ここで

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-1)^s \lambda_t^{2r+s} := f^{(2r+s)}(c)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} e^{-c\lambda_t} (-1)^{s+1} \lambda_t^{2r+s+1} := f^{(2r+s+1)}(c)$$

と置けば、

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-1)^s \lambda_t^s := f^{(s)}(c)$$

よって、テイラーの定理により

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(c) \frac{(z-c)^s}{s\,!} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-1)^s \lambda_t^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

そして

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-1)^s \lambda_t^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-1)^{s+1} \lambda_t^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

例 $a_t = (-1)^{t-1}$, $\lambda_t = 1.1^t$

一般ディリクレ級数は

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t-1} e^{-1.1^t z}$$

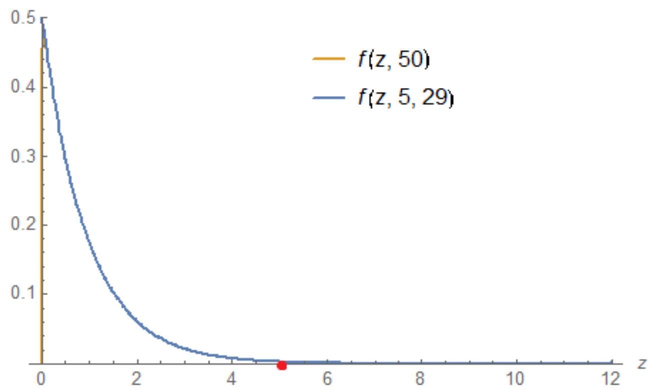
テイラー級数は

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t-1} e^{-c\,1.1^t} \left(-1.1^t\right)^s \frac{(z-c)^s}{s\,!}$$

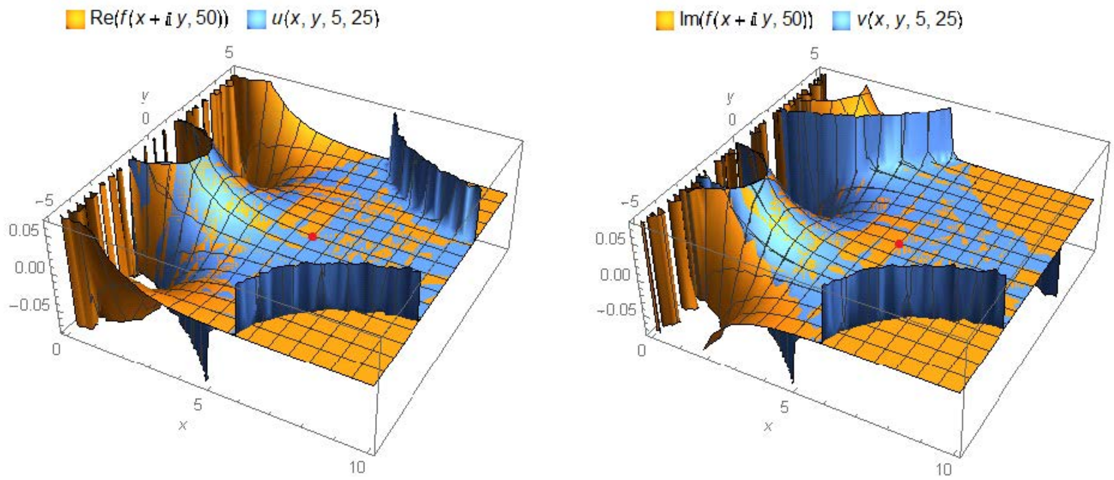
$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t-1} e^{-c\,1.1^t} \left(-1.1^t\right)^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{t-1}e^{-c\,1.1^t}\left(-1.1^t\right)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

$c=5$ のとき、ディリクレ級数とテイラー級数を2D図に描くと次のようになる。橙がディリクレ級数で青がテイラー級数である。赤点は展開の中心点である。$x=0$ に収束軸が観察されるが、両者はぴったり重なっていてディリクレ級数(橙)は殆ど見えない。



$c=5$ のとき、これらの実部と虚部を3D図に描くと次のようになる。左図が実部で右図が虚部である。両図において橙がディリクレ級数で青がテイラー級数である。



テイラー級数の収束域は半径5の円に内接する正方形である。そしてその右外側は漸近展開となっている。

10・2 有限一般ディリクレ級数とテイラー級数

前節の公式は、有限な一般ディリクレ級数についても成り立つ。

公式 10・2・1

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が有限一般ディリクレ級数に展開されるとき、任意の複素数 z, c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{t=1}^{n} a_t e^{-\lambda_t z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n} a_t e^{-c\lambda_t} (-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s!} \tag{2.1}$$

例1 ***cosh z***

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^z}{2} + \frac{e^{-z}}{2}$$

右辺において $a_t = 1/2$, $\lambda_t = (-1)^t$ と置けば、$\lambda_1 < \lambda_2$ であるから、これは有限一般ディリクレ級数である。よって 公式 により

$$\cosh z = \sum_{t=1}^{2} \frac{1}{2} e^{-(-1)^t z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{2} \frac{1}{2} e^{-c(-1)^t} \left\{-(-1)^t\right\}^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$z=3+1.2i$ における3者の関数値を計算すると次のとおり。中央が有限一般ディリクレ級数で右端が $c=1+i$ の周りのテイラー級数である。3者とも正確に一致している。

```
N[Cosh[3 + 1.2 ⅈ]]          N[f[3 + 1.2 ⅈ]]          N[f[3 + 1.2 ⅈ, 1 + ⅈ, 12]]
3.6481 + 9.33705 ⅈ          3.6481 + 9.33705 ⅈ       3.6481 + 9.33705 ⅈ
```

なお、$\cosh z$ は次を零点として持つ。即ち、これはリーマンの Xi 関数の類である。

$$z = \pm \frac{(2r-1)\pi i}{2} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

例2 ***sinh z***

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^z}{2} - \frac{e^{-z}}{2}$$

右辺において $a_t = (-1)^{t-1}/2$, $\lambda_t = (-1)^t$ と置けば、$\lambda_1 < \lambda_2$ であるから、これは有限一般ディリクレ級数である。よって 公式 により

$$\sinh z = \sum_{t=1}^{2} \frac{(-1)^{t-1}}{2} e^{-(-1)^t z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{2} \frac{(-1)^{t-1}}{2} e^{-c(-1)^t} \left\{-(-1)^t\right\}^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$z=3+1.2i$ における3者の関数値を計算すると次のとおり。中央が有限一般ディリクレ級数で右端が $c=1+i$ の周りのテイラー級数である。3者とも正確に一致している。

```
N[Sinh[3 + 1.2 ⅈ]]          N[f[3 + 1.2 ⅈ]]          N[f[3 + 1.2 ⅈ, 1 + ⅈ, 12]]
3.63005 + 9.38345 ⅈ         3.63005 + 9.38345 ⅈ      3.63005 + 9.38345 ⅈ
```

前節と同様に、実部・虚部別のテイラー級数が得られる。

公式 10･2･2

$f(z)=\sum_{t=1}^{n} a_t e^{-\lambda_t z}$ ($z=x+iy$) を有限一般ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t $t=1,2,\cdots,n$ を任意の実数とするとき、次式が成り立つ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n} a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n} a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n} a_t e^{-c\lambda_t}(-\lambda_t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

例 $a_t=(-1)^{t-1}$, $\lambda_t=1.1^t$

有限一般ディリクレ級数は

$$f(z)=\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t-1}e^{-1.1^t z}$$

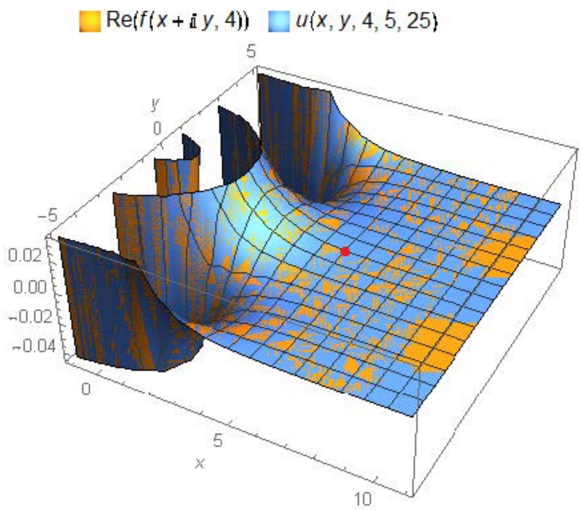
テイラー級数は

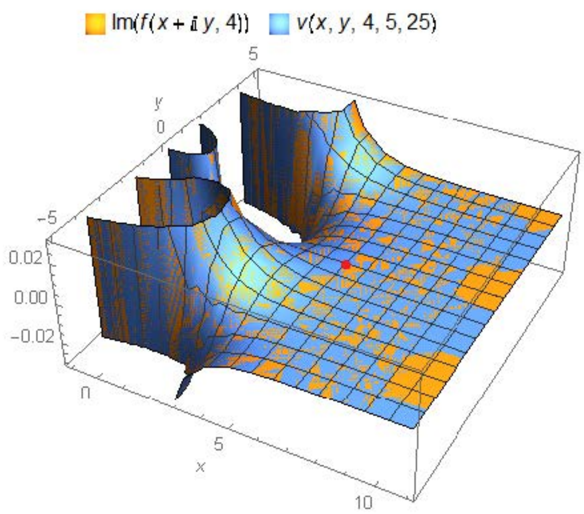
$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t-1}e^{-c\,1.1^t}\left(-1.1^t\right)^s\frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t-1}e^{-c\,1.1^t}\left(-1.1^t\right)^{2r+s}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t-1}e^{-c\,1.1^t}\left(-1.1^t\right)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$n=4$, $c=5$ のとき、これらを3D図に描くと次のようになる。左図が実部で右図が虚部である。両図において橙が有限ディリクレ級数で青がテイラー級数である。赤点は展開の中心点である。





10·3 通常ディリクレ級数とテイラー級数

通常ディリクレ級数は一般ディリクレ級数において $\lambda_t = \log t$ と置いたものであり、次のように定義される。

定義10·3·0（通常ディリクレ級数）

z , a_n $(n=1,2,3,\cdots)$ をそれぞれ複素数とするとき、級数

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^z} = \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \frac{a_3}{3^z} + \frac{a_4}{4^z} + \cdots$$

を **通常ディリクレ級数** と言う。

通常ディリクレ級数はその収束域内でテイラー級数に変換できる。
その変換公式は、公式 10·1·1 において $\lambda_t = \log t$ と置いて直ちに得られる。

公式 10·3·1

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が通常ディリクレ級数に展開されるとき、その収束域に属する任意の複素数 z, c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^s \frac{(z-c)^s}{s!} \tag{3.1}$$

Note

関数 $f(z)$ の c における s 階微係数を $f^{(s)}(c)$ と表すとき、明らかに次式が成立する。

$$f^{(s)}(c) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^s \qquad s=0,1,2,\cdots \tag{3.1c}$$

例 ディリクレ・イータ級数

ディリクレ・イータ級数は、

$$\eta(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t^z}$$

$a_t = (-1)^{t-1}$ であるから、公式により

$$\eta(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t^z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t^c} (-\log t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$z=3+4i$ における3者の関数値を計算すると次のとおり。中央が通常ディリクレ級数で右端が $c=2+2i$ の周りのテイラー級数である。3者は殆ど一致している。

N[η[3 + ⅈ 4]]	N[η[3 + ⅈ 4, 190]]	N[η[3 + ⅈ 4, 2 + 2 ⅈ, 185]]
1.09894 + 0.0703438 ⅈ	1.09894 + 0.0703438 ⅈ	1.09894 + 0.0703437 ⅈ

また、(3.1c) より次が成立しなければならない。

$$\eta^{(s)}(c) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t^c} (-\log t)^s \qquad \left(=: Et_s(c)\right) \qquad s=1,2,3,\cdots$$

$c=2+2i$ のとき $s=1,2$ について両辺を計算すると次のようになる。1階 2階とも両辺は一致している。

The 1st order	N[{ η'[2 + 2 ⅈ] , Et$_1$[2 + 2 ⅈ, 15000]}] {0.0597288 − 0.0993641 ⅈ , 0.0597288 − 0.0993641 ⅈ}
The 2nd order	N[{ η''[2 + 2 ⅈ] , Et$_2$[2 + 2 ⅈ, 220000]}] {−0.0453472 + 0.0468542 ⅈ , −0.0453472 + 0.0468542 ⅈ}

ディリクレ級数の係数 a_t とテイラー展開の中心 c を実数に限定すれば、実部・虚部別のテイラー級数が得られる。これもまた 公式 10･1･2 において $\lambda_t = \log t$ と置いて得られる。

公式 10･3･2

$f(z) = \sum_{t=1}^{\infty} a_t / t^z$ （ $z=x+iy$ ）を通常ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t $t=1,2,3,\cdots$ を任意の実数とするとき、収束範囲内において次式が成り立つ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$

例 ディリクレ・ベータ級数

ディリクレ指標を $\chi(m,j,t)$ とするとき、ディリクレ・ベータ級数は、

$$\beta(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\chi(4,2,t)}{t^z} \qquad \left\{ = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^z} \right\}$$

$a_t = \chi(4,2,t)$ であるから、公式により

$$\beta(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\chi(4,2,t)}{t^c} (-\log t)^s \frac{(x-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\chi(4,2,t)}{t^c} (-\log t)^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\chi(4,2,t)}{t^c} (-\log t)^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

このままでも良いが、$\chi(4,2,t)$ $t=1,2,3,\cdots$ は $1, 0, -1, 0, \cdots$ であるから、これらは更に次のように書き換えられる。

$$\beta(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^{c}}\{-\log(2t-1)\}^{s}\frac{(z-c)^{s}}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^{c}}\{-\log(2t-1)\}^{2r+s}\frac{(x-c)^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t-1}}{(2t-1)^{c}}\{-\log(2t-1)\}^{2r+s+1}\frac{(x-c)^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$

$2+3i$, c=0.5 のとき、$\beta(z)$ の実部・虚部および u , v の値を計算すると次のようになる。実部は完全に一致しており、虚部もほぼ一致している。

Real part

```
N[{Re[β[2 + ⅈ 3]], u[2, 3, 0.5, 55]}]
{1.10389, 1.10389}
```

Imaginary part

```
N[{Im[β[2 + ⅈ 3]], v[2, 3, 0.5, 78]}]
{0.0133583, 0.0133692}
```

10・4 有限通常ディリクレ級数とテイラー級数

前節の公式は、有限な通常ディリクレ級数についても成り立つ。

公式 10・4・1

領域 D 上で正則な関数 $f(z)$ が有限通常ディリクレ級数に展開されるとき、任意の複素数 z, c について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{t^z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^s \frac{(z-c)^s}{s!} \tag{4.1}$$

例 $a_t = (-1)^{t-1}$, $n=6$

$$f(z) = \sum_{t=1}^{6} \frac{(-1)^{t-1}}{t^z} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{6} \frac{(-1)^{t-1}}{t^c} (-\log t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

これらはディリクレ・イータ級数の先頭6項とそのテイラー級数である。$c=1/2+15i$ として
これらの零点付近の値を計算するとそれぞれ次のようになる。
上2行が有限ディリクレ・イータ級数で下2段がテイラー級数である。両者ともほぼ0になっている。

```
N[f[0.5468208018 + 13.958984203 i, 6]]
-6.26561 × 10^-11 + 3.45629 × 10^-10 i
N[f[0.5468208018 + 13.958984203 i , 6, 1/2 + 15 i, 100]]
-6.26554 × 10^-11 + 3.45629 × 10^-10 i
```

公式 10・4・2

$f(z) = \sum_{t=1}^{n} a_t / t^z$ ($z=x+iy$) を有限通常ディリクレ級数、u , v を $f(z)$ の実部および虚部、c 及び a_t $t=1,2,3,\cdots$ を任意の実数とするとき、次式が成り立つ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^s \frac{(z-c)^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^{2r+s} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{t^c} (-\log t)^{2r+s+1} \frac{(x-c)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$

例 $a_t = (-1)^{t-1} t$, $n=2$

有限通常ディリクレ級数は

$$f(z) = \sum_{t=1}^{2} \frac{(-1)^{t-1} t}{t^z} \quad \left(= \frac{1}{1^z} - \frac{2}{2^z} = 1 - 2^{1-z} \right)$$

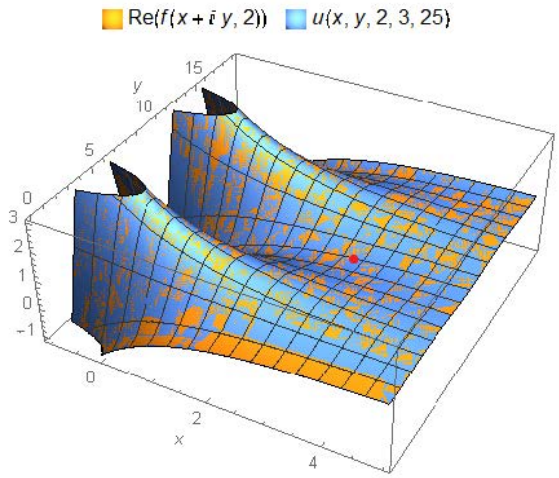
テイラー級数は

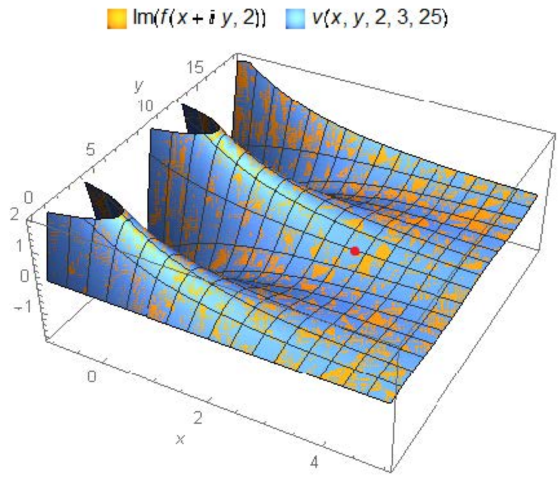
$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^{c}}(-\log t)^{s}\frac{(z-c)^{s}}{s\,!}$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^{c}}(-\log t)^{2r+s}\frac{(x-c)^{s}}{s\,!}\frac{(-1)^{r}y^{2r}}{(2r)\,!}$$

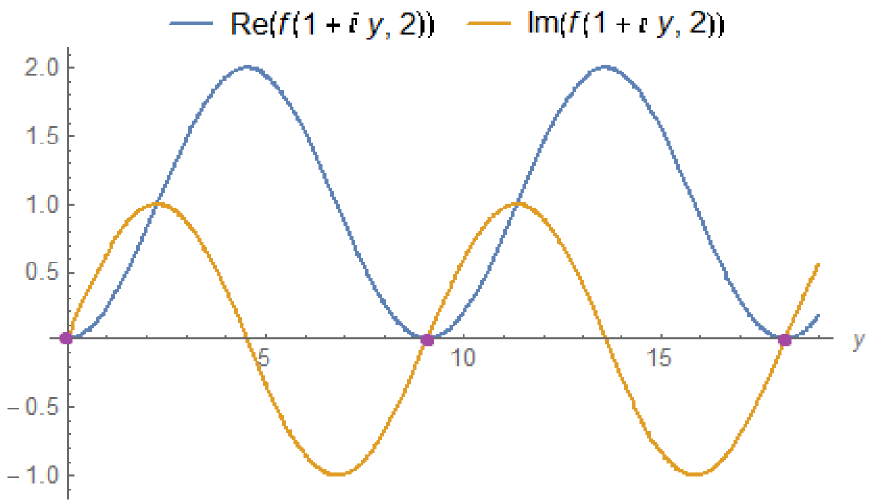
$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{2}\frac{(-1)^{t-1}t}{t^{c}}(-\log t)^{2r+s+1}\frac{(x-c)^{s}}{s\,!}\frac{(-1)^{r}y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

$c=3$ のとき、これらを3D図に描くと次のようになる。左図が実部で右図が虚部である。両図において橙が有限ディリクレ級数で青がテイラー級数である。赤点は展開の中心点である。





この有限通常ディリクレ級数は $x=1$ に零点を持つ。実際、この線上での実部と虚部を2D図に描けば次のとおり。紫点が零点である。



これらの零点は $1-2^{1-z}=0$ から $x=1$, $y=2n\pi/\log 2$ $n=0,1,2,\cdots$ と容易に得られる。これらはディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ の固有の零点である。何故ならば、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ とディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ との間には次なる関係があるからである。

$$\left(\frac{1}{1^{z}}-\frac{2}{2^{z}}\right)\left(\frac{1}{1^{z}}+\frac{1}{2^{z}}+\frac{1}{3^{z}}+\frac{1}{4^{z}}+\cdots\right)=\frac{1}{1^{z}}-\frac{1}{2^{z}}+\frac{1}{3^{z}}-\frac{1}{4^{z}}+-\cdots$$

2020.10.03
2022.07.21 Updated

河野 和
広島市

宇宙人の数学