

11 ディリクレ・イータの零点と連立超越方程式

要 旨

- (1) ディリクレ・イータ関数の零点を求める問題は、関数等式により、過剰決定系の連立超越方程式に帰着する。
- (2) 臨界線上ではこの連立超越方程式は解を持つ。
- (3) 臨界線外ではこの連立超越方程式は解を持ちそうにない。

11・1 $\eta(1/2 \pm z)$ の級数展開

本節では、先ず2つの公式を用意する。

公式 11・1・1

ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z = x + iy$)、 $\eta(1/2 + z) = u_+(z) + iv_+(z)$ とするとき、 $x > -1/2$ において次式が成立する。

$$\eta_+(z) := \eta\left(\frac{1}{2} + z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-z \log s} \quad (1.1_+)$$

$$u_+(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-x \log s} \cos(y \log s)$$

$$v_+(x, y) = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-x \log s} \sin(y \log s)$$

証明

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-z \log s}$$

z を $1/2 + z$ に置換して

$$\eta\left(\frac{1}{2} + z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-\left(\frac{1}{2} + z\right) \log s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-z \log s}$$

$z = x + iy$ と置けば

$$\begin{aligned} \eta_+(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-x \log s} e^{-iy \log s} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-x \log(s)} \{ \cos(y \log s) - i \sin(y \log s) \} \end{aligned}$$

これより u_+ , v_+ を得る。

Note

$x = -1/2$ はこのディリクレ級数の収束軸となる。

公式 11・1・2

ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z = x + iy$)、 $\eta(1/2 - z) = u_-(z) + i v_-(z)$ とするとき、 $x < 1/2$ において次式が成立する。

$$\eta_-(z) := \eta\left(\frac{1}{2} - z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{z \log s} \quad (1.1-)$$

$$u_-(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{x \log s} \cos(y \log s)$$

$$v_-(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{x \log s} \sin(y \log s)$$

証明

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-z \log s}$$

z を $1/2 - z$ に置換して

$$\eta\left(\frac{1}{2} - z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-\left(\frac{1}{2} - z\right) \log s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{z \log s}$$

$z = x + iy$ として三角関数で表すと

$$\begin{aligned} \eta_-(x, y) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{x \log s} e^{iy \log s} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{x \log s} \{ \cos(y \log s) + i \sin(y \log s) \} \end{aligned}$$

これより u_- , v_- を得る。

Note

$x = 1/2$ はこのディリクレ級数の収束軸となる。

11・2 双曲線関数項級数

前節では次の2式が得られた。

$$\eta_-(z) := \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{z \log s} \quad (1.1-)$$

$$\eta_+(z) := \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-z \log s} \quad (1.1+)$$

本節では、これらを2つの双曲線関数項級数に組み替える。そして、これらを更に実部・虚部別に級数展開する。

公式 11・2・1 (*cosh* 関数項級数)

実数の集合を R とし、 $z = x + iy$ ($x, y \in R$) とするとき、全複素平面上において次式が成立する。

$$\eta_c(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(z \log s) \quad (= u_c + i v_c)$$

$$u_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \cos(y \log s)$$

$$v_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \sin(y \log s)$$

証明

(1.1-), (1.1+) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) + \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) \right\} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \frac{e^{z \log s} + e^{-z \log s}}{2} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(z \log s) =: \eta_c(z) \end{aligned}$$

ここで

$$\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

であるから、 x を $x \log s$ に y を $y \log s$ にそれぞれ置換すると

$$\cosh(z \log s) = \cosh(x \log s) \cos(y \log s) + i \sinh(x \log s) \sin(y \log s)$$

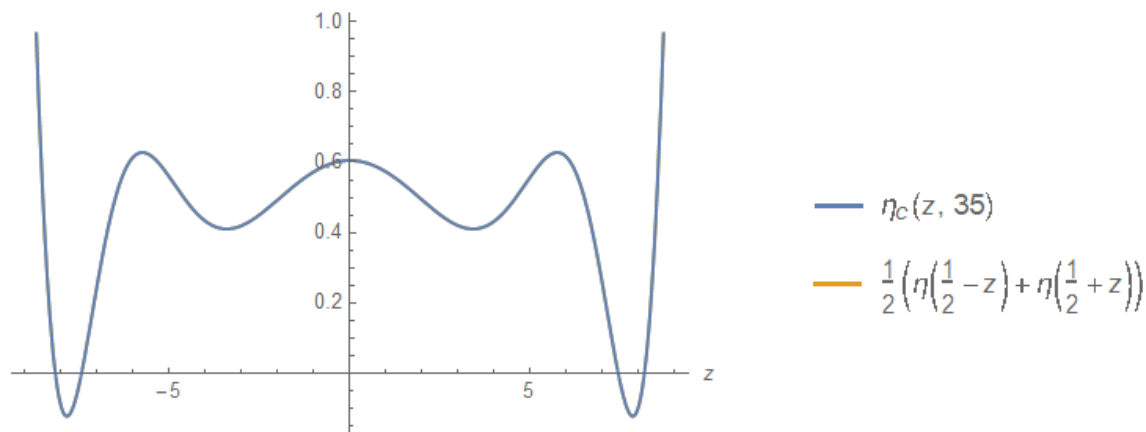
これを $\eta_c(z)$ に代入して u_c, v_c を得る。

ディリクレ級数同士の和から成る $\eta_c(z)$ は最早ディリクレ級数ではない。そしてその収束域は $[-\infty, 1/2) \cup (-1/2, \infty] = [-\infty, \infty]$ 。即ち全複素平面となる。

$\eta_c(z)$ は収束速度が遅いためまともな作図が出来ない。そこでこれにオイラー変換を施すと次のようになる。

$$\eta_c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(z \log s) \quad (= u_c + i v_c)$$

この加速式により $\eta_c(z)$ を描くと次のようになる。なお、 $\{\eta(1/2-z) + \eta(1/2+z)\}/2$ も一緒に描かれているが、両者はぴったり重なっていて後者(橙)は見えない。



公式 11・2・2 (sinh 関数項級数)

実数の集合を R とし、 $z = x + iy$ ($x, y \in R$) とするとき、全複素平面上において次式が成立する。

$$\eta_s(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(z \log s) \quad (= u_s + i v_s)$$

$$u_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \cos(y \log s)$$

$$v_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \sin(y \log s)$$

証明

(1.1-), (1.1+) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) - \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) \right\} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \frac{e^{z \log s} - e^{-z \log s}}{2} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh\{z \log s\} =: \eta_s(z) \end{aligned}$$

ここで

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

であるから、 x を $x \log s$ に y を $y \log s$ にそれぞれ置換すると

$$\sinh(z \log s) = \sinh(x \log s) \cos(y \log s) + i \cosh(x \log s) \sin(y \log s)$$

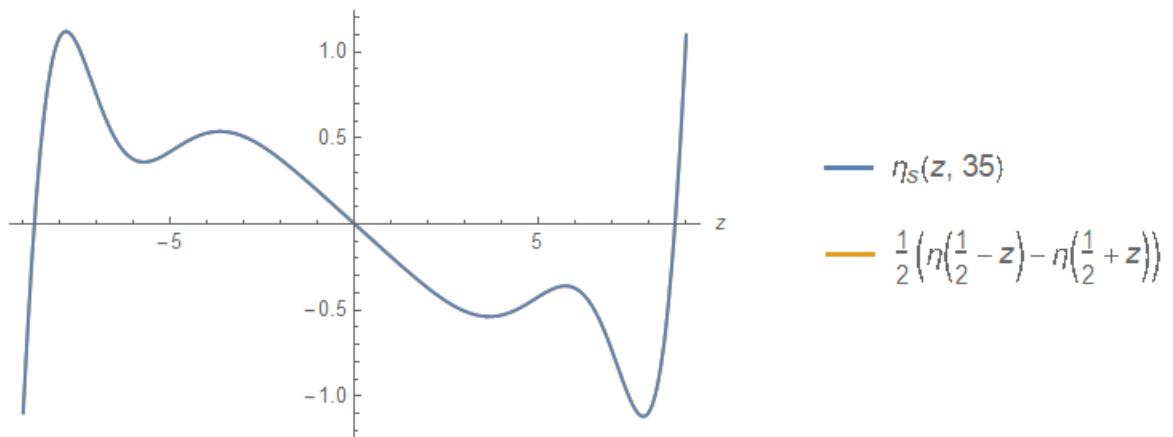
これを $\eta_s(z)$ に代入して u_s, v_s を得る。

ディリクレ級数同士の差から成る $\eta_s(z)$ は最早ディリクレ級数ではない。そしてその収束域は $[-\infty, 1/2) \cup (-1/2, \infty] = [-\infty, \infty]$ 。即ち全複素平面となる。

$\eta_s(z)$ は収束速度が遅いためまともな作図が出来ない。そこでこれにオイラー変換を施すと次のようになる。

$$\eta_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(z \log s) \quad (= u_s + i v_s)$$

この加速式により $\eta_s(z)$ を描くと次のようになる。なお、 $\{\eta(1/2-z) - \eta(1/2+z)\} / 2$ も一緒に描かれているが両者はぴったり重なっていて後者(橙)は見えない。



11・3 零点のための必要十分条件

定理 11・3・1

実数の集合を \mathbf{R} とし、ディリクレ・イータ関数を $\eta(z)$ ($z=x+iy$, $x, y \in \mathbf{R}$) とするとき、 $-1/2 < x < 1/2$ において $\eta(1/2 \pm z) = 0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式が解を持つことである。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \cos(y \log s) = 0 \\ v_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \sin(y \log s) = 0 \\ u_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \cos(y \log s) = 0 \\ v_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \sin(y \log s) = 0 \end{array} \right.$$

証明

(1) 必要性

ディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ については次の関数等式が成立する。

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-\frac{z}{2}} (1-2^z) \eta(z) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{-\frac{1-z}{2}} (1-2^{1-z}) \eta(1-z) \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

ここで、ガンマ関数及び π のべき関数は零点を持たず、 $1-2^z$, $1-2^{1-z}$ は $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ では零点を持たない。従って $\eta(z)$ の零点においては、

$$\eta(z) = \eta(1-z) = 0 \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

z を $1/2+z$ に置換すると

$$\eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = 0 \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$$

公式 11・1・1 及び 公式 11・1・2 より

$$\left\{ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{z \log s} = 0 \right. \quad (3.1_-)$$

$$\left. \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-z \log s} = 0 \right. \quad (3.1_+)$$

更に 公式 11・2・1 及び 公式 11・2・2 よりこれらは組み替えられて

$$\left\{ \frac{1}{2} \left\{ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) + \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(z \log s) = 0 \right. \quad (3.1_c)$$

$$\left. \frac{1}{2} \left\{ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) - \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(z \log s) = 0 \right. \quad (3.1_s)$$

$z=x+iy$ としてこれらを実部・虚部別に表示すれば、与式を得る。

(2) 十分性

(3.1c) と (3.1s) を加減すれば

$$\begin{cases} \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} [\cosh(z \log s) + \sinh(z \log s)] = 0 \\ \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} [\cosh(z \log s) - \sinh(z \log s)] = 0 \end{cases}$$

これらに $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$, $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$ を代入すれば

$$\begin{cases} \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{z \log s} = 0 \\ \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} e^{-z \log s} = 0 \end{cases}$$

Q.E.D.

オイラー変換による収束加速

以下、定理 11・3・1 の諸式を図示するが、これらの級数は収束速度が遅いため、特に y が小さいところが綺麗に描けない。そこで以下においては、 $y \geq 100$ については定理の原式をそのまま用い、 $y < 100$ については次のようなオイラー変換による加速式を用いる。

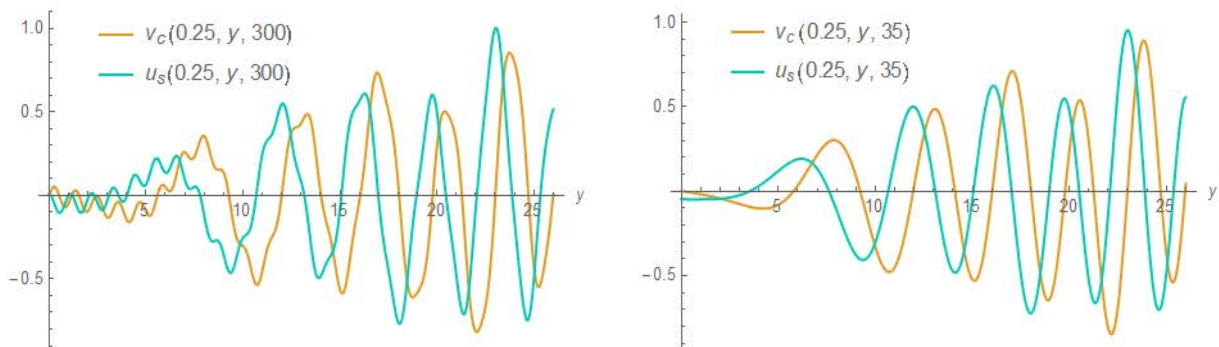
$$u_c(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \cos(y \log s)$$

$$v_c(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \sin(y \log s)$$

$$u_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \cos(y \log s)$$

$$v_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \sin(y \log s)$$

サンプルとして、 $x = 0.25$ のときの v_c , u_s を原式と加速式で描くと次のとおり。左図が原式で右図が加速式である。 y が小さいところの加速効果は明らかである。



過剰決定系

定理 11・3・1においては2個の実変数に対して4個の式があるから、この連立方程式は過剰決定系である。このような連立方程式は一般的には解を持たない。

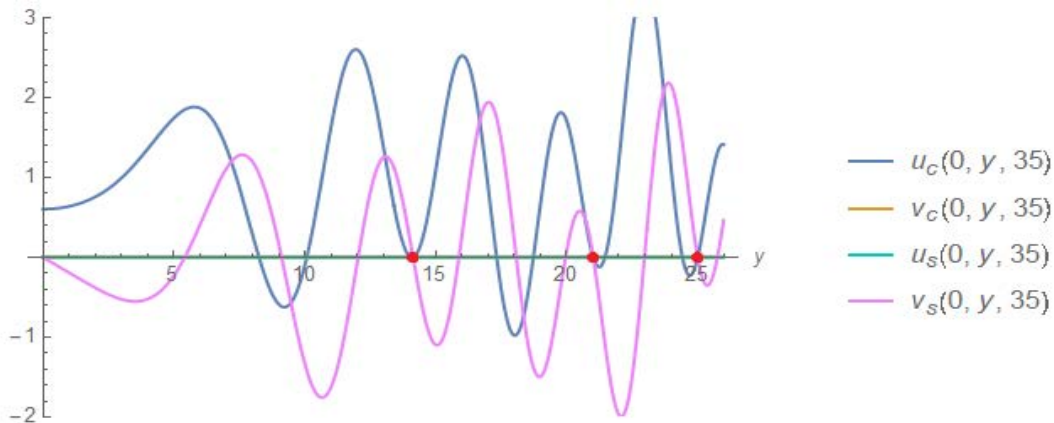
臨界線上の零点

しかしながら、この連立方程式が例外的に解を持つ場合がある。それは $x = 0$ の場合である。なお、 $x = 0$ は関数 $\eta(1/2 \pm z)$ の臨界線である。上式に $x = 0$ を代入すれば

$$\begin{cases} u_c(0, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cos(y \log s) = 0 \\ v_c(0, y) = 1 \times 0 = 0 \\ u_s(0, y) = 1 \times 0 = 0 \\ v_s(0, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sin(y \log s) = 0 \end{cases}$$

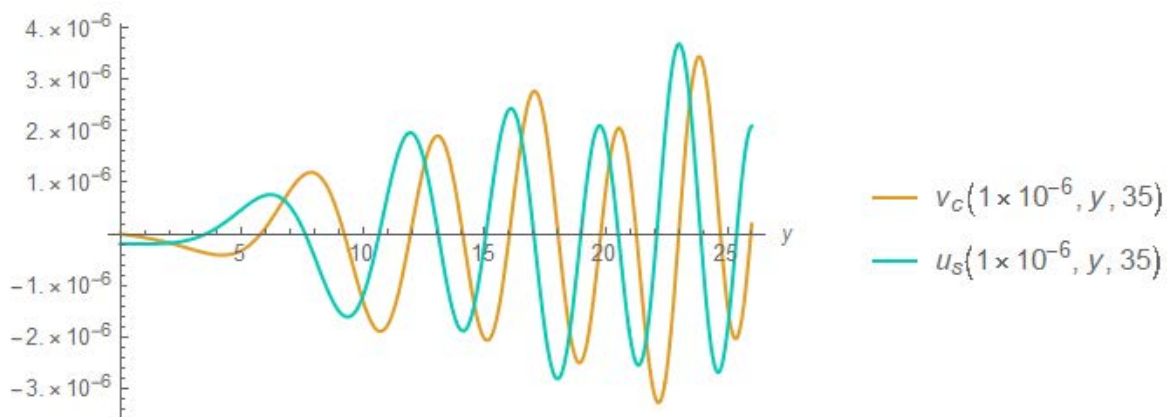
v_c, u_s はそれぞれ恒等的に0になり、過剰決定性は消失する。そして、 $u_c(0, y), v_s(0, y)$ はそれぞれ 公式 11・1・1 の $u_+(0, y), v_+(0, y)$ に帰着する。よってこの連立方程式は解を持つ。

$x = 0$ のとき、 $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。青は u_c 、紫は v_s で、これらが y 軸上で交わる点(赤点)が $\eta(1/2 \pm z)$ の零点である。橙は v_c 、水色は u_s であるが、これらは y 軸に重なっている。勿論この2直線も赤点を通っている。

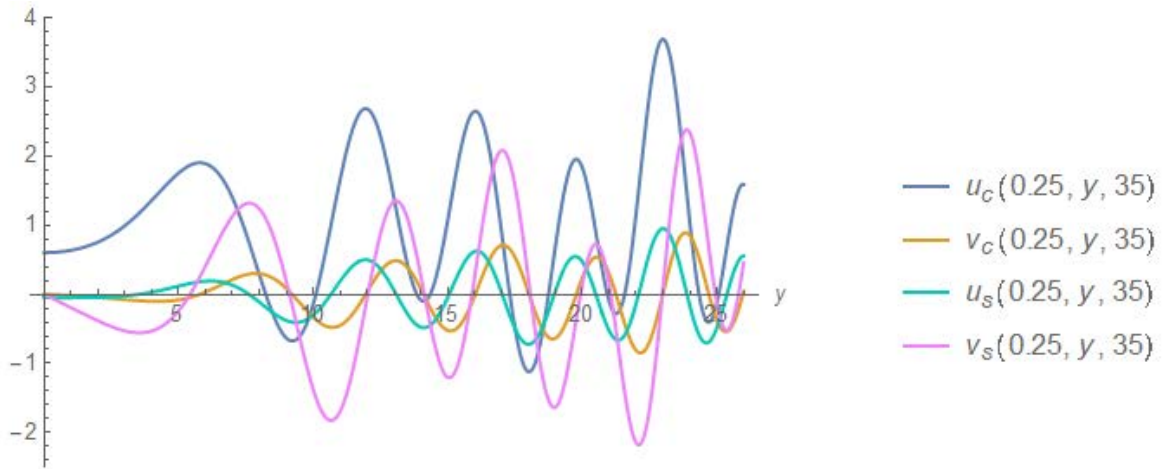


臨界線外

x がほんの僅かでも 0 から外れれば v_c, u_s は直線ではなくなる。例えば $x = 0.000001$ のとき



この結果、過剰決定性は回復する。例えば $x = -0.25$ のとき $u_c \sim v_s$ を描けば次のようになる。
4曲線が y 軸上の1点で交わることなどありそうには見えない。



そこで、リーマン仮説と同値な次の仮説を提示できる。

仮説 11・3・2

y は実数、 x は $-1/2 < x < 1/2$ なる実数とすると、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \cos(y \log s) = 0 \\ v_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \sin(y \log s) = 0 \\ u_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \cos(y \log s) = 0 \\ v_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \sin(y \log s) = 0 \end{array} \right.$$

11・4 零点のための必要条件

仮説 11・3・2の連立方程式は次の6組の連立方程式と同値である。各連立方程式は零点のための必要条件である。

$$\begin{cases} u_c = 0 \\ v_c = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_c = 0 \\ u_s = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_c = 0 \\ v_s = 0 \end{cases}, \begin{cases} v_c = 0 \\ u_s = 0 \end{cases}, \begin{cases} v_c = 0 \\ v_s = 0 \end{cases}, \begin{cases} u_s = 0 \\ v_s = 0 \end{cases}$$

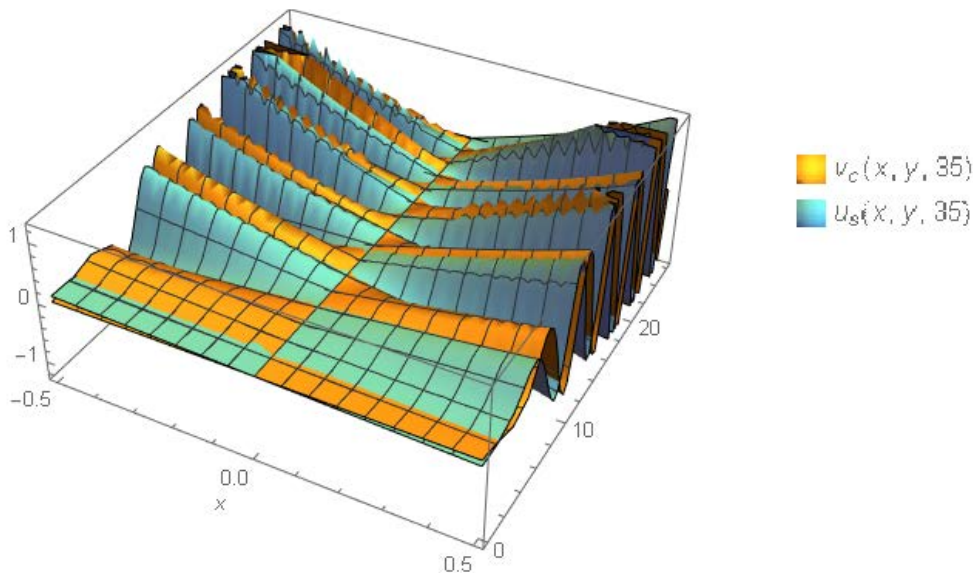
仮説 11・3・2 を証明するには、これらの何れか1組が $x \neq 0$ なる解を持たないことを示せば良い。

$v_c(x,y)$ と $u_s(x,y)$

これらの中でも特に興味深いのは次のペアである。

$$\begin{cases} v_c(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh\{x \log s\} \sin\{y \log s\} = 0 \\ u_s(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh\{x \log s\} \cos\{y \log s\} = 0 \end{cases}$$

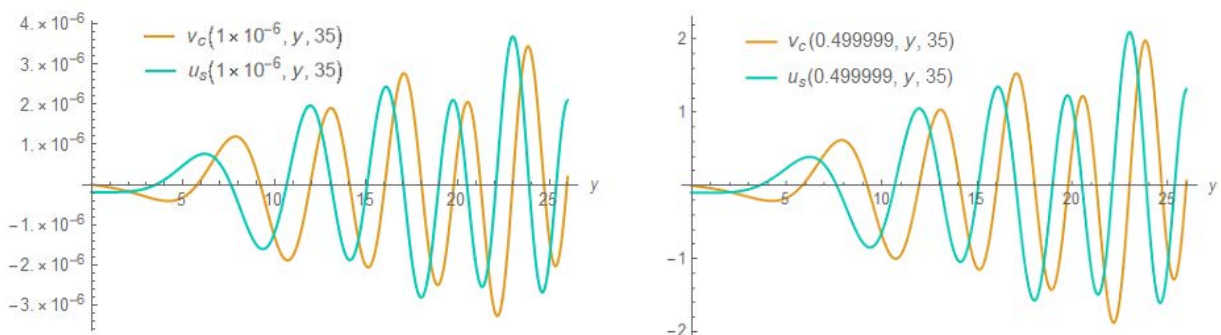
これらの3D図は次のようである。



これらの関数には次のような特性がある。

(1) 振幅の増大と周波数の稠密化

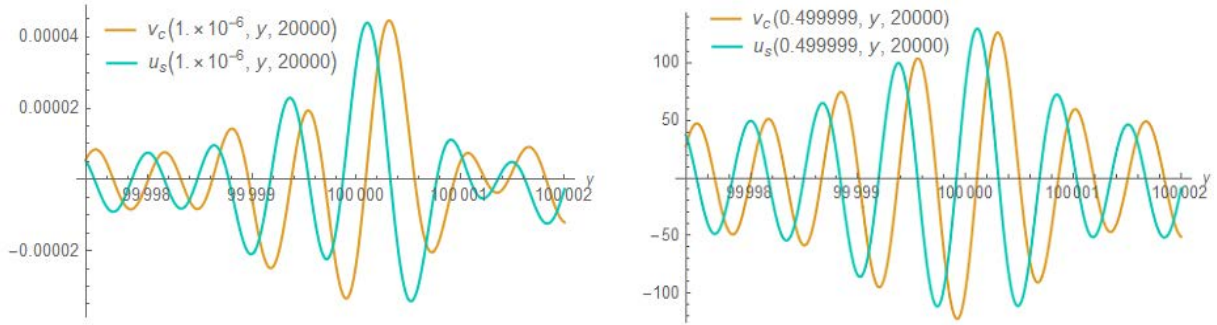
$x=0$ においては v_c も u_s 高さ 0 の水平線であるが、 $x=0.000001$ においては左図のようになり、 $x=0.499999$ においては右図のようになる。



両図は同じ波形に見えるが、縦横の比を1にしたら左図の v_c, u_s は殆ど y 軸に重なってしまう。

この辺り ($y=10 \sim 26$) の v_c, u_s の周期は概ね $4 \sim 3$ である。なお、ここで周期とは、下り坂の変曲点から次の下り坂の変曲点までの y 座標間の距離を想定している。(以下、同じ。)

他方、 $y = 100000$ 付近の2D図は次のとおり。左図は $x = 0.000001$ で右図が $x = 0.499999$ である。



前2図と比べると、振幅が大きくなっていることが分かる。また、この辺り ($y=99997 \sim 100002$) の v_c, u_s の周期は概ね $0.8 \sim 0.6$ と前2図よりもかなり短くなっている。

以上の4図から、 $y \rightarrow \infty$ に伴い振幅は増大し周波数は稠密になることが分かる。これらのことは v_c と u_s とが y 軸上交わる可能性が極めて低いことを示唆している。

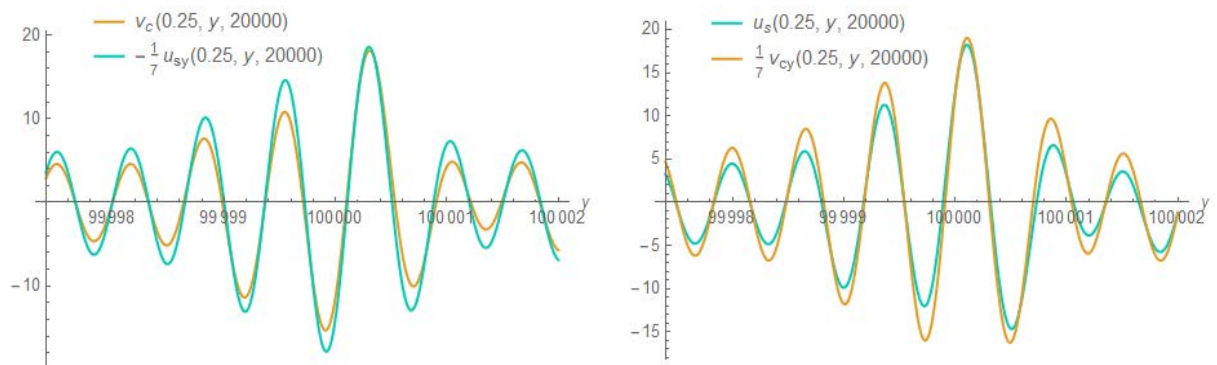
(2) 余弦と正弦のような関係

(1) の何れの図を見ても、 v_c の山谷は u_s の零点に近く、 u_s の山谷は v_c の零点に近い。実際、 v_c, u_s の y に関する偏導関数は

$$v_{cy}(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\log s}{\sqrt{s}} \sinh\{x \log s\} \cos\{y \log s\}$$

$$u_{sy}(x, y) = - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\log s}{\sqrt{s}} \sinh\{x \log s\} \sin\{y \log s\}$$

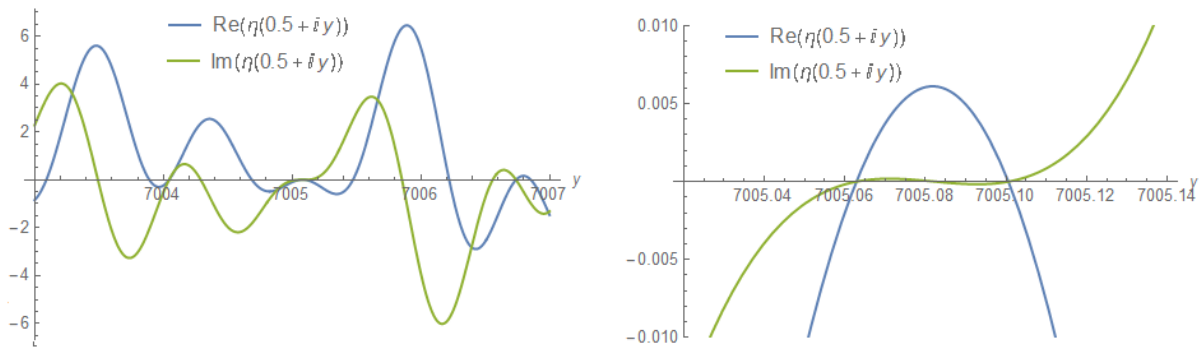
$x = 0.25, y = 99997 \sim 100002$ のとき、 v_c と $-u_{sy}/7$ を描いたのが左図であり、 u_s と $v_{cy}/7$ を描いたのが右図である。導関数を7で除したのは振幅のスケール調整のためである。



左図において v_c と $-u_{sy}/7$ の零点はほぼ一致しており、右図においても u_s と $v_{cy}/7$ の零点はほぼ一致している。これらのことは、 v_c と u_s の関係が余弦と正弦の関係に酷似していることを示している。この故に、 v_c と u_s は y 軸上では交わることは無さそうである。

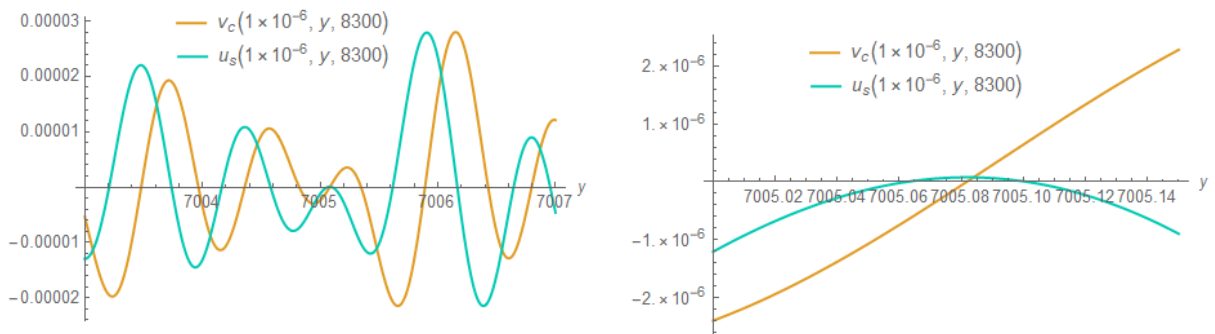
(3) レーザー現象の近傍

例えば、 $x = 1/2$ のとき $y = 7003 \sim 7007$ について η の実部と虚部を描くと左図のようになる。
 $y = 7005$ 付近では、実部(青)も虚部(緑)も y 軸上の1点で交わっているように見える。



しかしながら、 $y = 7005$ 付近を拡大して描くと右図のようになる。実部と虚部は y 軸上の2点において交わっている。これはレーザー現象として知られているものである。

$x = 0.000001$ のとき、 $y = 7003 \sim 7007$ について v_c と u_s を描くと左図のようになる。 v_c と u_s は $y = 7005$ 付近の y 軸上の1点で交わっているように見える。



しかしこの場合も $y = 7005$ 付近を拡大して描くと右図のようになる。 v_c と u_s は y 軸上で交点を持たず、且つ v_c の零点と u_s の極大点は非常に近いことが分かる。即ち、レーザー現象の近傍にあっては (1) の特性は損なわれるが、(2) の特性は保たれる。なお、 $x \rightarrow \pm 1/2$ に従って振幅が増大しレーザー現象は消滅する。

リーマン仮説と同値な仮説

以上見たように、 $v_c(x, y)$ と $u_s(x, y)$ から成る連立方程式は面白く且つお行儀のよい特性を持つ。そこでリーマン仮説と同値な次の仮説を提示する。

仮説 11・4・1

y は実数、 x は $-1/2 < x < 1/2$ なる実数とするとき、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} v_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \sin(y \log s) = 0 \\ u_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh(x \log s) \cos(y \log s) = 0 \end{cases}$$

cf.

x 軸に着目すれば、次のペアも有望かも知れない。

$$\begin{cases} v_c(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \sinh\{x \log s\} \sin\{y \log s\} = 0 \\ v_s(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\sqrt{s}} \cosh(x \log s) \sin(y \log s) = 0 \end{cases}$$

2022.09.07

宇宙人の数学

河野 和
広島市