

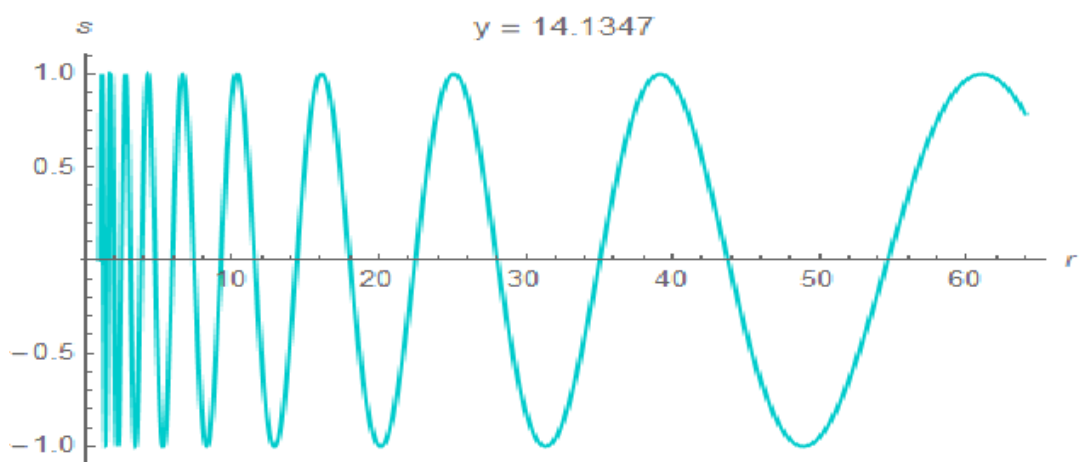
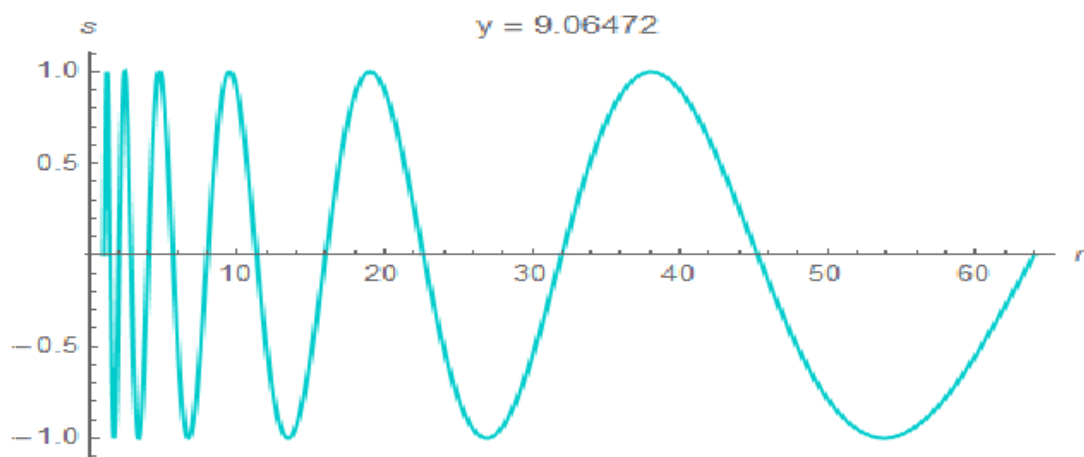
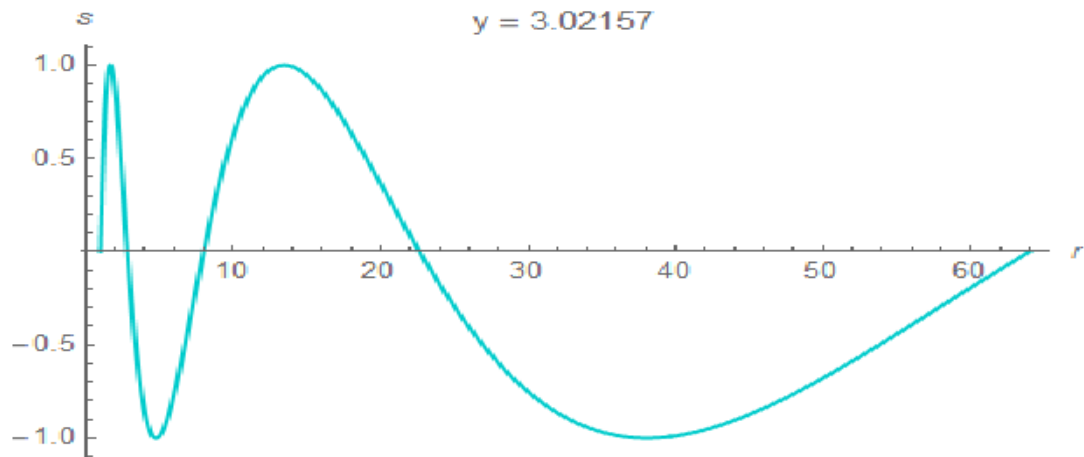
13 ディリクレ・イータ型の正弦級数

13・1 $\sin(y \log r)$

r, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $s(r, y)$ を考える。

$$s(r, y) = \sin(y \log r) \quad (1.1)$$

$y = 3.02157, 9.06472, 14.1347$ のとき、 $r=1 \sim 64$ についてこれらの2D図を描くとそれぞれ次のようになる。



これらを観察すると、次のことが分かる。

- (1) $s(r, y)$ は r に関して可変周期関数である。
- (2) 同一区間内の周期数は y の値にほぼ比例する。

以下、この関数についてより詳しく考察していく。

振幅 (A)

この関数の振幅は $A=1$ である。

周期 (P)

この関数は周期関数である。最初の周期は 0π から始って 2π で終わり、次の周期は 2π から始って 4π で終わるから、

$$y \log r_0 = 0\pi, \quad y \log r_1 = 2\pi, \quad y \log r_2 = 4\pi, \quad \dots, \quad y \log r_n = 2n\pi, \quad \dots$$

より

$$r_0 = e^{0\pi/y}, \quad r_1 = e^{2\pi/y}, \quad r_2 = e^{4\pi/y}, \quad \dots, \quad r_n = e^{2n\pi/y}, \quad \dots$$

従って関数 $s(r, y)$ は単位区間

$$[e^{0\pi/y}, e^{2\pi/y}), [e^{2\pi/y}, e^{4\pi/y}), \dots, [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y}), \dots$$

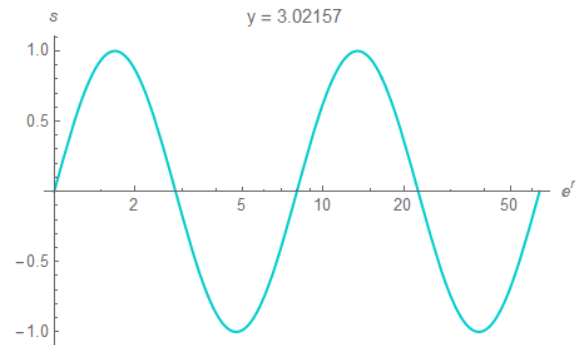
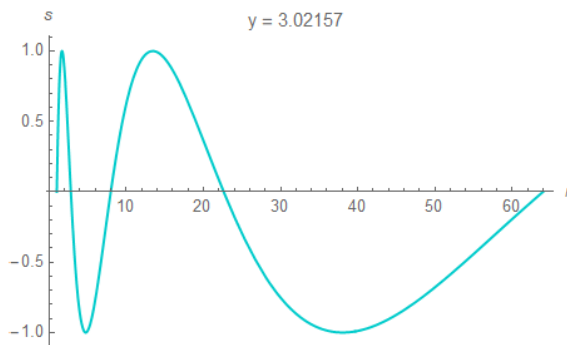
で区切られ、これらの中に山と谷がそれぞれ1個ずつ存在する。これらを第1周期、第2周期、…、第 n 周期と呼ぶことにする。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

例えば $y=3.02157$ のとき、第1周期 $[e^{0\pi/y}, e^{2\pi/y})$ と第2周期 $[e^{2\pi/y}, e^{4\pi/y})$ は

$$P(1, 3.02157) = [1, 8), \quad P(2, 3.02157) = [8, 64)$$

これら2つの周期を続けて描けば次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。正弦関数であるから 上り坂の零点から次の上り坂の零点からまで が1周期である。



波長 (λ)

波長はこれらの周期の長さ

$$e^{0\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1), \quad e^{2\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1), \quad \dots, \quad e^{(2n-2)\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1), \quad \dots$$

で、周期毎に前周期の $e^{2\pi/y}$ 倍になる。つまり、この関数は **可変周期関数** である。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y}(e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の波長はそれぞれ

$$\lambda(1, 3.02157) = 7, \quad \lambda(2, 3.02157) = 56$$

但し、片対数目盛で描かれた $s(r, y)$ は、一見、固定周期のように見える。

$n = 1$ のとき、 λ から y を逆算できる。即ち、

$$y = \frac{2\pi}{\log(\lambda+1)}$$

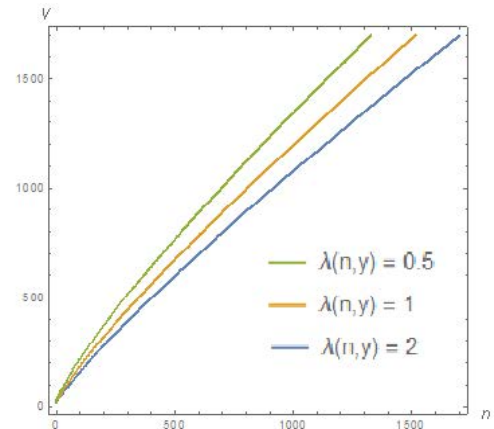
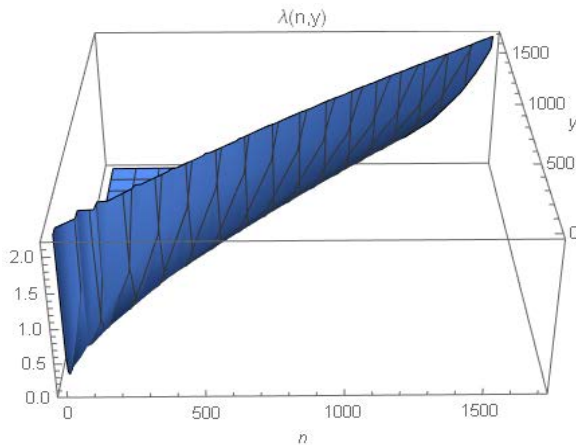
これより、

$$\lambda(1, y) = 7 \text{ のとき} \quad y = \frac{2\pi}{\log 8} = 3.02157$$

$$\lambda(1, y) = 1 \text{ のとき} \quad y = \frac{2\pi}{\log 2} = 9.06472$$

$$\lambda(1, y) = 0.559743 \text{ のとき} \quad y = \frac{2\pi}{\log 1.559743} = 14.1347$$

$n \neq 1$ のとき、 $\lambda(n, y)$ の3D図は左のとおり。また、 $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1.0$, $\lambda = 2.0$ の等高線図は右のとおり。



これらの図から、 $\lambda(n, y)$ の等高線の勾配は n の増加に伴い減少することが分かる。その理由は次のとおり。

$$\frac{\partial}{\partial n} \lambda(n, y) = \frac{2\pi}{y} e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1) > 0 \quad \text{for } n, y > 0$$

この等高線図を用いて、所望の λ を与える n, y のペアを見出すことができる。

山 (M_s)

$s(r, y)$ は正弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の $1/4$ の所に存在する。即ち、

$$M_s(n, y) = e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期と第2周期の山はそれぞれ

$$M_s(1, 3.02157) = 1.68179 \quad , \quad M_s(2, 3.02157) = 13.4544$$

谷 (V_s)

$s(r, y)$ は正弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の $3/4$ の所に存在する。即ち、

$$V_s(n, y) = e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}}$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の谷はそれぞれ

$$Vs(1, 3.02157) = 4.756843 \quad , \quad Vs(2, 3.02157) = 38.0548$$

零点 (Zs)

$s(r, y)$ は正弦関数なので零点は片対数目盛で描かれた周期の左端と中央に存在する。

$$Zs(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}} , e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では、 $s(r, y)$ の第1周期 と第2周期の零点はそれぞれ

$$Zs(1, 3.02157) = \{1, 2.82843\} \quad , \quad Zs(2, 3.02157) = \{8, 22.6275\}$$

零点近傍 (Xs)

関数 $s(r, y)$ の変数 r を離散変数とすると、零点から ± 0.5 以内の整数 r を **零点近傍** と呼ぶことにする。即ち、

$$Xs(n, y) = \left\{ \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}\right) , \text{Round}\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}}\right) \right\}$$

上図の例では

$$Xs(1, 3.02157) = \{1, 3\} \quad , \quad Xs(2, 3.02157) = \{8, 23\}$$

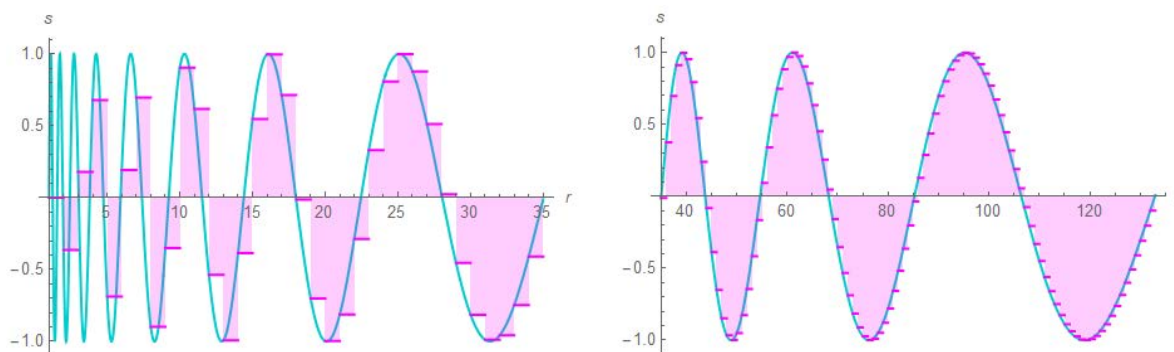
リーマン・ゼータ型正弦級数 ($y=14.1347\dots$ のとき)

今まで関数 $s(r, y)$ において r を連続変数として扱って来たが、本節では次のような y に関するリーマン・ゼータ型正弦級数を考える。

$$v(y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(y \log r) \tag{1.2}$$

このとき、 r は離散変数でなければならない。

例えば $y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 34$ および $r=35, 36, \dots, 132$ の図を並べて示せば次のようになる。



マゼンタの面積の和が (1.2) の関数値となる。左図ではこの和は (1.1) の積分値とは大きく異なっている。これに対し右図ではこの和は (1.1) の積分値に近い。

発散

右図において、面積は正負が相殺して0になりそうに思えるがそうはならない。波の間隔が

どんどん広がって遂には無限大になるからである。この故に (1.2) の級数は発散する。実際、

$$v(y) \propto \int_1^{\infty} \sin(y \log r) dr$$

であるが、右辺は

$$\int_1^{\infty} \sin(y \log r) dr = \left[\frac{r\{-y \cos(y \log r) + \sin(y \log r)\}}{1+y^2} \right]_1^{\infty}$$
$$= \pm\infty$$

となり、収束しない。

Note

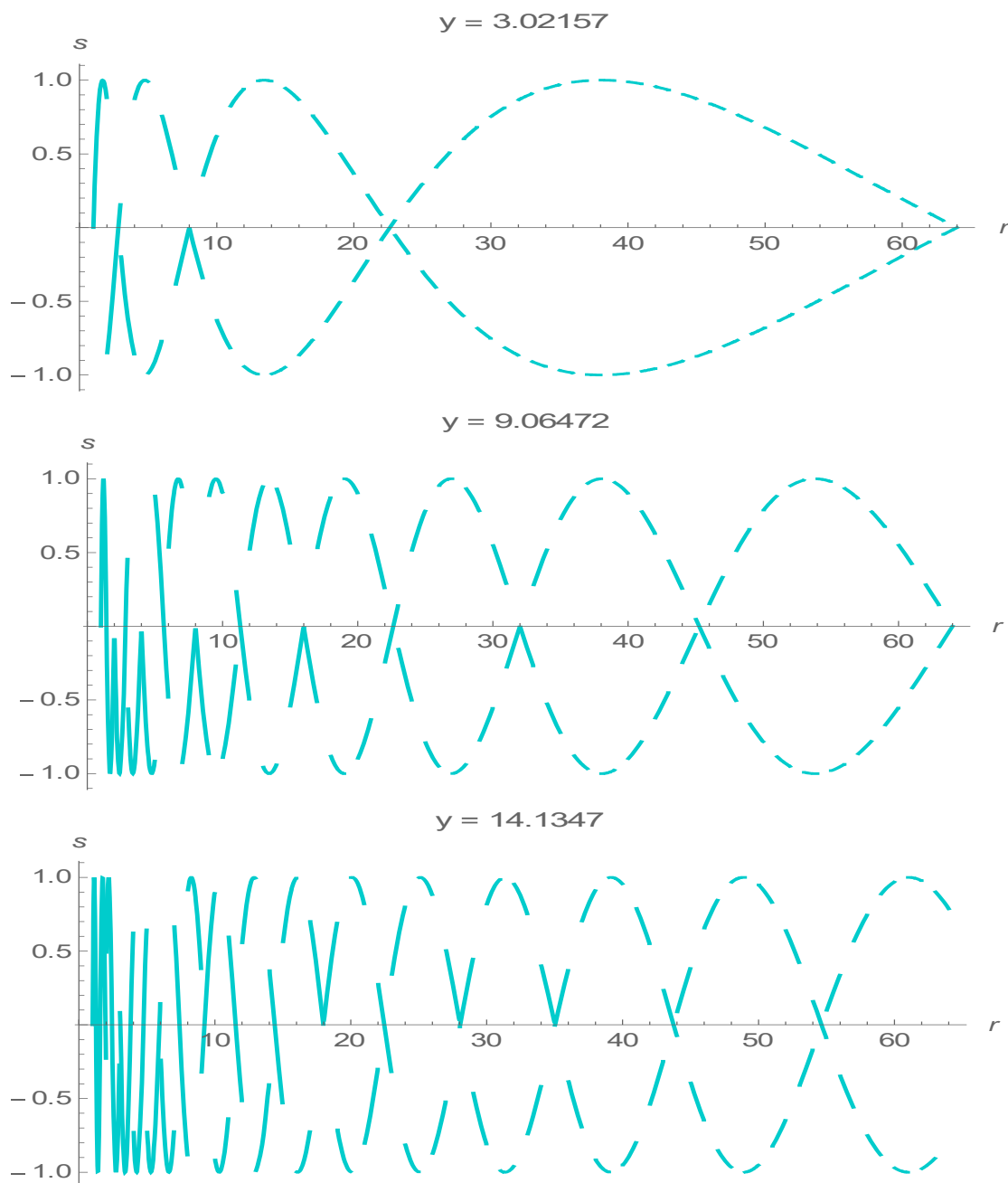
(1.2) は収束加速しても漸近展開にしかない。

13・2 ± sin(y log r)

r, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $s(r, y)$ を考える。

$$s(r, y) = (-1)^{\lfloor r^{-1} \rfloor} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{は床関数。}) \quad (2.1)$$

$y = 3.02157, 9.06472, 14.1347$ のとき、 $r=1 \sim 64$ についてこれらの2D図を描くとそれぞれ次のようになる。



前節とは異なり、 $s(r, y)$ は r に関して不連続関数である。しかし、可変周期を持ち、同一区間内の周期数が y の値にほぼ比例することは前節と同様である。

振幅 (A)

この関数の振幅は

$$A(r) = |(-1)^{\lfloor r^{-1} \rfloor}| = 1$$

周期 (P)

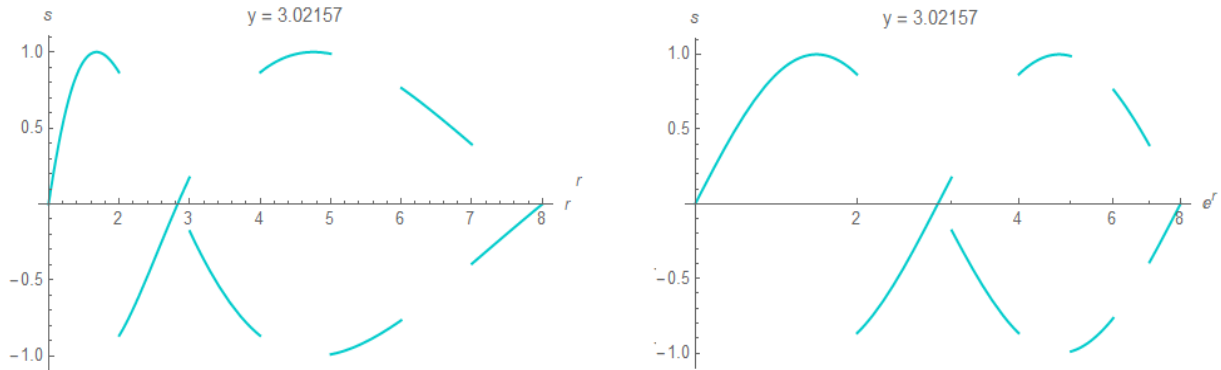
この関数の周期は前節と同じである。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y}]$$

例えば $y=3.02157$ のとき、 $s(r, y)$ の第1周期 $[e^{0\pi/y}, e^{2\pi/y}]$ は

$$P(1, 3.02157) = [1, 8)$$

そしてこれを描けば次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。



波長 (λ)

この関数の波長は前節と同じである。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、

$$\lambda(1, 3.02157) = 7$$

山または谷 (MVs)

前節と異なり、この関数 $s(r, y)$ は符号が交代する。このため山と谷は前節の関数の最大2倍となる。

$$MVs(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}, e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

山か谷かは $r = MVs(n, y)$ における $s(r, y)$ の符号により判別する。

上図の例では

$$MVs(1, 3.02157) = \{1.68179, 4.75684\}$$

$$\{s(1.68179, 3.02157), s(4.75684, 3.02157)\} = (1, 1)$$

であるから、前者も後者も山である。

零点 (Zs)

この関数の零点も前節と同じである。即ち、

$$Zs(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}, e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では

$$Zs(1, 3.02157) = \{1, 2.82843\}$$

くびれ (Xs)

この関数 $s(r, y)$ は符号が交代するため、零点がくびれて見える。そこで零点から ± 0.5 以内の整数点をくびれと呼ぶことにする。即ち、

$$Xs(n, y) = \left\{ \text{Round} \left(e^{\frac{(2n-2)\pi}{2y}} \right), \text{Round} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2y}} \right) \right\}$$

上図の例では

$$Xs(1, 3.02157) = \{1, 3\}$$

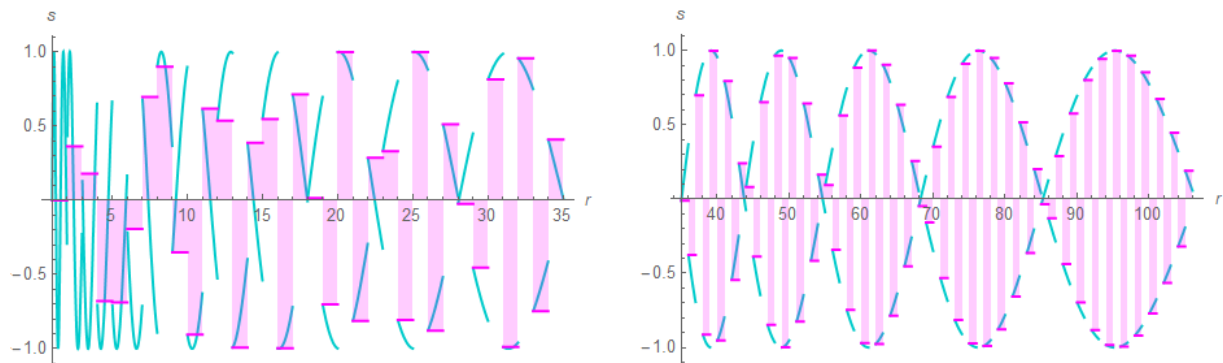
ディリクレ・イータ型正弦級数 ($y=14.1347\dots$ のとき)

y に関するディリクレ・イータ型正弦級数

$$v(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \sin(y \log r) \quad (2.2)$$

を考えると、 r は離散変数でなければならない。

例えば $y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 34$ および $r=35, 36, \dots, 105$ の図を並べて示せば次のようになる。



マゼンタの面積の和が (2.2) の関数値となる。左図ではこの和は (2.1) の積分値とは大きく異なっている。これに対し右図ではこの和は (2.1) の積分値に近い。

収束?

右図の最後の2つのくびれは第11周期に属する。このくびれ間の面積は相殺して0になりそうに思える。試に $y_1=14.1347\dots$ のときの第11周期、第25周期のくびれ間の面積を計算すると次のようになる。

$$\text{第11周期} \quad Xs(11, y_1) = (85, 106), \quad \lambda(11, y_1) = 47.7$$

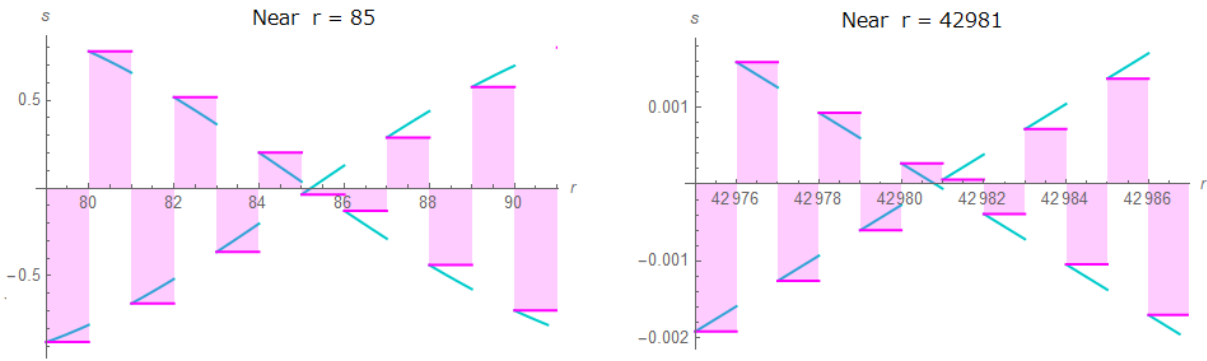
$$v_{11}(y_1) = \sum_{r=85}^{105} (-1)^{r-1} \sin(y_1 \log r) = 0.00208785$$

$$\text{第25周期} \quad Xs(25, y_1) = (42981, 53679), \quad \lambda(25, y_1) = 24058.2$$

$$v_{25}(y_1) = \sum_{r=42981}^{53678} (-1)^{r-1} \sin(y_1 \log r) = -0.0000684506$$

確かに r が大きくなるほど2つのくびれ間の面積は0に近づいている。

この原因を探るため $r=85$ と $r=42981$ 付近の拡大図を比べてみる。



すると、一見して縦軸のスケールが桁違いであることが判る。何故か？理由は簡単である。 r が原点から遠ざかるほど波長が長くなるからである。振幅は1であるから、波長が長くなれば可変長正弦曲線の勾配も緩くならざるを得ない。実際、(2.1)の符号を除いた部分を r で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial r} s(r, y) = \frac{y}{r} \cos(y \log r)$$

$r \rightarrow \infty$ とすれば $\partial s(r, y) / \partial r \rightarrow 0$ となる。

かくして、隣接する2つのくびれ間の面積は r が大きくなるほど0に近づく。

最大誤差

しかしそうであっても、この級数 $v(y)$ は発散級数である。即ち、これは振動するばかりで決して収束しない。それ故、この級数が山や谷で打ち切られれば最大で ± 0.5 の誤差が生じる。実際、上の例で r を第30周期の谷553771で打ち切ったところ、次のように -0.5 の誤差が生じた。なお、正しい値はディリクレ・イータの関数値 $-Im(\eta(0 + i 14.1347\dots)) = -0.0657473$ である。

$$v[y_-, m_-] := \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \sin[y \log[r]]$$

$$N[MVs[30, y_1]] \quad \{443\,408., 553\,771.\}$$

$$N[v[y_1, 553\,771]] \quad N[-Im[DirichletEta[\pm y_1]]]$$

$$-0.565747 \quad -0.0657473$$

$$-0.565747 - (-0.0657473) = -0.5$$

最小誤差

他方、この級数が適当なくびれで打ち切られればより良い近似値が得られる。実際、上の例で r を第30周期のくびれ495526で打ち切ったところ、ディリクレ・イータの関数値 $-Im(\eta(0 + i 14.1347\dots)) = -0.0657473$ にほぼ一致した。

$$Xs[30, y_1] \quad \{396\,771, 495\,526\}$$

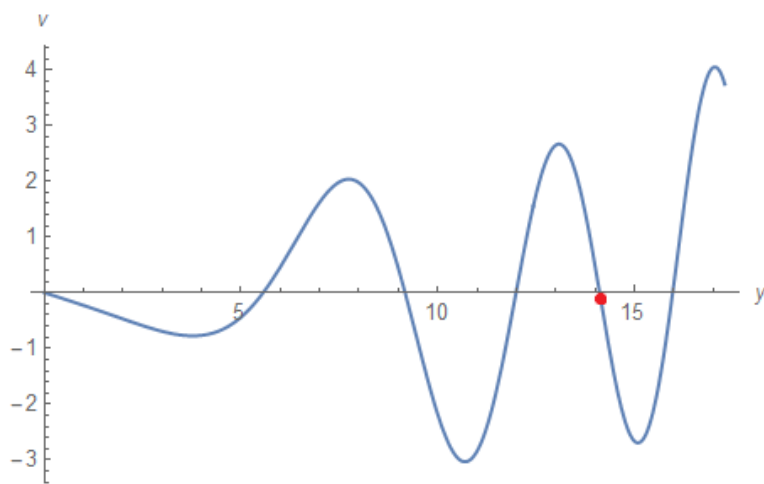
$$N[v[y_1, 495\,526]] \quad -0.0657471$$

総和法と収束加速

結局この級数 (2.2) は誤差 ± 0.5 の範囲で振動する。 ± 0.5 だから平均して誤差0と見做すべしと言うのが総和法である。総和法の最も簡単な1つはオイラー変換である。オイラー変換は級数の収束を加速する上に 総和法をも適用する。(2.2) にオイラー変換を施せば次のようになる。

$$v(y, m) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^k \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} (-1)^{r-1} \sin(y \log r) \quad (2.2')$$

そしてこれを2D図に描けば、



この図の $y_1 = 14.1347\dots$ における (2.2') の値を計算したところ次のようになった。これはディリクレイータの関数値 $-Im(\eta(0 + i 14.1347\dots))$ にぴったり一致している。

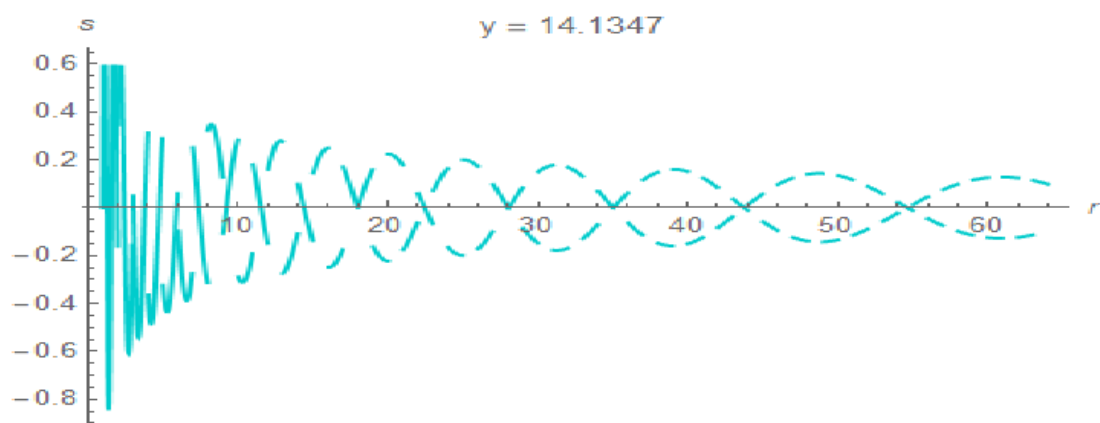
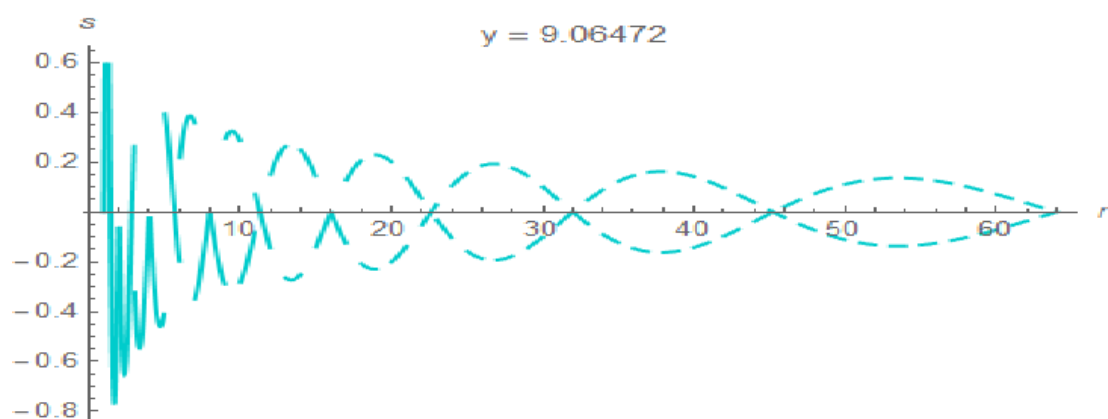
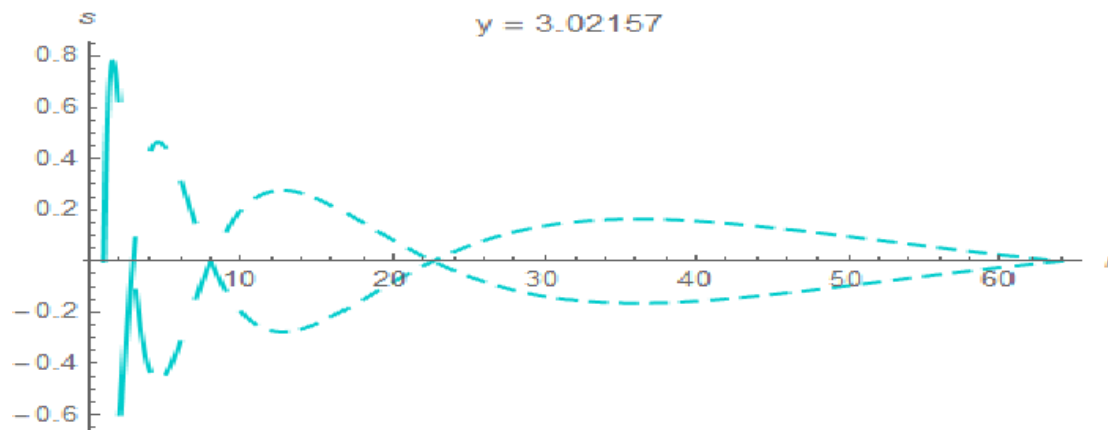
$$\mathbf{N[v[y_1, 42]]} \quad -0.0657473$$

13・3 ± sin(y log r) / r^x

r, x, y をそれぞれ正数とし、次のような関数 $s(r, x, y)$ を考える。

$$s(r, x, y) = \frac{(-1)^{\lfloor r-1 \rfloor}}{r^x} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{ は床関数。}) \quad (3.1)$$

$x = 1/2, y = 3.02157, 9.06472, 14.1347$ のとき、 $r=1 \sim 64$ についてこれらの2D図を描くとそれぞれ次のようになる。



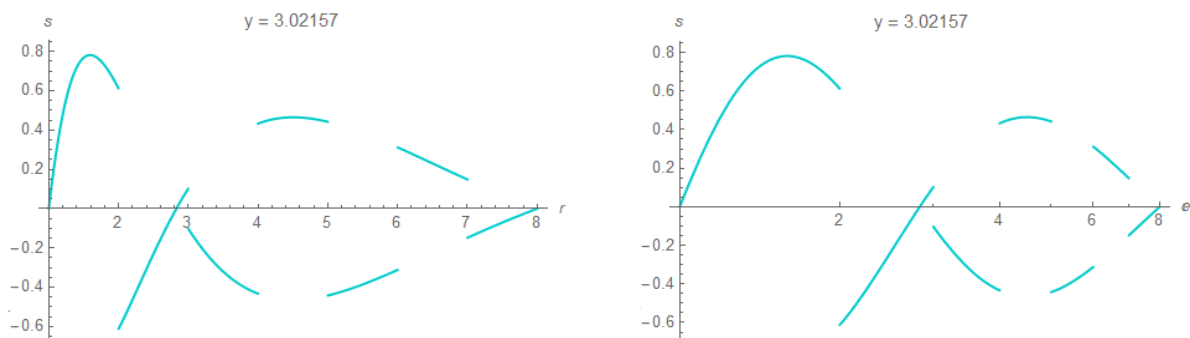
振幅 (A)

この関数の振幅は

$$A(r, x) = \left| \frac{(-1)^{\lfloor r-1 \rfloor}}{r^x} \right| = \frac{1}{r^x}$$

$x > 0$ のとき $\lim_{r \rightarrow \infty} 1/r^x = 0$ 。従ってこの関数は減衰振動を表わす。

例えば $x=1/2$, $y=3.02157$ のとき、 $s(r, x, y)$ の第1周期 $[e^{0\pi/y}, e^{2\pi/y})$ を描けば次のようになる。左が通常目盛で右が片対数目盛である。



周期 (P)

この関数の周期は前節と同じである。即ち、

$$P(n, y) = [e^{(2n-2)\pi/y}, e^{2n\pi/y})$$

上図の例では、

$$P(1, 3.02157) = [1, 8)$$

波長 (λ)

この関数の波長は前節と同じである。即ち、

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

上図の例では、

$$\lambda(1, 3.02157) = 7$$

山または谷 (MV_s)

この関数の山または谷の位置は前節と同じである。即ち、

$$MV_s(n, y) = \left\{ e^{\frac{(4n-3)\pi}{2y}}, e^{\frac{(4n-1)\pi}{2y}} \right\}$$

上図の例では、

$$MV_s(1, 3.02157) = \{1.68179, 4.75684\}$$

$$\{s(1.68179, 1/2, 3.02157), s(4.75684, 1/2, 3.02157)\}$$

$$= \{0.771106, 0.458501\}$$

であるから、前者も後者も山である。

零点 (Z_s)

この関数の零点も前節と同じである。即ち、

$$Z_s(n, y) = \left\{ e^{\frac{(2n-2)\pi}{y}}, e^{\frac{(2n-1)\pi}{y}} \right\}$$

上図の例では、

$$Z_s(1, 3.02157) = \{1, 2.82843\}$$

くびれ (Xs)

この関数のくびれも前節と同じである。即ち、

$$Xs(n, y) = \left\{ \text{Round} \left(e^{\frac{(2n-2)\pi}{2y}} \right), \text{Round} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2y}} \right) \right\}$$

上図の例では、

$$Xs(1, 3.02157) = \{1, 3\}$$

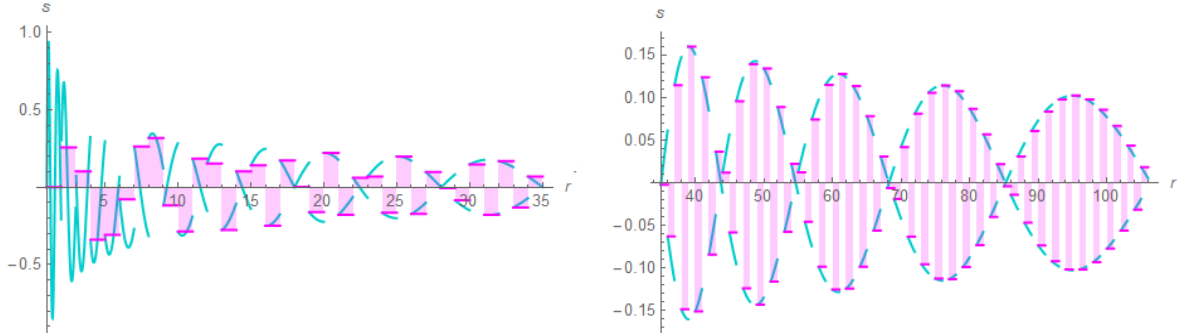
ディリクレ・イータ型正弦級数 ($x=1/2, y=14.1347\dots$ のとき)

x, y に関するディリクレ・イータ型正弦級数

$$v(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^x} \sin(y \log r) \quad (3.2)$$

を考えると、 r は離散変数でなければならない。

例えば $x=1/2, y=14.1347\dots$ のとき、 $r=1, 2, \dots, 34$ および $r=35, \dots, 105$ の図を並べて示せば次のようになる。



マゼンタの面積の和が (3.2) の関数値となる。左図ではこの和は (3.1) の積分値とは大きく異なっている。これに対し右図ではこの和は (3.1) の積分値に近い。

収束

右図の最後の2つのくびれは第11周期に属する。このくびれ間の面積は相殺して0になりそうに思える。試に $x=1/2, y=14.1347\dots$ のときの第11周期と第25周期のくびれ間の面積を計算すると次のようになる。

$$\text{第11周期} \quad Xs(11, y_1) = \{85, 106\}, \quad \lambda(11, y_1) = 47.7$$

$$v_{11} \left(\frac{1}{2}, y_1 \right) = \sum_{r=85}^{105} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{1/2}} \sin(y_1 \log r) = -0.000473572$$

$$\text{第25周期} \quad Xs(25, y_1) = (42981, 53679), \quad \lambda(25, y_1) = 24058.2$$

$$v_{25} \left(\frac{1}{2}, y_1 \right) = \sum_{r=42981}^{53678} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{1/2}} \sin(y_1 \log r) = -0.00000032251$$

両者を比べると r の増加に伴い2つのくびれ間の面積は急速に0に収束している。この原因は明らかである。振幅が1のときでさえ、くびれ間の面積は r が増加するほど小さくなる。その上に振幅が0に近づくのである。これらの相乗効果により、くびれ間の面積は更に急速に0に近づかざるを得ない。この際 $\sum 1/r^x$ は収束しなくてもよい。 $\lim_{r \rightarrow \infty} 1/r^x = 0$ でさえあればよい。かくて、

(3.2) は $x > 0$ ならば収束する。

最小誤差

そこで、級数 $v(x, y)$ を計算するに当たって、適当なくびれで r を打ち切ればより良い近似値が得られる筈である。

実際、 $x=1/2, y_1=14.1347\dots$ のとき、 r を第25周期のくびれ 42981 まで計算してその結果をディリクレ・イータ関数の実部 $-Im(\eta(1/2 + i 14.1347\dots)) = 0$ と比べると、次のように小数点以下6桁まで 0 になった。

$$v[x_-, y_-, m_-] := \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^{r-1}}{r^x} \text{Sin}[y \text{Log}[r]]$$

$$Xs [25, y_1] \quad \{42981, 53679\}$$

$$N\left[v\left[\frac{1}{2}, y_1, 42981\right]\right] \quad 5.35779 \times 10^{-7}$$

最大誤差

この級数 $v(x, y)$ は収束する。しかしながら、この級数が山や谷で打ち切られれば最大で $\pm 1/r^x \times 1/2$ の誤差が生じる。実際、上の例で r を第25周期の山 59988 で打ち切ったところ 次のように小数点以下2桁まで 0 になった。この誤差は上記の最小誤差よりも 3,800 倍大きい。

$$N[MVs [25, y_1]] \quad \{48032.8, 59988.\}$$

$$N\left[v\left[\frac{1}{2}, y_1, 59988\right]\right] \quad N\left[\frac{1}{59988^{1/2}} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$0.00204144$$

$$0.00204145$$

13・4 $v(y)$ の振幅

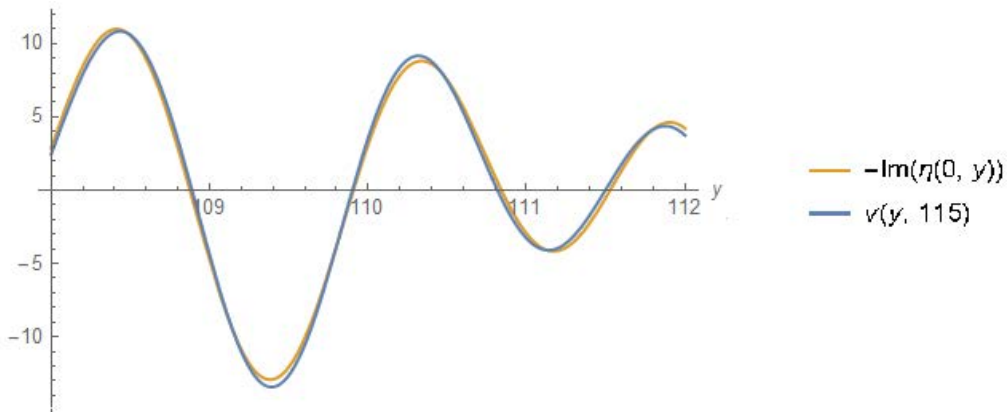
第2節で扱った ディリクレ・イータ型正弦関数および級数は次のようなものであった。

$$s(r, y) = (-1)^{\lfloor r-1 \rfloor} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \cdot \rfloor \text{は床関数。}) \quad (2.1)$$

$$v(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \sin(y \log r) \quad (2.2)$$

本節では (2.1) を用いて、(2.2) の振幅(山、谷、零点)について研究する。

数値例として、 $y = 110$ 付近の $\eta(0, y)$ の虚部(負)と $v(y)$ とを一緒に描けば、



両者は殆ど一致しているが、以下の計算においては精度の高い $\eta(0, y)$ を用いる。

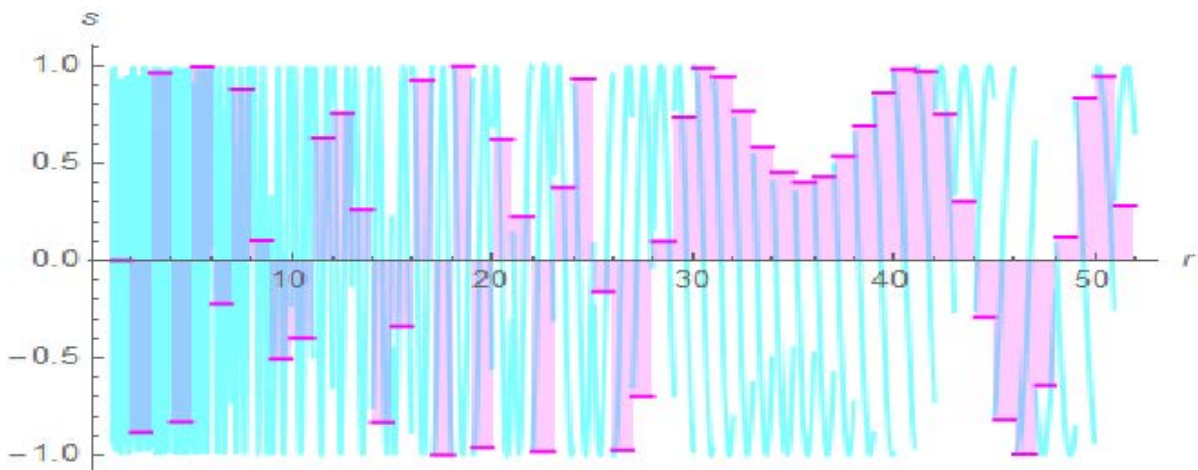
13・4・1 $v(y)$ の山($y=110.5$ 付近)

$\eta(0, y)$ を用いて $y=110.5$ 付近の山を正確に計算すると次のようになる。

FindMaximum[-Im[η[0, y]], {y, 110.5}]

{8.81197, {y → 110.337}} $y_M := 110.337$

(2.1) により $s(r, y_M)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (2.2) の山 8.812 となる。



この図において、マゼンタが連続して正である区間が3つあることが観察される。即ち、

(1) $r = 28 \sim 43$ は 16 項連続で正である。これらは第 59 ~ 67 周期に含まれる。

これらの周期の波長は 1.59 ~ 2.51 で、**波長の中心値は 2/1 である。**

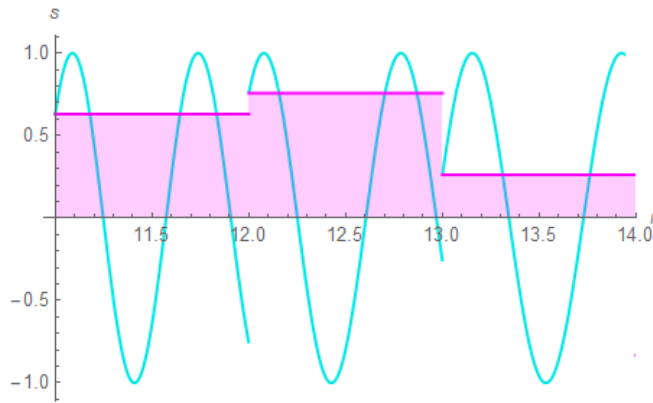
(2) $r = 11 \sim 13$ は 3 項連続で正である。これらは第 43 ~ 45 周期に含まれる。

これらの周期の波長は 0.64 ~ 0.72 で、**波長の中心値は 2/3 (=0.67) である。**

(3) $r = 7, 8$ は2項連続で正である。これらは第35 ~ 37周期に含まれる。

これらの周期の波長は $0.41 \sim 0.46$ で、これらは $2/5 (=0.4)$ に近い。

$r = 52$ より先は次第に正負が均衡して来るので、この3つの連続区間が $y = 110.5$ 付近の山の高さをほぼ決定する。なお、波長 $\lambda = 2/(2k-1)$ $k=1, 2, 3, \dots$ の近傍では同じ符号が連続する。最も解り易い (2) (波長の中心値: $2/3$) の拡大図によりこの理由を説明する。



$$r=11 \text{ のとき } s(11, 110.337) = (-1)^{\lfloor 10 \rfloor} \sin(110.337 \log 11) = +0.630$$

$$r=11+2/3 \text{ のとき } s(11.67, 110.337) = (-1)^{\lfloor 10.67 \rfloor} \sin(110.337 \log 11.67) = +0.778$$

$$r=11+3/3 \text{ のとき } s(12, 110.337) = (-1)^{\lfloor 11 \rfloor} \sin(110.337 \log 12) = -(-0.756)$$

つまり、半波長の終点が長さ1の区間の終端に近いからである。このことは $\lambda = 2/5, 2/7, \dots$ についても同様である。

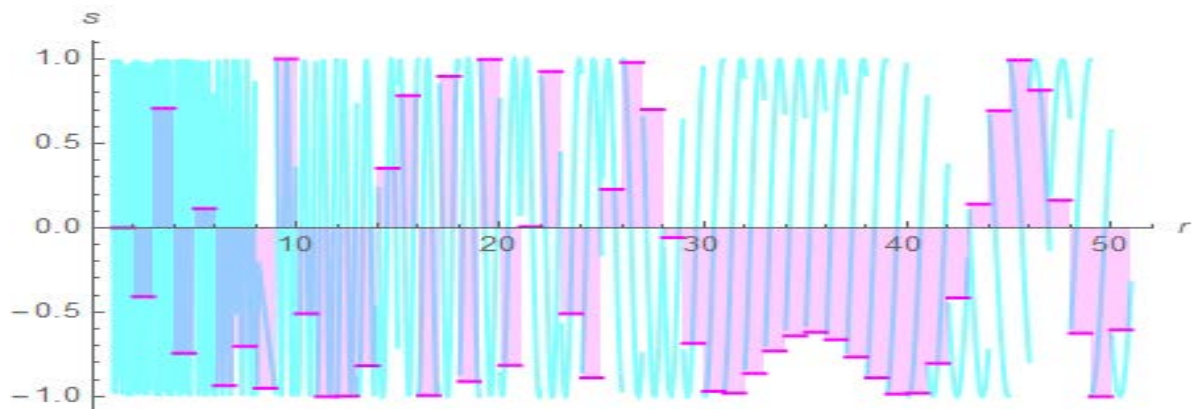
13.4.2 $v(y)$ の谷 ($y=109.5$ 付近)

$\eta(0, y)$ を用いて $y=109.5$ 付近の谷を正確に計算すると次のようになる。

FindMinimum[-Im[$\eta[0, y]$], {y, 109.5}]

{-12.9166, {y \rightarrow 109.382}} $y_v := 109.382$

(2.1) により $s(r, y_v)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (2.2) の谷 -12.917 となる。



この図において、シアンが連続して負である区間が3つあることが観察される。即ち、

(1) $r = 29 \sim 42$ は14項連続で負である。これらは第59 ~ 66周期に含まれる。

これらの周期の波長は $1.65 \sim 2.47$ で、波長の中心値は $2/1$ である。

(2) $r = 10 \sim 13$ は 4 項連続で負である。これらは第 41 ~ 45 周期に含まれる。

これらの周期の波長は $0.59 \sim 0.74$ で、波長の中心値は $2/3 (=0.67)$ である。

(3) $r = 6 \sim 8$ は 3 項連続で正である。これらは第 33 ~ 36 周期に含まれる。

これらの周期の波長は $0.37 \sim 0.44$ で、波長の中心値は $2/5 (=0.4)$ である。

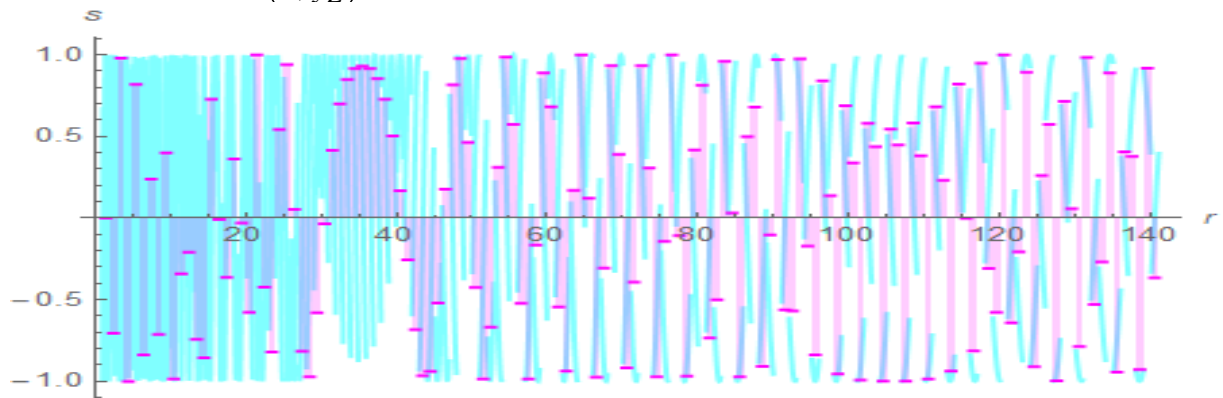
$r = 51$ より先は次第に正負が均衡して来るので、この3つの連続区間が $y=109.5$ 付近の谷の深さをほぼ決定づける。

参考 $v(y)$ の零点 ($y=110$ 付近)

$\eta(0, y)$ を用いて $y=110$ 付近の零点を正確に計算すると、

```
FindRoot[-Im[η[0, y]], {y, 110}]
{y → 109.907}           yz := 109.907
```

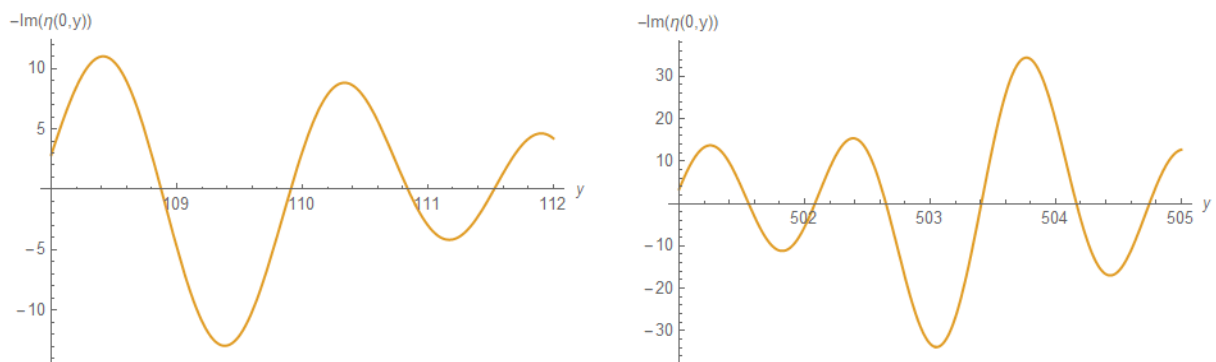
そして、(2.1) により $s(r, y_z)$ を描くと次のようになる。



波長 $\lambda = 2/1, 2/3$ の近傍で同符号が連続しているが、全体的に正負が相殺されており、 $r = 1 \sim 140$ のマゼンタの面積の積み上げ値は 0.01 となっている。 $r = 140$ より先の積み上げ値は -0.01 ということになる。

13.4.3 $v(y)$ の振幅と変数 y

$y = 108 \sim 112$ と $y = 501 \sim 505$ の $v(y) (= -\text{Im}\{\eta(0, y)\})$ を並べて描くと次のようになる。左図が前者、右図が後者である。



両図を見比べると次のことが分かる。

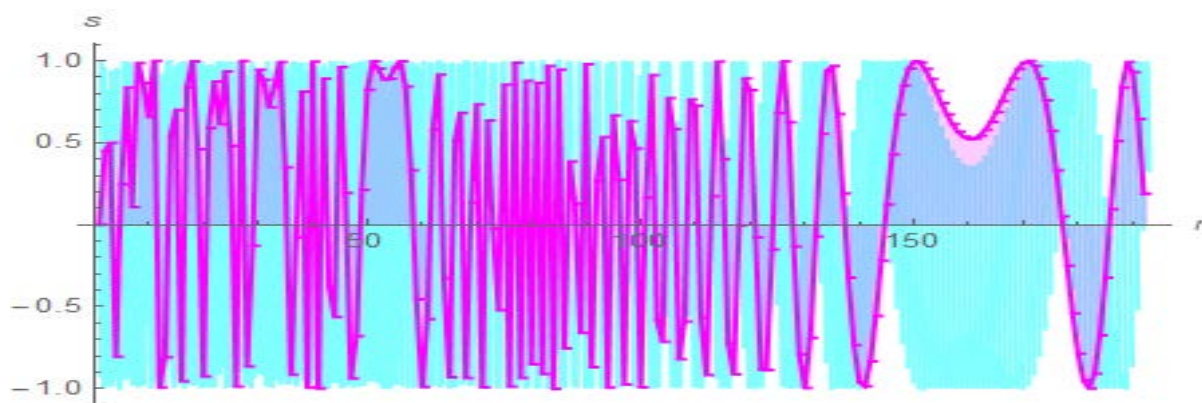
- (1) $y = 501 \sim 505$ の振幅は $y = 108 \sim 112$ の振幅よりも概して大きい。
- (2) $y = 501 \sim 505$ の周期は $y = 108 \sim 112$ の周期よりも概して短い。

これらは何れも解析的な証明が困難である。しかしながら、 $s(r, y)$ を用いれば(1) については図形的な証明が可能である。以下、それを示す。

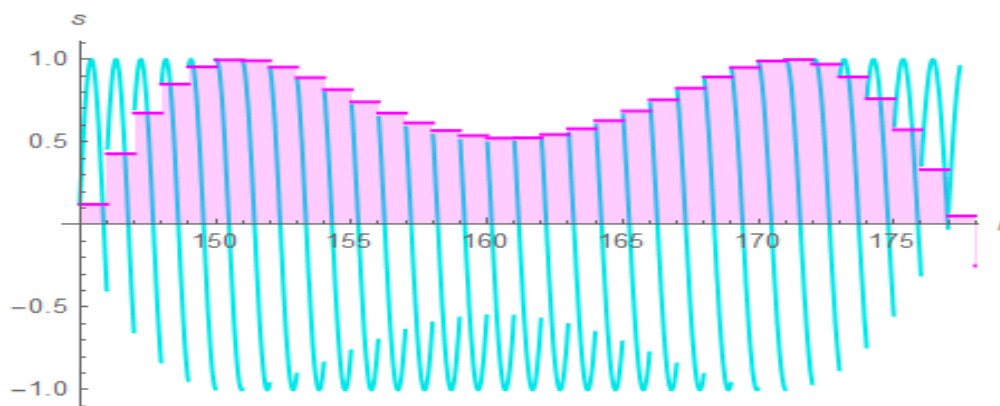
$\eta(0, y)$ を用いて $y=504$ 付近の山を正確に計算すると次のようになる。

```
FindMaximum[-Im[η[0, y]], {y, 504}]
{34.4319, {y → 503.767}}    yM := 503.767
```

(2.1) により $s(r, y_M)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (2.2) の山 34.432 となる。

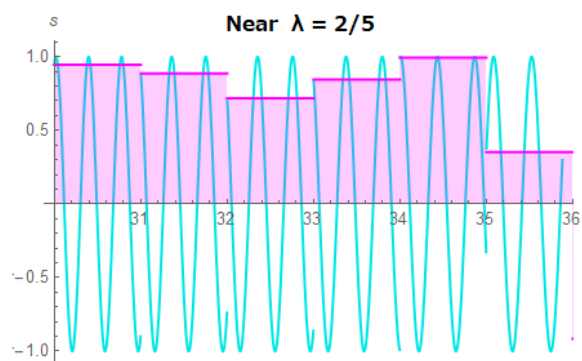
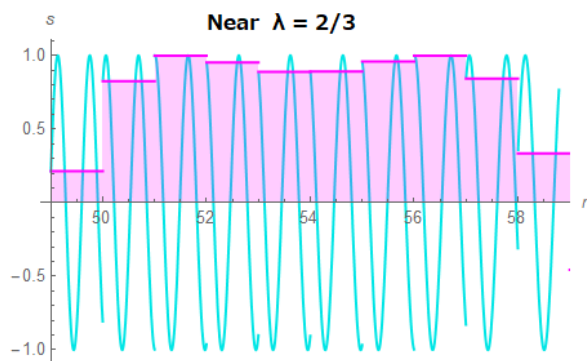


波長が $2/1$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



(1) この図の波長は $1.82 \sim 2.22$ である。これらは第 400~416 周期に含まれ、 $r = 145 \sim 177$ と 33 項連続で正である。この区間の長さは $13 \cdot 4 \cdot 1$ (1) の約 2 倍である。

波長が $2/3$ 及び $2/5$ 付近の拡大図を描くと次のようである。

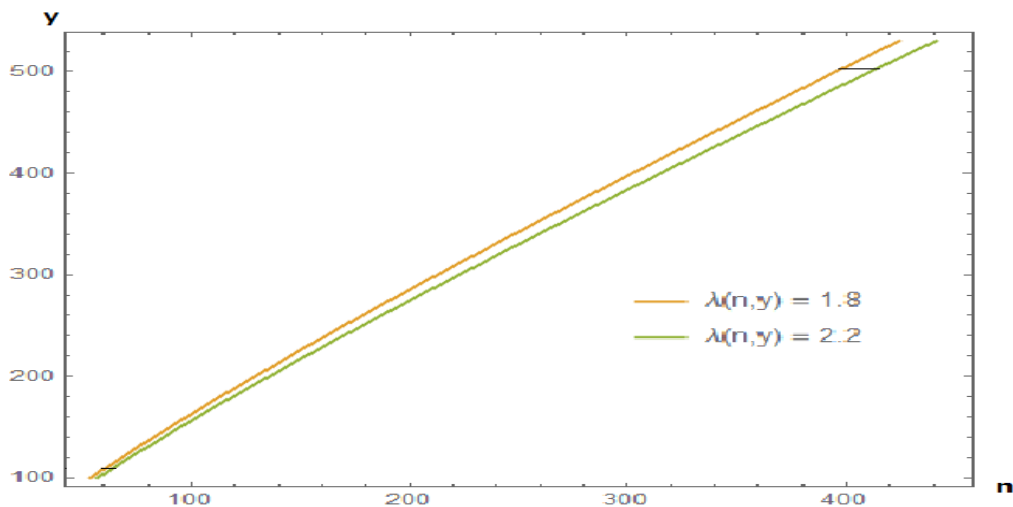


- (2) 左図の波長は $0.61 \sim 0.72$ である。これらは第 313~326 周期に含まれ、 $r = 49 \sim 58$ と 10 項連続で正である。この区間の長さは $13 \cdot 4 \cdot 1$ (2) の約 3 倍である。
- (3) 右図の波長は $0.37 \sim 0.43$ である。これらは第 273~285 周期に含まれ、 $r = 30 \sim 35$ と 6 項連続で正である。この区間の長さは $13 \cdot 4 \cdot 1$ (3) の 3 倍である。
- (4) (1) ~ (3) においては y が大きいと正の連続項数も大きいことが観察される。

その理由は波長の定義式にある。即ち

$$\lambda(n, y) = e^{(2n-2)\pi/y} (e^{2\pi/y} - 1)$$

$\lambda = 2$ の近傍を ± 2 とし、 $\lambda(n, y) = 1.8$ と $\lambda(n, y) = 2.2$ の等高線図を描くと次のようになる。縦軸は y で横軸は周期番号 n である。



$y=110$ 付近の波長 λ の許容範囲は左下の黒い横線であり、 $y=504$ 付近の λ の許容範囲は右上の黒い横線である。 $\lambda = 2.2$ の等高線は $\lambda = 1.8$ の等高線よりも勾配が小さいから右上の横線は左下の横線よりもかなり長い。つまり、 $y=504$ 付近の n の範囲は $y=110$ 付近の n の範囲よりも広い。このことは $y=504$ 付近の正の項数が $y=110$ 付近の正の項数よりも多いことを意味する。この結果、 $y=504$ 付近の山は $y=110$ 付近の山よりも高くなる傾向がある。 $\lambda = 2/3$, $\lambda = 2/5$ についても同様である。

- (5) y が大きくなると、波長 $\lambda = 2$ を与える周期番号 n も大きくなる。すると $\lambda = 2/7, 2/9, \dots$ の影響力も大きくなる。実際、 $\lambda = 2/7$ 付近は $r = 21 \sim 25$ と 5 項連続で正である。更に、 $r = 5 \sim 11$ は 7 項連続で正であるが、これらの波長は $2/15 \sim 2/29$ に近い。
- (6) 以上の結果、 $v(y)$ の $y=504$ 付近の山は $y=110.5$ 付近の山よりも高い。
- (7) ここまで山を例としてきたが、谷についても同様である。従って、 $v(y)$ の $y = 501 \sim 505$ の振幅は $y = 108 \sim 112$ の振幅よりも概して大きい。

Note

(7) は [ベルクマンの法則](#) (高緯度地方の熊は低緯度地方の熊よりも概して大きい) に似ている。

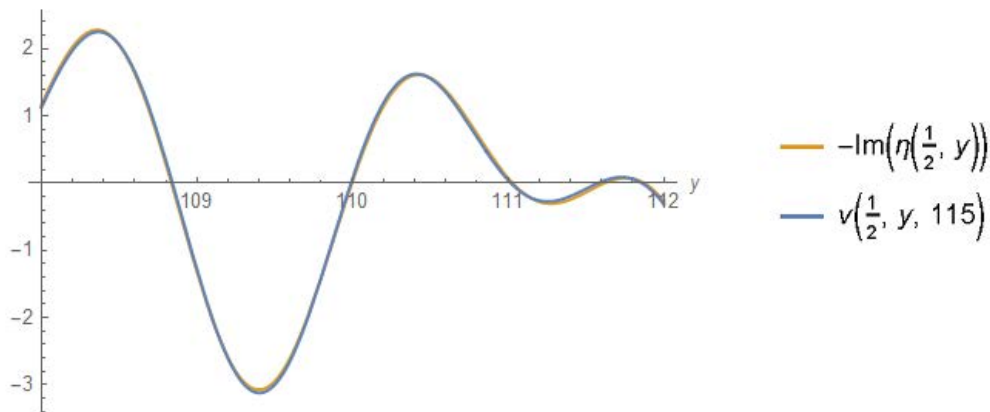
13・5 $v(x, y)$ の振幅

第3節で扱った ディリクレ・イータ型正弦関数および級数は次のようなものであった。

$$s(r, x, y) = \frac{(-1)^{\lfloor r-1 \rfloor}}{r^x} \sin(y \log r) \quad (\lfloor \rfloor \text{ は床関数。}) \quad (3.1)$$

$$v(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^x} \sin(y \log r) \quad (3.2)$$

本節では (3.1) を用いて、(3.2) の臨界線 ($x=1/2$) 上の振幅(山、谷、零点)について研究する。
 数値例として、 $y = 110$ 付近の $\eta(1/2, y)$ の虚部(負)と $v(1/2, y)$ とを一緒に描けば、



両者は殆ど一致しているが、以下の計算においては精度の高い $\eta(1/2, y)$ を用いる。

13・5・1 $v(1/2, y)$ の山 ($y=110.5$ 付近)

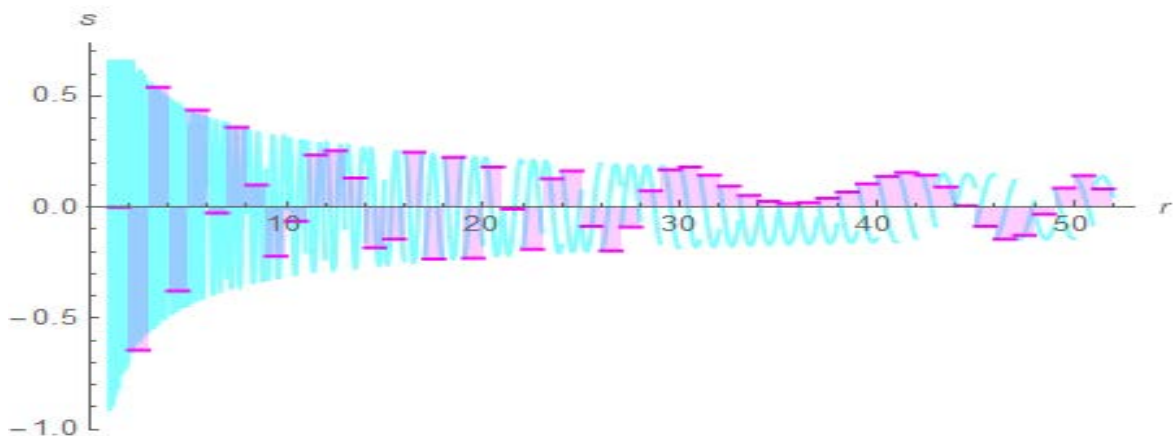
$\eta(1/2, y)$ を用いて $y=110.5$ 付近の山を正確に計算すると次のようになる。

```
FindMaximum[-Im[eta[1/2, y]], {y, 110.5}]
```

```
{1.61381, {y -> 110.426}}      y_M := 110.426
```

(3.1) により $s(r, 1/2, y_M)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (3.2) の山 1.614 となる。

13・4・1 と大きく異なっているのは r の増加に伴い振幅が減少していることである。



正項・負項の並びは13・4・1 と殆ど同じである。即ち

(1) $r = 28 \sim 43$ は 16 項連続で正である。これらは第 59 ~ 67 周期に含まれる。

これらの周期の波長は 1.59 ~ 2.50 で、波長の中心値は 2/1 である。

(2) $r = 11 \sim 13$ は 3 項連続で正である。これらは第 43 ~ 45 周期に含まれる。

これらの周期の波長は $0.64 \sim 0.72$ で、波長の中心値は $2/3 (=0.67)$ である。

(3) $r = 7, 8$ は 2 項連続で正である。これらは第 35 ~ 37 周期に含まれる。

これらの周期の波長は $0.41 \sim 0.45$ で、 $2/5 (=0.4)$ に近い。

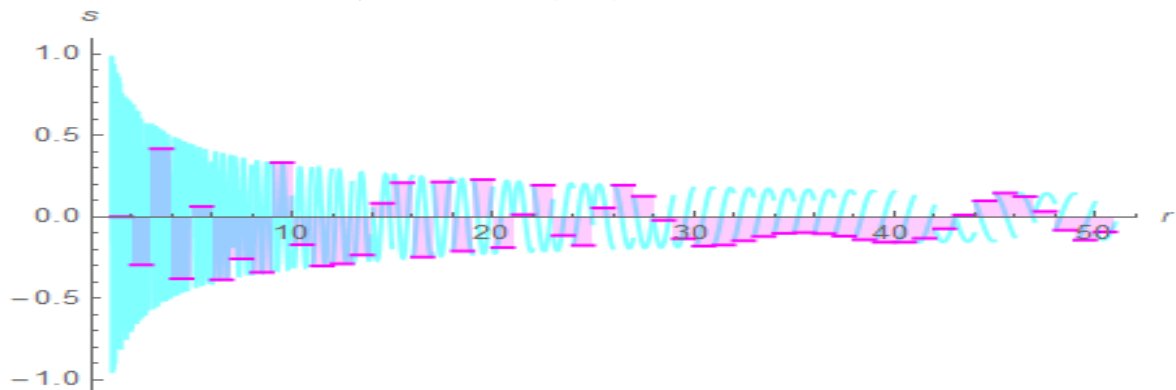
$r = 51$ より先は次第に正負が均衡して来るので、この3つの連続区間が $y=110.5$ 付近の山の高さをほぼ決定づける。前節と異なるのは、 $\lambda=2/5, \lambda=2/3$ 付近の振幅が $\lambda=2/1$ 付近の振幅より大きいことである。なお、波長 $\lambda=2/(2k-1)$ $k=1, 2, 3, \dots$ の近傍で同符号が連続する理由は前節と同じである。

13.5.2 $\nu(1/2, y)$ の谷 ($y=109.5$ 付近)

$\eta(1/2, y)$ を用いて $y=109.5$ 付近の谷を正確に計算すると次のようになる。

```
FindMinimum[-Im[η[1/2, y]], {y, 109.5}]
{-3.0718, {y → 109.399}}      yv := 109.399
```

(3.1) により $s(r, 1/2, y_v)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数で描かれている。マゼンタの面積を積み上げたものが (3.2) の谷 -3.072 となる。



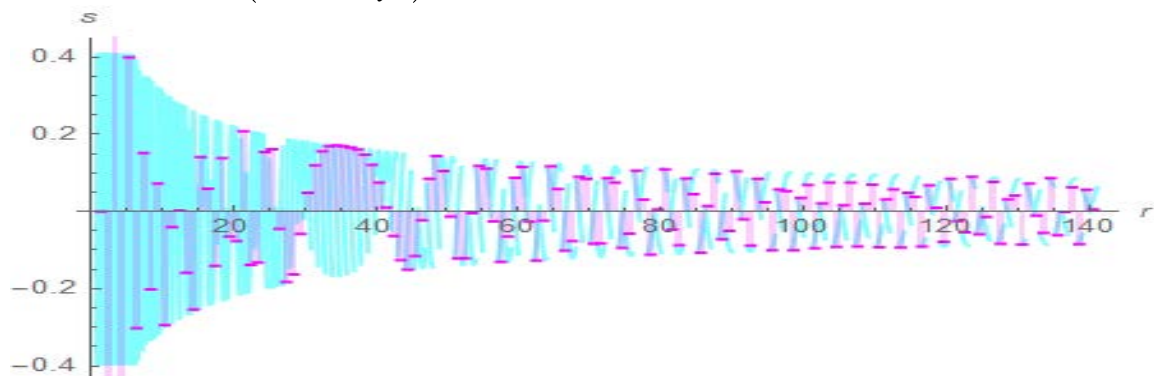
r の増加に伴い振幅が減少すること、正項・負項の並びが $13 \cdot 4 \cdot 2$ と殆ど同じであること、及び、 $\lambda=2/5, \lambda=2/3$ 付近の振幅が $\lambda=2/1$ 付近の振幅より大きいことは 山の場合と同様である。

参考 $\nu(1/2, y)$ の零点 ($y=110$ 付近)

$\eta(1/2, y)$ を用いて $y=110$ 付近の零点を正確に計算すると

```
FindRoot[-Im[η[1/2, y]], {y, 110}]
{y → 109.995}      yz := 109.995
```

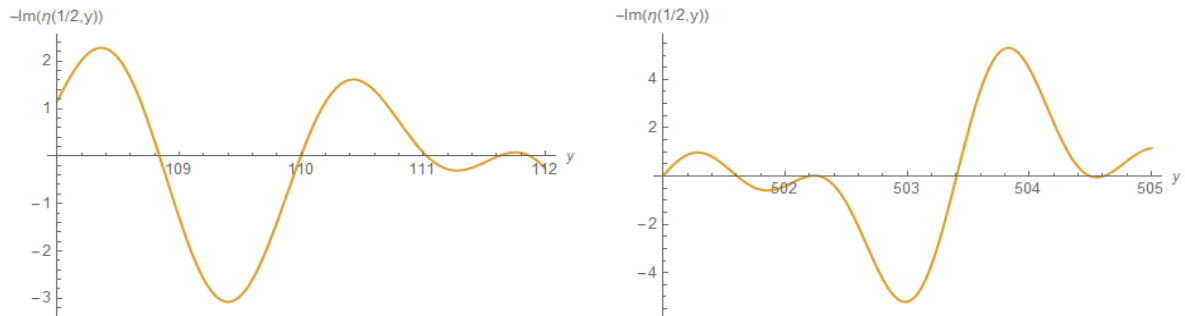
そして(3.1) により $s(r, 1/2, y_z)$ を描くと次のようになる。



波長 $\lambda = 2/1, 2/3$ の近傍で同符号が連続しているが、全体的に正負が相殺されており、 $r = 1 \sim 140$ のマゼンタの面積の積み上げ値は 0.02 となっている。 $r = 140$ より先の積み上げ値は -0.02 ということになる。

13.5.3 $v(1/2, y)$ の振幅と変数 y

$y = 108 \sim 112$ と $y = 501 \sim 505$ の $v(1/2, y)$ ($= -\text{Im}\{\{\eta(1/2, y)\}\}$) を並べて描くと次のようになる。左図が前者、右図が後者である。



両図を見比べると次のことが分かる。

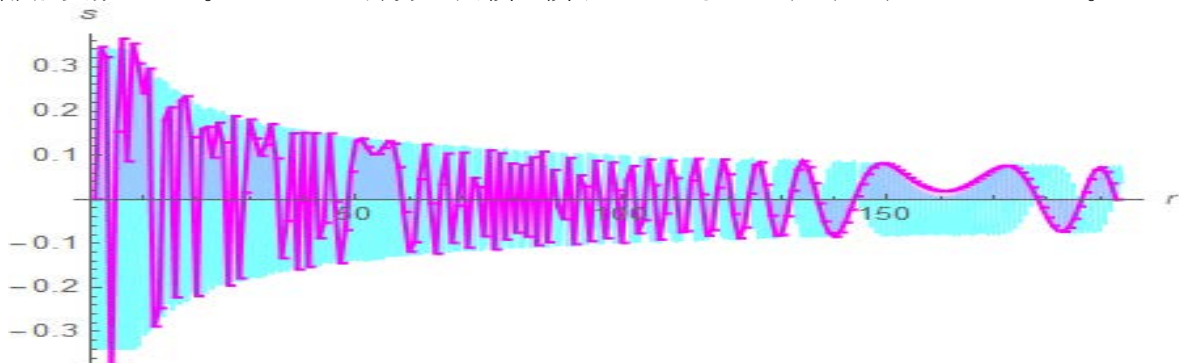
- (1) $y = 501 \sim 505$ の振幅は $y = 108 \sim 112$ の振幅よりも概して大きい。
- (2) $y = 501 \sim 505$ の周期は $y = 108 \sim 112$ の周期よりも概して短い。

これらの内 (1) について、以下、その図形的な証明を試みる。

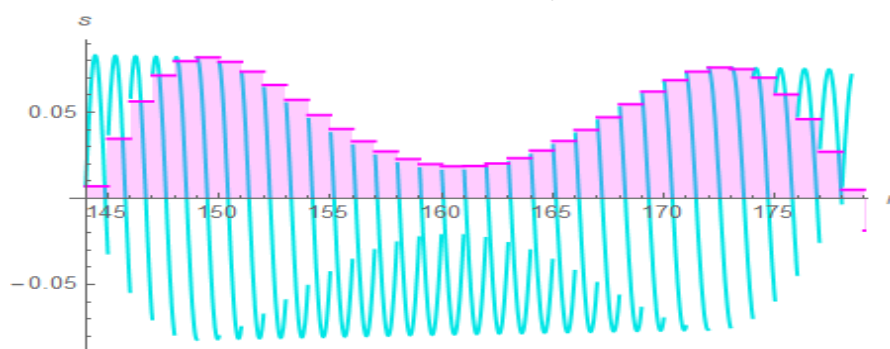
$\eta(1/2, y)$ を用いて $y=504$ 付近の山を正確に計算すると次のようになる。

```
FindMaximum[-Im[eta[1/2, y]], {y, 504}]
{5.31059, {y -> 503.829}}      y_M := 503.829
```

(3.1) により $s(r, 1/2, y_M)$ を描くと次のとおり。横軸は r であり、シアンは連続変数、マゼンタは離散変数である。マゼンタの部分の面積を積み上げたものが (3.2) の山 5.31 となる。

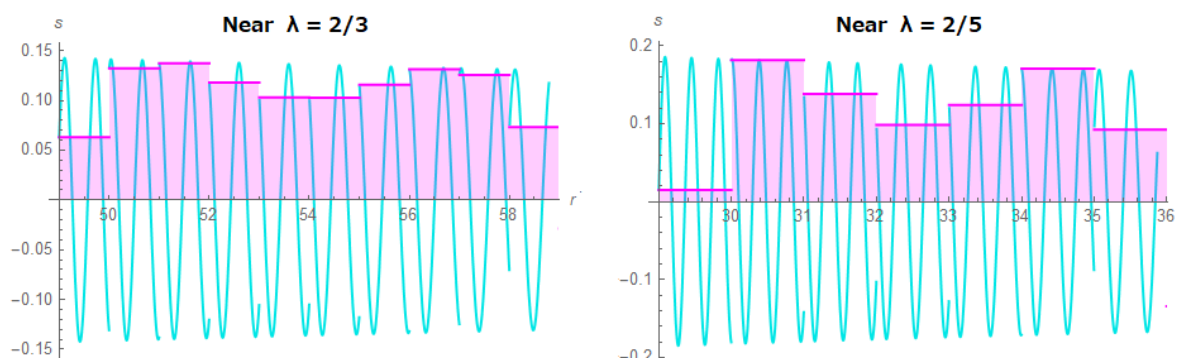


波長が $2/1$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



- (1) この図の波長は $1.80 \sim 2.22$ である。これらは第 399~416 周期に含まれ、 $r = 144 \sim 178$ と 35 項連続で正である。この区間の長さは $13 \cdot 5 \cdot 1$ (1) の約 2 倍である。

波長が $2/3$ 及び $2/5$ 付近の拡大図を描くと次のようである。



- (2) 左図の波長は $0.61 \sim 0.72$ である。これらは第 312~326 周期に含まれ、 $r = 49 \sim 58$ と 10 項連続で正である。この区間の長さは $13 \cdot 5 \cdot 1$ (2) の 3.3 倍である。
しかも、振幅は $\lambda = 2/1$ 付近よりも大きい。
- (3) 右図の波長は $0.37 \sim 0.43$ である。これらは第 271~285 周期に含まれ、 $r = 29 \sim 35$ と 7 項連続で正である。この区間の長さは $13 \cdot 5 \cdot 1$ (3) の 2.5 倍である。
しかも、振幅は $\lambda = 2/3$ 付近よりも大きい。
- (4) (1) ~ (3) では y が大きい方が正項の連続項数が大きいことが観察される。その理由は、前節 (4) で述べたところである。
- (5) y が大きくなると、波長 $\lambda = 2$ を与える周期番号 n も大きくなる。すると $\lambda = 2/7, 2/9, \dots$ の影響力も大きくなる。実際、 $\lambda = 2/7$ 付近は $r = 21 \sim 25$ と 5 項連続で正であり、また、 $r = 5 \sim 11$ は 7 項連続で正であるが、この辺の波長は $2/15 \sim 2/29$ に近い。
しかも、波長が短い区間ほど振幅が大きい。
- (6) 以上の結果、 $v(1/2, y)$ の $y = 504$ 付近の山は $y = 110.5$ 付近の山よりも高い。
- (7) ここまで山を例としてきたが、谷についても同様である。従って、 $v(1/2, y)$ の $y = 501 \sim 505$ の振幅は $y = 108 \sim 112$ の振幅よりも概して大きい。

Note 1

(7) は ベルクマンの法則 (高緯度地方の熊は低緯度地方の熊よりも概して大きい) に似ている。

Note 2

$x > 1/2$ のときは $1/r^x$ の影響力が大きすぎて (1) ~ (7) は成立しそうにない。

2023.04.16

河野 和
広島市

宇宙人の数学