

## 14 ディリクレ級数における零点と位相

### 要 旨

- (1) ディリクレ級数の零点は固定点であり、位相 (phase) には依存しない。
- (2) ディリクレ級数の非零点は可動点であり、位相 (phase) に依存する。

### 14・1 一般ディリクレ級数における零点と位相

#### 一般ディリクレ級数の定義

$R$  を実数集合、 $z = x + iy$   $x, y \in R$ 、 $r$  を自然数、 $\lambda_r \in R$ 、 $\lambda_r < \lambda_{r+1}$ 、そして  $c_r$  を任意の複素数とする。すると一般ディリクレ級数  $f(z)$  は次式で定義される。

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (1.0)$$

#### 定理 14・1・1

$(a, b)$  が一般ディリクレ級数  $f(x, y)$  の零点であるとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r} \cdot e^{-i(b\lambda_r + \theta)} = 0 \quad \forall \theta \in R \quad (1.1)$$

#### 証明

$f(x, y)$  の零点  $(a, b)$  においては、

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r - i b \lambda_r} = 0$$

両辺に  $e^{-i\theta}$  ( $\forall \theta \in R$ ) を乗じれば

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r} \cdot e^{-i(b\lambda_r + \theta)} = 0 \quad (1.1)$$

定理 14・1・1 を三角関数で表せば次のようになる。

#### 系 14・1・1'

$(a, b)$  が一般ディリクレ級数  $f(x, y)$  の零点であるとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r} \cos(b\lambda_r + \theta) = - \sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r} \sin(b\lambda_r + \theta) = 0 \quad \forall \theta \in R \quad (1.1')$$

#### Note

この系は 三角関数の加法定理を用いて直接証明することもできる。

位相 (phase)  $\theta$  は任意でよいから、更に次が従う。

#### 系 14・1・1''

$(a, b)$  が一般ディリクレ級数  $f(x, y)$  の零点であるとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r} \cos(b\lambda_r + \theta_c) = - \sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-a\lambda_r} \sin(b\lambda_r + \theta_s) = 0 \quad \forall \theta_c, \theta_s \in R \quad (1.1'')$$

**Remark 1**

以上の定理および系は一般ディリクレ級数  $f(x,y)$  の零点  $(a,b)$  が位相  $(\theta, \theta_c, \theta_s)$  に関して独立であることを示している。逆に、非零点  $(x,y)$  が位相  $(\theta, \theta_c, \theta_s)$  に依存していることは上記証明過程から明らかである。

**Remark 2**

以上の定理および系はフーリエ級数についても成立する。

## 14・2 通常ディリクレ級数における零点と位相

### 通常ディリクレ級数の定義

一般ディリクレ級数において  $\lambda_r = \log r$  と置けば通常ディリクレ級数が得られる。

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.0)$$

通常ディリクレ級数は単に **ディリクレ級数** と呼ばれている。本章でも、以下、その通称を採用する。

定理 14・1・1 において  $\lambda_r = \log r$  と置けば次が得られる。

### 定理 14・2・1

$(a, b)$  がディリクレ級数  $f(x, y)$  の零点であるとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^a} e^{-i(b \log r + \theta)} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{R} \quad (2.1)$$

定理 14・2・1 を三角関数で表せば次のようになる。

### 系 14・2・1'

$(a, b)$  がディリクレ級数  $f(x, y)$  の零点であるとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^a} \cos(b \log r + \theta) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^a} \sin(b \log r + \theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbf{R} \quad (2.1')$$

位相 (phase)  $\theta$  は任意でよいから、更に次が従う。

### 系 14・2・1''

$(a, b)$  がディリクレ級数  $f(x, y)$  の零点であるとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^a} \cos(b \log r + \theta_c) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^a} \sin(b \log r + \theta_s) = 0 \quad \forall \theta_c, \theta_s \in \mathbf{R} \quad (2.1'')$$

### Note

これらは **ディリクレ級数**  $f(x, y)$  の零点  $(a, b)$  が位相  $(\theta, \theta_c, \theta_s)$  に関して独立であることを示している。逆に、非零点  $(x, y)$  は位相  $(\theta, \theta_c, \theta_s)$  に依存している。

### 14・3 零点と非零点 (例)

本節では、前節の例示のため、ディリクレ・イータ関数を使用する。

#### ディリクレ・イータ関数

$c_r = (-1)^r$  のとき、前節の (2.0) はディリクレ・イータ関数  $\eta(z)$  となる。即ち

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^z} \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3.0)$$

$z = x + iy$ ,  $\eta(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$  とすれば、

$$u(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^x} \cos(y \log r)$$

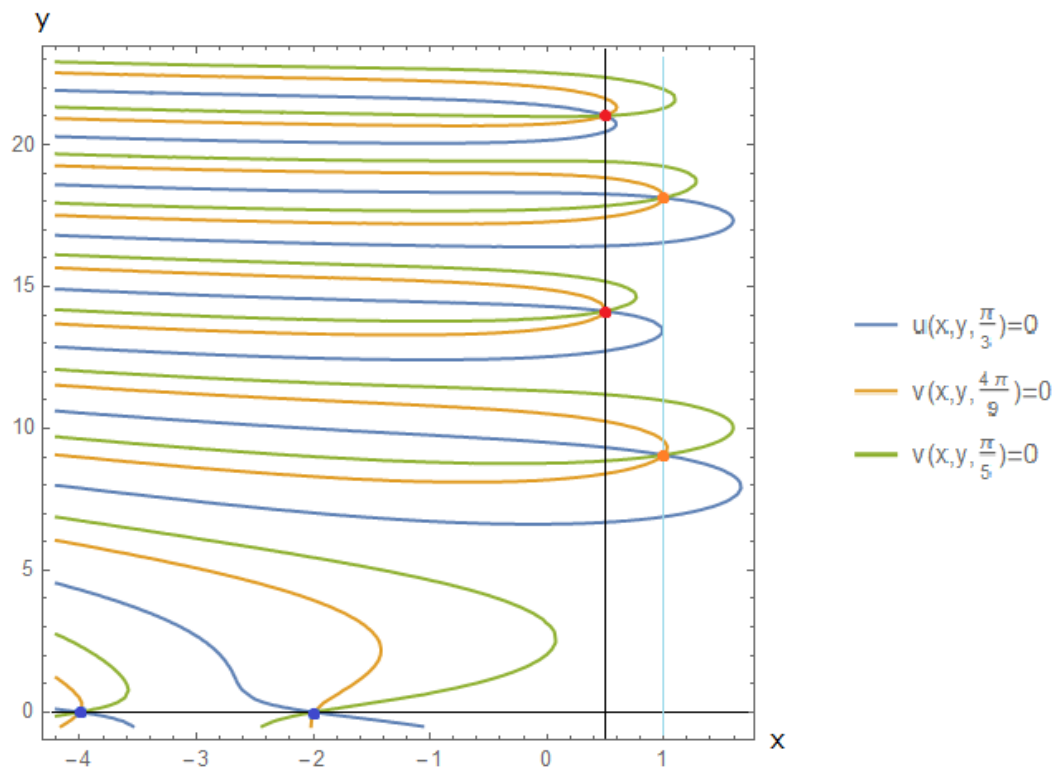
$$v(x, y) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^x} \sin(y \log r)$$

#### 14・3・1 零点と位相

定理 14・2・1” により、ディリクレ関数  $\eta(x, y)$  の零点  $(a, b)$  は次の連立方程式の解となる。

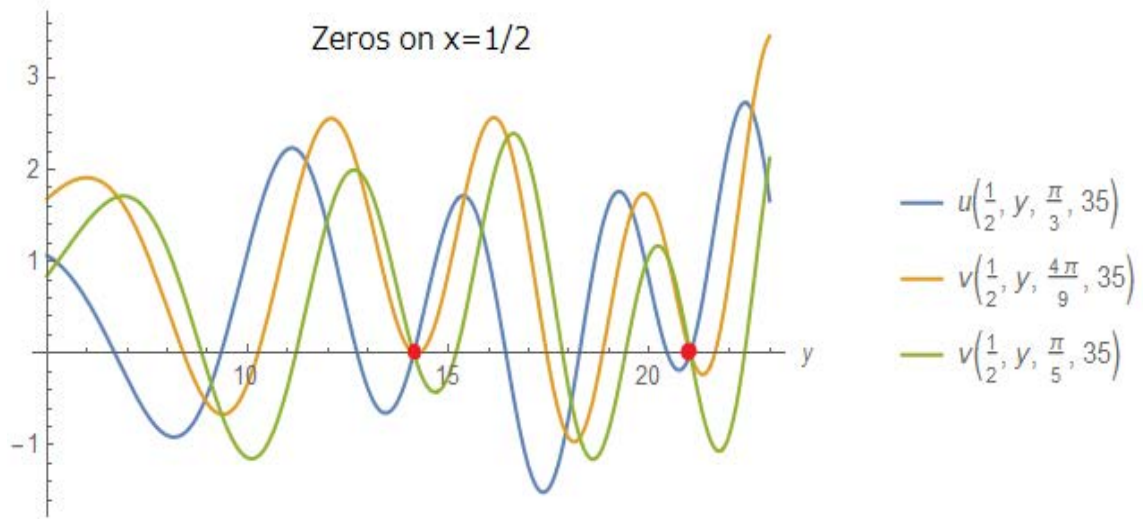
$$\begin{cases} u(x, y, \theta_c) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^x} \cos(y \log r + \theta_c) = 0 \\ v(x, y, \theta_s) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^x} \sin(y \log r + \theta_s) = 0 \end{cases} \quad \forall \theta_c, \theta_s \in \mathbb{R} \quad (3.0)$$

例1  $\theta_c = \pi/3$ ,  $\theta_s = 4\pi/9$ ,  $\pi/5$  のとき  $u, v$  の高さ 0 の等高線図を描けば次のようになる。



赤点は  $\eta(x, y)$  の非自明な零点で  $x=1/2$  上にあり、橙点は  $\eta$  固有の零点で  $x=1$  上にあり、青点は  $\eta(x, y)$  の自明な零点で  $y=0$  上にある。

また、 $\theta_c = \pi/3, \theta_s = 4\pi/9, \pi/5$  のとき  $u, v$  の  $x=1/2$  上の2D図を描けば次のようになる。



なお、 $x = 1$  及び  $y = 0$  上でも類似の2D図が描けるが、ここでは割愛する。

両図において注目すべきは、位相  $\theta_c, \theta_s$  の如何なる変化に対してもこれらの零点が不動点(動かない点)であることである。

### 14・3・2 非零点と位相

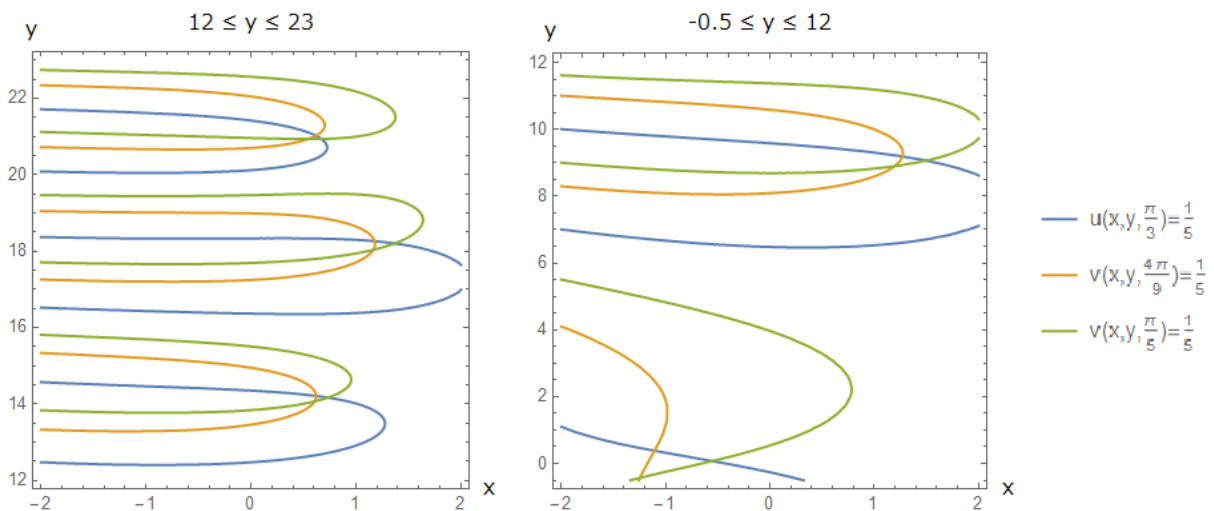
次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} u(x, y, \theta_c) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^x} \cos(y \log r + \theta_c) = \rho \\ v(x, y, \theta_s) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^x} \sin(y \log r + \theta_s) = \rho \end{cases} \quad \theta_c, \theta_s, \rho \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$\rho \neq 0$  のとき、この解はディリクレ・イータ関数  $\eta(x, y)$  の非零点である。

例2  $\theta_c = \pi/3, \theta_s = 4\pi/9, \pi/5$  のとき高さ  $1/5$  の等高線図を描けば次のようになる。

交点を見易くするため、左図に上半分が、右図に下半分が描かれている。



両図において、2曲線の交点はどれも  $\eta(x, y)$  の非零点であるが、これらの交点はいずれも

一致していない。このことは  $\eta(x, y)$  の非零点が位相  $\theta_c, \theta_s$  に従って動いていることを示している。

2023.06.09

河野 和  
広島市

宇宙人の数学