定理・公式の一覧（無限次方程式編）

1 無限級数の累乗

1・1　多重コーシー積

公式 1・1・1（無限級数の多重コーシー積）

収束する複数個の無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s} b_s$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s} b_{s-t} c_t$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s} b_{s-t} c_{t-u} d_u$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{1,r}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{2,r}\right)\cdots\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{n,r}\right) = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{1,r_1-r_2}\, a_{2,r_2-r_3}\cdots a_{n-1,r_{n-1}-r_n}\, a_{n,r_n}$$

特に、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2r} (-1)^s a_s a_{2r-s}$$

公式 1・1・2（冪級数の多重コーシー積）

収束する複数個の冪級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s} b_s z^r$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s} b_{s-t} c_t z^r$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s} b_{s-t} c_{t-u} d_u z^r$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{1,r} z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{2,r} z^r\right)\cdots\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{n,r} z^r\right) = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{1,r_1-r_2}\, a_{2,r_2-r_3}\cdots a_{n-1,r_{n-1}-r_n}\, a_{n,r_n} z^{r_1}$$

特に、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r z^r\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2r} (-1)^s a_s a_{2r-s} z^{2r}$$

1・2　無限級数の累乗（その1）

公式 1・2・1（無限級数の累乗）

収束する無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s} a_s$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s} a_{s-t} a_t$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^4 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s} a_{s-t} a_{t-u} a_u$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^n = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2}\,a_{r_2-r_3}\cdots a_{r_{n-1}-r_n}\,a_{r_n}$$

公式 1･2･2 (冪級数の累乗)

収束する冪級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s}\,a_s z^r$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\,a_{s-t}\,a_t z^r$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^4 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s}\,a_{s-t}\,a_{t-u}\,a_u z^r$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^n = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2}\,a_{r_2-r_3}\cdots a_{r_{n-1}-r_n}\,a_{r_n} z^r$$

1･3　無限級数の累乗(その2)

以下の2つの公式は次節以下の数式簡素化のために重要である。

公式 1･3･1 (無限級数の累乗)

収束する無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^2 + 2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^3 + 3\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s\right) - 3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^4 = 2\sum_{r=0}^{\infty} a_r^4 - \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r^2\right)^2 + 4\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s\right)$$
$$- 8\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t\right) + 8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} a_r a_s a_t a_u$$

公式 1･3･2 (冪級数の累乗)

収束する冪級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^2 z^{2r} + 2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s z^{r+s}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^3 z^{3r} + 3\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s z^{r+s}\right) - 3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t z^{r+s+t}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^4 = 2\sum_{r=0}^{\infty} a_r^4 z^{4r} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r^2 z^{2r}\right)^2 + 4\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^2\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s z^{r+s}\right)$$
$$- 8\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t z^{r+s+t}\right) + 8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} a_r a_s a_t a_u z^{r+s+t+u}$$

2 整数を根とする無限次方程式

本章で用いる記号

本章において、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、γ はオイラー・マスケロ二の定数、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

2·1 整数を根とする無限次方程式(その1)

公式 2·1·1

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)e^{-\frac{z}{r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r}\right)e^{-\frac{z}{2r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r}\right)e^{\frac{z}{2r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)e^{-\frac{z}{2r-1}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)e^{\frac{z}{2r-1}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)e^{-\frac{z}{2r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s \gamma^{r-s}}{(2s)!!\,(2r-2s)!!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)e^{\frac{z}{2r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s \gamma^{r-s}}{(2s)!!\,(2r-2s)!!}\right\}z^r$$

2·2 整数を根とする無限次方程式(その2)

公式 2·2·1

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r} \qquad \left(=\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r}\right)\left(1-\frac{z}{2r}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^{2r} \qquad \left(=\frac{\sin(\pi z/2)}{\pi z/2}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r-1}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(4r)!!}z^{2r} \qquad \left(=\cos\frac{\pi z}{2}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r}\right)=1+\frac{b_1-a_1}{2!!}z^1$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}\left\{\frac{b_r+(-1)^r a_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}b_s a_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)\left(1+\frac{z}{2r}\right)=1+\frac{a_1-b_1}{2!!}z^1$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}\left\{\frac{a_r+(-1)^r b_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}a_s b_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r$$

2･3 虚整数を根とする無限次方程式(その1)

公式 2･3･1

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)e^{-\frac{z}{ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}i^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{ir}\right)e^{\frac{z}{ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2ir}\right)e^{-\frac{z}{2ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{i^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2ir}\right)e^{\frac{z}{2ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-i)^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{-\frac{z}{i(2r-1)}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}i^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+log\,2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+log\,2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{\frac{z}{i(2r-1)}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+log\,2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+log\,2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{-\frac{z}{2ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}i^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{\frac{z}{2ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^r$$

2･4 虚整数を根とする無限次方程式(その2)

公式 2･4･1

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)\left(1-\frac{z}{ir}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r}\qquad\left(=\frac{sinh\,\pi z}{\pi z}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2ir}\right)\left(1-\frac{z}{2ir}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^{2r}\qquad\left(=\frac{sinh(\pi z/2)}{\pi z/2}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(4r)!!}z^{2r}\qquad\left(=cosh\frac{\pi z}{2}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left(1-\frac{z}{2ir}\right)=1+i\frac{a_1-b_1}{2!!}z$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}i^r\left\{\frac{a_r+(-1)^r b_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}a_s b_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left(1+\frac{z}{2ir}\right)=1+i\frac{b_1-a_1}{2!!}z$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}i^r\left\{\frac{b_r+(-1)^r a_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}b_s a_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r$$

2･5 整数の平方根を持つ無限次方程式

公式 2･5･1（正整数の平方根を持つ無限次方程式）

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{r}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{r}}\right)e^{\frac{z^2}{r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^{2r}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{2r}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{2r}}\right)e^{\frac{z^2}{2r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^{2r}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)e^{\frac{z^2}{2r-1}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^{2r}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)e^{\frac{z^2}{2r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^{2r}$$

公式 2･5･2（負整数の平方根を持つ無限次方程式）

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{r}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{r}}\right)e^{-\frac{z^2}{r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^{2r}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^{2r}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r-1}}$$
$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^{2r}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^{2r}$$

2･6 平方数を根とする無限次方程式

公式 2･6･1（平方数を根とする無限次方程式）

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r^2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^r\qquad\left(=\frac{\sin(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{(2r)^2}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^r\qquad\left(=\frac{\sin(\pi\sqrt{z/4})}{\pi\sqrt{z/4}}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{(2r-1)^2}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(4r)!!}z^r \qquad \left(=\cos\frac{\pi\sqrt{z}}{2}\right)$$

公式 2･6･2 (負の平方数を根とする無限次方程式)

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r^2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^r \qquad \left(=\frac{\sinh\left(\pi\sqrt{z}\right)}{\pi\sqrt{z}}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{(2r)^2}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^r \qquad \left(=\frac{\sinh\left(\pi\sqrt{z/4}\right)}{\pi\sqrt{z/4}}\right)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{(2r-1)^2}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(4r)!!}z^r \qquad \left(=\cosh\frac{\pi\sqrt{z}}{2}\right)$$

3 無限次方程式における根と係数

3·1 無限次方程式の特性

(1) 代数学の基本定理が一般的に成立しない。
(2) 根と係数の関係(Vieta's formulas)が一般的に成立しない。
(3) 有理係数の無限次方程式の根は一般的に代数的数でない。

3·2 根と係数の関係(その1)

公式 3·2·1 (ヴィエタの公式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots$ を持ち、次のように完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\left(1-\frac{z}{z_3}\right)\left(1-\frac{z}{z_4}\right)\cdots$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

但し、

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1}}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2}}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3}}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} z_{r_3} z_{r_3}}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{z_{r_1} z_{r_2} \cdots z_{r_n}}$$

公式 3·2·2

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{(r_1 r_2 \cdots r_n)^2} = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{\{(2r_1-1)(2r_2-1)\cdots(2r_n-1)\}^2} = \frac{\pi^{2n}}{(4n)!!}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_n}}{r_1 r_2 \cdots r_n} = \frac{\alpha_n+(-1)^n \beta_n}{(2n)!!} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-s} \alpha_s \beta_{n-s}}{(2s)!!\{2(n-s)\}!!}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、かつ

$$\alpha_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k B_{r,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$\beta_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

3・3 根と係数の関係(その2)

公式 3・3・1

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots$ を持ち、次のように不完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_r}\right)e^{\frac{z}{z_r}}$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\cdots$$

$$c_1 = \frac{a_1 a_1^0}{0!}-\frac{a_0 a_1^1}{1!}$$

$$c_2 = \frac{a_2 a_1^0}{0!}-\frac{a_1 a_1^1}{1!}+\frac{a_0 a_1^2}{2!}$$

$$c_3 = \frac{a_3 a_1^0}{0!}-\frac{a_2 a_1^1}{1!}+\frac{a_1 a_1^2}{2!}-\frac{a_0 a_1^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$c_r = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!}$$

但し、

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\ ,\ a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\ ,\ a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\ ,\ \cdots$$

特に $c_1 \sim c_4$ は次のように簡潔に表される。

$$c_1 = 0\ ,\ c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r^2}\ ,\ c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r^3}\ ,\ c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^4}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^2 z_{r_2}^2}$$

公式 3・3・2

$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数、$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー・マスケロ二の定数、そして α_r, a_r はそれぞれ次のような定数とする。

$$\alpha_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1}\ ,\ a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1 r_2}\ ,\ a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{r_1 r_2 r_3}\ ,\ \cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!} = \frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\alpha_s\gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

特に、

$$-\frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\alpha_1\gamma^1}{1!1!}+\frac{\alpha_2\gamma^0}{2!0!}$$

$$-\frac{\zeta(3)}{3} = \frac{\gamma^3}{3!}-\frac{\alpha_1\gamma^2}{1!2!}+\frac{\alpha_2\gamma^1}{2!1!}-\frac{\alpha_3\gamma^0}{3!0!}$$

$$-\frac{\zeta(4)}{8}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\gamma^4}{4!}-\frac{\alpha_1\gamma^3}{1!3!}+\frac{\alpha_2\gamma^2}{2!2!}-\frac{\alpha_3\gamma^1}{3!1!}+\frac{\alpha_4\gamma^0}{4!0!}$$

公式 3･3･3

$\lambda(z)$ をディリクレ･ラムダ関数、$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー･マスケロ二の定数、そして β_r , a_r は次のような定数とする。

$$\beta_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{2r_1-1} \quad , \quad a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(2r_1-1)(2r_2-1)}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{(2r_1-1)(2r_2-1)(2r_3-1)} \quad , \cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}\,a_1^s}{s\,!} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r\,!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)\,!}$$

特に、

$$-\frac{\lambda(2)}{2} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2}{2\,!} + \sum_{s=1}^{2}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{2-s}}{(2s)!!\,(2-s)\,!}$$

$$-\frac{\lambda(3)}{3} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3}{3\,!} + \sum_{s=1}^{3}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{3-s}}{(2s)!!\,(3-s)\,!}$$

$$-\frac{\lambda(4)}{8} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(2r_1-1)^2(2r_2-1)^2} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^4}{4\,!} + \sum_{s=1}^{4}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{4-s}}{(2s)!!\,(4-s)\,!}$$

3･4 実係数の無限次方程式

定義

領域 D 上に定義された関数 $f(z)$ が

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \qquad z \in D$$

を満たすとき、$f(z)$ は **複素共役性を持つ** と言う。ここで $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す。

定理 3･4･1

関数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ において a_k $(k=0,1,2,\cdots)$ が実数であるとき、$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$

系 3･4･1

無限次方程式 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k = 0$ において a_k $(k=0,1,2,\cdots)$ が実数であるとき、

z_0 が根ならば、$\overline{z_0}$ もまた根である。

3･5 根と係数の関係(その3)

公式 3･5･1 (共役複素根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k = x_k \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ $(k=1,2,3,\cdots)$ を持ち、次のように

完全に因数分解されるとする。

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z)=1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$$

但し、

$$a_1=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_3=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$\begin{aligned}a_4=&\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}\\&+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}\\&+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}a_{2n-1}=&-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}\\&-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)}\\&\ \vdots\\&-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_n}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2n}=&\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)}\\&+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}\\&\ \vdots\\&+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}\end{aligned}$$

系 3･5･1 (共役虚根を持つ無限次方程式)

無限次方程式

$$1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots=0$$

がその根 $z_k=\pm iy_k$, $y_k\neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) で完全に因数分解されるとき、

$$a_{2r-1}=0 \quad (r=1,2,3,\cdots)$$

$$a_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2}$$

$$a_4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2y_{r_2}^2}$$

$$a_6=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2y_{r_2}^2y_{r_3}^2}$$

$$a_8=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2y_{r_2}^2y_{r_3}^2y_{r_4}^2}$$

$$\vdots$$

3･6 根と係数の関係(その4)

公式 3･6･1 (共役複素根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k=x_k\pm iy_k$, $y_k\neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) を持ち、次のように不完全に因数分解されるとする。

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_rz}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_rz}{x_r^2+y_r^2}}$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z)=1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\cdots$$

$$c_r=\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s\,!}$$

但し、

$$a_0=1$$

$$a_1=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_3=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$a_4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$\vdots$

$$a_{2n-1}=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)}$$

$\vdots$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_n}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

$$a_{2n}=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$\vdots$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

特に $c_1 \sim c_4$ は次のような より高速な式で表される。

$$c_1=0$$

$$c_2=-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$c_3=-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$c_4=-\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^4+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{2x_{r_2}}{x_{r_2}^2+y_{r_2}^2}\right)^2$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

系 3･6･1 (実数部が **1/2** の根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k=1/2\pm iy_k$, $y_k\neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) を持ち、次のように不完全に因数分解されるとする。

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots$$

$$c_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{a_{r-s} a_1^s}{s!}$$

但し、

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{1/4 + y_{r_1}^2}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$- \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)}$$

$$+ \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$+ \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$\vdots$

特に $c_1 \sim c_4$ は次のような より高速な式で表される。

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{3} \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^2$$

$$c_4 = -\frac{1}{8} \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^4 + \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} \right)^2 \left(\frac{1}{1/4+y_{r_2}^2} \right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

4 リーマン仮説と同値な級数の和

4·1 $-z\zeta(1-z)$ の因数分解

公式 4·1·1（0の周りの因数分解 ）

γ をオイラー·マスケロ二の定数、$\zeta(z)$ をリーマン·ゼータ関数、その非自明な零点を x_n+iy_n　$n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}} e^{\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

4·2 スチルチェス定数によるマクローリン展開

公式 4·2·1

$\zeta(z)$ をリーマン·ゼータ関数とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$-z\zeta(1-z) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\gamma_{s-1}}{s!}z^s$$

但し γ_s は次式で定義されるスチルチェス定数である。

$$\gamma_s = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\log k)^s}{k} - \frac{(\log n)^{s+1}}{s+1}\right\}$$

4·3 アダマール積によるマクローリン展開

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数とし、a_n , b_n , c_n　$n=1,2,3$ はそれぞれ次のようであるとする。

$$a_1 = \frac{1}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \quad , \quad a_2 = \frac{1}{4!!}\left\{\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$, \quad a_3 = \frac{1}{6!!}\left\{\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)-3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$b_1 = \frac{1}{1!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^1 , \quad b_2 = \frac{1}{2!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2 , \quad b_3 = \frac{1}{3!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^3$$

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \quad ,$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1(x_{r_1}+x_{r_2})}{(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2)(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2)}$$

すると、

$$\begin{aligned}-z\zeta(1-z) = 1 &+ z^1(a_1+b_1)\\ &+ z^2(a_2+b_2+c_2+a_1b_1)\\ &+ z^3(a_3+b_3+c_3+a_2b_1+b_2a_1+c_2a_1+c_2b_1)\\ &+\\ &\vdots\end{aligned} \tag{3.0}$$

1次、2次、3次の係数

公式 4·2·1 と (3.0) を比較することにより、次の公式を得る。

公式 4･3･1

γ をオイラー･マスケロ二の定数、γ_k をスチルチェス定数、$\psi_s(z)$ をポリガンマ関数、リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成り立つ。

$$-\gamma_0 = \frac{1}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \log 2 - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

$$-\gamma_1 = \frac{\gamma_0^2}{2} - \frac{1}{4!!}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$-\frac{\gamma_2}{2} = \frac{\gamma_0^3}{3} + \gamma_0\gamma_1 + \frac{1}{6!!}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

4･4 リーマン仮説と同値な命題

公式 4･3･1 から、リーマン仮説と同値な次の命題が得られる。

命題 4･4･1

γ_k をスチルチェス定数、$\psi_s(z)$ をポリガンマ関数、リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を $1/2+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = \gamma_0 - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_1$}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2 = \gamma_0^2 + 2\gamma_0 + 2\gamma_1 - \log\pi + \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_2$}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3 = \gamma_0^3 + 3\gamma_0^2 + 6\gamma_0 + 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 - 3\log\pi + 3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{16}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_3$}$$

数値計算

臨界線上の零点 y_r を 20,000 個を取り、数式処理ソフト *Mathematica* により $(4.1_1) \sim (4.1_3)$ を計算すると、それぞれ次のようになる。。

```
γs_ := StieltjesGamma[s]; ψk_[p_] := PolyGamma[k, p];  yn_ := Im[ZetaZero[n]]
```

1st degree

```
f1[m_] := Sum[1/(1/4 + yr^2), {r, 1, m}]        g1 := γ0 - 1/2 Log[π] + 1/2 ψ0[3/2]

N[f1[20000]]                                   N[g1]
0.0230167                                      0.0230957
```

この両辺は有効 3 桁まで一致している。

2nd degree

```
f2[m_] := Sum[(1/(1/4 + yr^2))^2, {r, 1, m}]   g2 := γ0^2 + 2γ0 + 2γ1 - Log[π] + ψ0[3/2] - 1/4 ψ1[3/2]

SetPrecision[f2[20000], 10]                    SetPrecision[g2, 15]
0.0000371006364                                0.0000371006364
```

この両辺は有効 9 桁まで一致している。

3rd degree

$$f3[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r^{\,2}} \right)^3$$

$$g3 := \gamma_0^{\,3} + 3\,\gamma_0^{\,2} + 6\,\gamma_0 + 6\,\gamma_1 + 3\,\gamma_0\,\gamma_1 + \frac{3}{2}\,\gamma_2 - 3\,\mathrm{Log}[\pi] + 3\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] - \frac{3}{4}\,\psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16}\,\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]$$

SetPrecision[f3[20000], 16]　　SetPrecision[g3, 24]

$1.436778602886916 \times 10^{-7}$　　$1.436778602886918 \times 10^{-7}$

この両辺は有効 15 桁まで一致している。この桁数が 27 桁に至っていないのは右辺の計算精度が低いためと思われる。

2024.03.24

河野 和
広島市

宇宙人の数学