1 無限級数の累乗

1·1　多重コーシー積

無限級数の累乗計算には多項定理が役に立たない。何故ならば、多項定理は項数に依存するから、項数が無限大の級数には適用できないからである。無限級数の累乗計算には多重コーシー積が有用である。

公式 1·1·1（無限級数の多重コーシー積）

収束する複数個の無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}a_{r-s}b_s \tag{1.2}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}a_{r-s}b_{s-t}c_t \tag{1.3}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}d_r\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t}a_{r-s}b_{s-t}c_{t-u}d_u \tag{1.4}$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_{1,r}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_{2,r}\right)\cdots\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_{n,r}\right)=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}a_{1,r_1-r_2}a_{2,r_2-r_3}\cdots a_{n-1,r_{n-1}-r_n}a_{n,r_n} \tag{1.n}$$

特に、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a_r\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2r}(-1)^s a_s a_{2r-s} \tag{1.2±}$$

証明

2つの級数のコーシー積は次のように表される。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}a_s b_{r-s} \tag{2*}$$

a,b を逆順にして (1.2) を得る。

次に

$$\sum_{s=0}^{r}a_s b_{r-s}=B_r \tag{B}$$

と置けば

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r\right)=\left(\sum_{r=0}^{\infty}B_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r\right)$$

(2*) により

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}B_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}B_s c_{r-s}$$

そして (B) において $s\rightarrow t\,,\,r\rightarrow s$ と置換すれば

$$B_s=\sum_{t=0}^{s}a_t b_{s-t}$$

これを上に代入して

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_t b_{s-t} c_{r-s}$$

i.e.

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_t b_{s-t} c_{r-s}$$

a,b,c を逆順にして (1.3) を得る。

次に、

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_t b_{s-t} c_{r-s} = C_r \tag{C}$$

と置けば

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r\right) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} C_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r\right)$$

(2*) により

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} C_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} C_s d_{r-s}$$

そして (C) において $t \to u\ ,\ s \to t\ ,\ r \to s$ と置換すれば

$$C_s = \sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_u b_{t-u} c_{s-t}$$

これを上に代入して

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} C_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_u b_{t-u} c_{s-t} d_{r-s}$$

i.e.

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_u b_{t-u} c_{s-t} d_{r-s}$$

a,b,c,d を逆順にして (1.4) を得る。以下、類似の方法により、(1.n) を得る。

(1.2) において $b_r = (-1)^r a_r$ と置けば、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s}(-1)^s a_s = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} (-1)^s a_s a_{r-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{0}(-1)^s a_s a_{0-s} + \sum_{s=0}^{1}(-1)^s a_s a_{1-s} + \sum_{s=0}^{2}(-1)^s a_s a_{2-s} + \sum_{s=0}^{3}(-1)^s a_s a_{3-s} + \cdots$$

$$= \sum_{s=0}^{0}(-1)^s a_s a_{0-s} + \sum_{s=0}^{2}(-1)^s a_s a_{2-s} + \sum_{s=0}^{4}(-1)^s a_s a_{4-s} + \cdots$$

$$\left(\because\ \sum_{s=0}^{2n-1}(-1)^s a_s a_{2n-1-s} = 0 \quad \text{for } n=1,2,3,\cdots\right)$$

よって

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2r} (-1)^s a_s a_{2r-s}$$

例　3重コーシー積

数式処理ソフト Matematica を用いて (1.3) を $m=4$ まで展開すると次のようになる。

$$\texttt{p3[}m\texttt{\_] :=} \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\, b_{s-t}\, c_t$$

```
Expand[p3[4]]
```

$a_0 b_0 c_0 + a_1 b_0 c_0 + a_2 b_0 c_0 + a_3 b_0 c_0 + a_4 b_0 c_0 + a_0 b_1 c_0 + a_1 b_1 c_0 + a_2 b_1 c_0 + a_3 b_1 c_0 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_2 c_0 + a_2 b_2 c_0 + a_0 b_3 c_0 + a_1 b_3 c_0 + a_0 b_4 c_0 + a_0 b_0 c_1 + a_1 b_0 c_1 + a_2 b_0 c_1 + a_3 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_1 + a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_1 + a_0 b_3 c_1 + a_0 b_0 c_2 + a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_2 + a_0 b_1 c_2 + a_1 b_1 c_2 + a_0 b_2 c_2 + a_0 b_0 c_3 + a_1 b_0 c_3 + a_0 b_1 c_3 + a_0 b_0 c_4$

特に $a_0 = 1\,, b_0 = 1\,, c_0 = 1$ のときは

```
ReplaceAll[%, {a0 → 1, b0 → 1, c0 → 1}]
```

$1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 + b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + b_3 + a_1 b_3 + b_4 + c_1 + a_1 c_1 + a_2 c_1 + a_3 c_1 + b_1 c_1 + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_1 + b_2 c_1 + a_1 b_2 c_1 + b_3 c_1 + c_2 + a_1 c_2 + a_2 c_2 + b_1 c_2 + a_1 b_1 c_2 + b_2 c_2 + c_3 + a_1 c_3 + b_1 c_3 + c_4$

公式 1·1·1 において $a_r\,, b_r\,, c_r\,, \cdots$ を $a_r z^r\,, b_r z^r\,, c_r z^r\,, \cdots$ に置換することにより、直ちに次の公式が得られる。

公式 1·1·2 (冪級数の多重コーシー積)

収束する複数個の冪級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s} b_s z^r \tag{1.2'}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s} b_{s-t} c_t z^r \tag{1.3'}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} d_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s} b_{s-t} c_{t-u} d_u z^r \tag{1.4'}$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{1,r} z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{2,r} z^r\right)\cdots\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{n,r} z^r\right)$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{1,r_1-r_2} a_{2,r_2-r_3}\cdots a_{n-1,r_{n-1}-r_n} a_{n,r_n} z^{r_1} \tag{1.n'}$$

特に、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r z^r\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2r} (-1)^s a_s a_{2r-s} z^{2r} \tag{1.2'±}$$

例1　記号計算

数式処理ソフト Matematica を用いて (1.3') を $m=4$ まで展開すると次のようになる。

$$p3[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\, b_{s-t}\, c_t\, z^r$$

```
Collect[p3[z, 4], z]
```

$a_0 b_0 c_0 + z\,(a_1 b_0 c_0 + a_0 b_1 c_0 + a_0 b_0 c_1) +$

$z^2 (a_2 b_0 c_0 + a_1 b_1 c_0 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_0 c_2) +$
$z^3 (a_3 b_0 c_0 + a_2 b_1 c_0 + a_1 b_2 c_0 + a_0 b_3 c_0 + a_2 b_0 c_1 + a_1 b_1 c_1 +$
$a_0 b_2 c_1 + a_1 b_0 c_2 + a_0 b_1 c_2 + a_0 b_0 c_3) +$
$z^4 (a_4 b_0 c_0 + a_3 b_1 c_0 + a_2 b_2 c_0 + a_1 b_3 c_0 + a_0 b_4 c_0 + a_3 b_0 c_1 +$
$a_2 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_1 + a_0 b_3 c_1 + a_2 b_0 c_2 + a_1 b_1 c_2 + a_0 b_2 c_2 +$
$a_1 b_0 c_3 + a_0 b_1 c_3 + a_0 b_0 c_4)$

特に $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 1$ のときは

```
ReplaceAll[%, {a0 → 1, b0 → 1, c0 → 1}]
```

$$1 + z (a_1 + b_1 + c_1) + z^2 (a_2 + a_1 b_1 + b_2 + a_1 c_1 + b_1 c_1 + c_2) +$$
$$z^3 (a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3 + a_2 c_1 + a_1 b_1 c_1 + b_2 c_1 + a_1 c_2 + b_1 c_2 + c_3) +$$
$$z^4 (a_4 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + b_4 + a_3 c_1 + a_2 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_1 + b_3 c_1 +$$
$$a_2 c_2 + a_1 b_1 c_2 + b_2 c_2 + a_1 c_3 + b_1 c_3 + c_4)$$

例2　数値計算

$$f(z) = \frac{5}{5+z} = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^1 z^1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 z^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^3 z^3 + \cdots \qquad |z| < 5$$

$$g(z) = e^{\frac{z}{3}} = 1 + \frac{1}{1!3^1} z^1 + \frac{1}{2!3^2} z^2 + \frac{1}{3!3^3} z^3 + \cdots$$

$$h(z) = \cos z = 1 + \frac{z^1}{1!} \cos\frac{1\pi}{2} + \frac{z^2}{2!} \cos\frac{2\pi}{2} + \frac{z^3}{3!} \cos\frac{3\pi}{2} + \cdots$$

数式処理ソフト Matematica を用いてこれらの積を $m = 12$ まで計算すればつぎのようになる。

$$f[z\_] := \frac{5}{5+z} \qquad g[z\_] := e^{\frac{z}{3}} \qquad h[z\_] := \mathrm{Cos}[z]$$

$$a_{r\_} := \left(-\frac{1}{5}\right)^r \qquad b_{r\_} := \frac{1}{r!\,3^r} \qquad c_{r\_} := \frac{1}{r!} \mathrm{Cos}\left[\frac{r\pi}{2}\right]$$

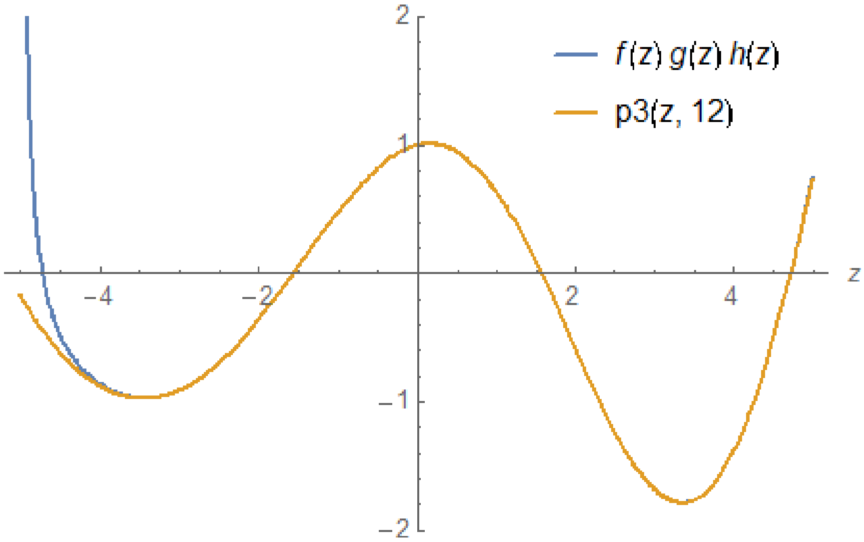
$$p3[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{s} a_{r-s} b_{s-t} c_t z^r$$

p3[z, 12]

$$1 + \frac{2 z}{15} - \frac{106 z^2}{225} - \frac{671 z^3}{10125} + \frac{8401 z^4}{303750} + \frac{12086 z^5}{2278125} - \frac{40024 z^6}{102515625} - \frac{3115867 z^7}{21528281250}$$
$$- \frac{3781471 z^8}{1291696875000} + \frac{144995171 z^9}{87189539062500} + \frac{173608237 z^{10}}{1307843085937500}$$
$$- \frac{3983534267 z^{11}}{431588218359375000} - \frac{43071773819 z^{12}}{38842939652343750000}$$

そしてこれを $f(z)g(z)h(z)$ と共に図示すれば次のようになる。両者は -4 付近を除いてほぼ

一致している。



例3 (1.2±)

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r\,!}z^{r}\right)\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r\,!}z^{r}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2r}(-1)^{s}\frac{1}{s\,!}\frac{1}{(2r-s)\,!}z^{2r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r)\,!}\left\{\sum_{s=0}^{2r}(-1)^{s}\,{}_{2r}C_{s}\right\}z^{2r}$$

$$=\frac{1}{0\,!}\,{}_{0}C_{0}\,z^{0}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r)\,!}\left\{\sum_{s=0}^{2r}(-1)^{s}\,{}_{2r}C_{s}\right\}z^{2r}$$

$$=1 \qquad \left(\because \quad \sum_{s=0}^{2r}(-1)^{s}\,{}_{2r}C_{s}=0\right)$$

これは $e^{z}e^{-z}=1$ に一致する。

1･2　無限級数の累乗(その1)

公式 1･1･1 において $a=b=c=\cdots=a$ と置くことにより、直ちに次の公式を得る。

公式 1･2･1 (無限級数の累乗)

収束する無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s}a_s \tag{2.2}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}a_{s-t}a_t \tag{2.3}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^4 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s}a_{s-t}a_{t-u}a_u \tag{2.4}$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^n = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2}a_{r_2-r_3}\cdots a_{r_{n-1}-r_n}a_{r_n} \tag{2.n}$$

例　ゼータ級数の3乗

数式処理ソフト Matematica を用いて (2.3) を $m=7$ まで展開すると次のようになる。

$$\texttt{p3[}m\_\texttt{] :=} \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\,a_{s-t}\,a_t$$

Expand[p3[7]]

$$a_0^3 + 3a_0^2a_1 + 3a_0a_1^2 + a_1^3 + 3a_0^2a_2 + 6a_0a_1a_2 + 3a_1^2a_2 + 3a_0a_2^2 + 3a_1a_2^2 + a_2^3 + 3a_0^2a_3 + 6a_0a_1a_3 + 3a_1^2a_3 + 6a_0a_2a_3 + 6a_1a_2a_3 + 3a_2^2a_3 + 3a_0a_3^2 + 3a_1a_3^2 + 3a_0^2a_4 + 6a_0a_1a_4 + 3a_1^2a_4 + 6a_0a_2a_4 + 6a_1a_2a_4 + 6a_0a_3a_4 + 3a_0^2a_5 + 6a_0a_1a_5 + 3a_1^2a_5 + 6a_0a_2a_5 + 3a_0^2a_6 + 6a_0a_1a_6 + 3a_0^2a_7$$

ゼータ級数は

$$\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r+1)^z} = 1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z)>1$$

であるから、$a_0 \to 1$, $a_r \to$ "$1/(r+1)^z$"　$r=1,2,3,\cdots$ と置換すれば次のようになる。

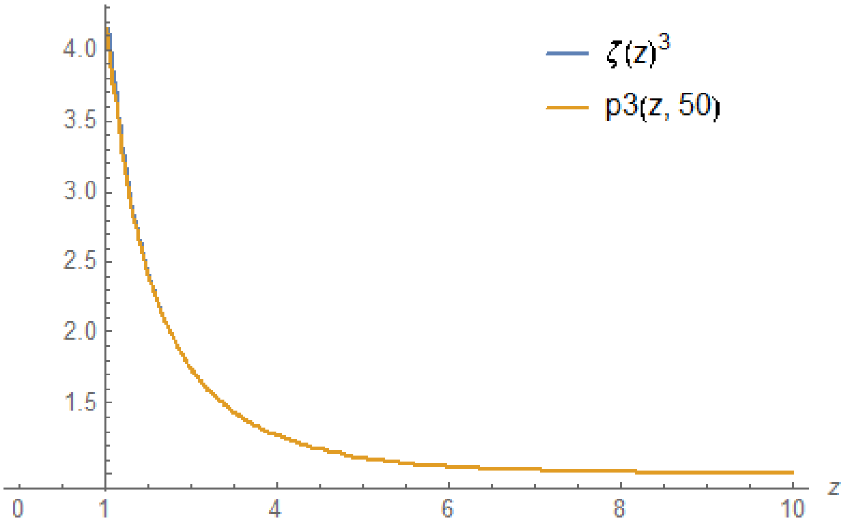
$$\texttt{ReplaceAll}\left[\%, \left\{a_0 \to 1,\ a_1 \to \text{"}\frac{1}{2^z}\text{"},\ a_2 \to \text{"}\frac{1}{3^z}\text{"},\ a_3 \to \text{"}\frac{1}{4^z}\text{"},\ a_4 \to \text{"}\frac{1}{5^z}\text{"},\ a_5 \to \text{"}\frac{1}{6^z}\text{"},\ a_6 \to \text{"}\frac{1}{7^z}\text{"},\ a_7 \to \text{"}\frac{1}{8^z}\text{"}\right\}\right]$$

$$1 + 3\frac{1}{2^z} + 3\frac{1}{2^z}^2 + \frac{1}{2^z}^3 + 3\frac{1}{3^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{3^z} + 3\frac{1}{2^z}^2\frac{1}{3^z} + 3\frac{1}{3^z}^2 + 3\frac{1}{2^z}\frac{1}{3^z}^2 + \frac{1}{3^z}^3 + 3\frac{1}{4^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{4^z} + 3\frac{1}{2^z}^2\frac{1}{4^z} + 6\frac{1}{3^z}\frac{1}{4^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{3^z}\frac{1}{4^z} + 3\frac{1}{3^z}^2\frac{1}{4^z} + 3\frac{1}{4^z}^2 + 3\frac{1}{2^z}\frac{1}{4^z}^2 + 3\frac{1}{5^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{5^z} + 3\frac{1}{2^z}^2\frac{1}{5^z} + 6\frac{1}{3^z}\frac{1}{5^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{3^z}\frac{1}{5^z} + 6\frac{1}{4^z}\frac{1}{5^z} + 3\frac{1}{6^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{6^z} + 3\frac{1}{2^z}^2\frac{1}{6^z} + 6\frac{1}{3^z}\frac{1}{6^z} + 3\frac{1}{7^z} + 6\frac{1}{2^z}\frac{1}{7^z} + 3\frac{1}{8^z}$$

以上は記号計算であったが、これを数値計算して $\zeta^3(z)$ と共に図示すると次のようになる。
$m=50$ まで計算しているが、両者はほぼ重なっていて青($\zeta^3(z)$)は見えない。

$$a_{r\_}[z\_] := \frac{1}{(r+1)^z}$$

$$p3[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}[z]\, a_{s-t}[z]\, a_t[z]$$



公式 1･2･1 において a_r を $a_r z^r$ に置換することにより、直ちに次の公式が得られる。

公式 1･2･2 (冪級数の累乗)

収束する冪級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s}\, a_s\, z^r \tag{2.2'}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\, a_{s-t}\, a_t\, z^r \tag{2.3'}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^4 = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} a_{r-s}\, a_{s-t}\, a_{t-u}\, a_u\, z^r \tag{2.4'}$$

$$\vdots$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^n = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2}\, a_{r_2-r_3}\cdots a_{r_{n-1}-r_n}\, a_{r_n}\, z^r \tag{2.n'}$$

例 オール3 冪級数

次のような級数の3乗を計算する。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{3r}}{(3r)!} = \frac{1}{3}\left\{e^z + 2e^{-z/2}\cos\frac{\sqrt{3}z}{2}\right\} \equiv f(z)$$

右辺の3乗のマクローリン展開は可能であるが、それはそう簡単ではない。そこで我々は素直に

左辺の3乗を試みる。先ず、数式処理ソフト Matematica を用いて (2.3') を $m=6$ まで展開すると次のようになる。

$$\text{p3}[z\_,\ m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\, a_{s-t}\, a_t\, z^r$$

$$\text{Collect}[\text{p3}[z,\ 6],\ z]$$

$$a_0^3 + 3 z a_0^2 a_1 + z^2 \left(3 a_0 a_1^2 + 3 a_0^2 a_2\right) + z^3 \left(a_1^3 + 6 a_0 a_1 a_2 + 3 a_0^2 a_3\right)$$
$$+ z^4 \left(3 a_1^2 a_2 + 3 a_0 a_2^2 + 6 a_0 a_1 a_3 + 3 a_0^2 a_4\right)$$
$$+ z^5 \left(3 a_1 a_2^2 + 3 a_1^2 a_3 + 6 a_0 a_2 a_3 + 6 a_0 a_1 a_4 + 3 a_0^2 a_5\right)$$
$$+ z^6 \left(a_2^3 + 6 a_1 a_2 a_3 + 3 a_0 a_3^2 + 3 a_1^2 a_4 + 6 a_0 a_2 a_4 + 6 a_0 a_1 a_5 + 3 a_0^2 a_6\right)$$

ここで $a_0 \to 1$, $a_r \to$ "1/(3r)!" (r=1,2,3,⋯) , $z \to z^3$ と置換すれば次のようになる。

$$\text{ReplaceAll}\left[\%,\ \left\{a_0 \to 1,\ a_1 \to \text{"}\frac{1}{3!}\text{"},\ a_2 \to \text{"}\frac{1}{6!}\text{"},\ a_3 \to \text{"}\frac{1}{9!}\text{"},\ a_4 \to \text{"}\frac{1}{12!}\text{"},\ a_5 \to \text{"}\frac{1}{15!}\text{"},\ a_6 \to \text{"}\frac{1}{18!}\text{"}\right\}\right];$$

$$\text{ReplaceAll}\left[\%,\ z \to z^3\right]$$

$$1 + 3\,\frac{1}{3!}\,z^3 + \left(3\,\frac{1}{3!}^2 + 3\,\frac{1}{6!}\right) z^6 + \left(\frac{1}{3!}^3 + 6\,\frac{1}{3!}\,\frac{1}{6!} + 3\,\frac{1}{9!}\right) z^9 +$$
$$\left(3\,\frac{1}{12!} + 3\,\frac{1}{3!}^2\,\frac{1}{6!} + 3\,\frac{1}{6!}^2 + 6\,\frac{1}{3!}\,\frac{1}{9!}\right) z^{12} +$$
$$\left(3\,\frac{1}{15!} + 6\,\frac{1}{12!}\,\frac{1}{3!} + 3\,\frac{1}{3!}\,\frac{1}{6!}^2 + 3\,\frac{1}{3!}^2\,\frac{1}{9!} + 6\,\frac{1}{6!}\,\frac{1}{9!}\right) z^{15}$$
$$\left(3\,\frac{1}{18!} + 6\,\frac{1}{15!}\,\frac{1}{3!} + 3\,\frac{1}{12!}\,\frac{1}{3!}^2 + 6\,\frac{1}{12!}\,\frac{1}{6!} + \frac{1}{6!}^3 + 6\,\frac{1}{3!}\,\frac{1}{6!}\,\frac{1}{9!} + 3\,\frac{1}{9!}^2\right) z^{18}$$

以上は記号計算であったが、これを数値計算すると次のようになる。

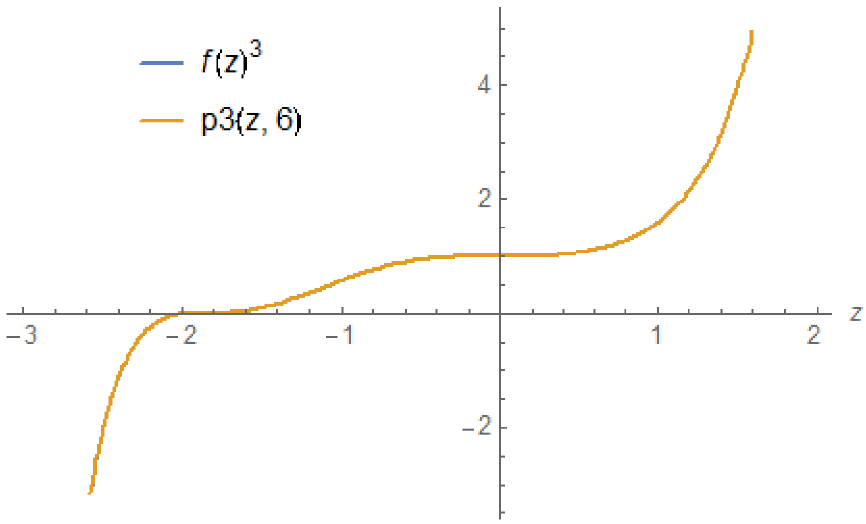
$$a_{r\_} := \frac{1}{(3\,r)!}$$

$$\text{p3}[z\_,\ m\_] := \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s}\, a_{s-t}\, a_t\, z^{3\,r}$$

$$\text{p3}[z,\ 6]$$

$$1 + \frac{z^3}{2} + \frac{7 z^6}{80} + \frac{27 z^9}{4480} + \frac{7 z^{12}}{56320} + \frac{2187 z^{15}}{1\,793\,792\,000} + \frac{937 z^{18}}{139\,403\,264\,000}$$

これを $f^3(z)$ と共に図示すると次のようになる。両者はぴったり重なっていて、青($f^3(z)$)は見えない。



$f(z)^3$
p3(z, 6)
4
2
−2
−3
−2
−1
1
2
z

1･3　無限級数の累乗(その2)

公式 1･3･1 (無限級数の累乗)

収束する無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^2=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^2+2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s \tag{3.2}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^3=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^3+3\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s\right)-3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}a_r a_s a_t \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^4=&\,2\sum_{r=0}^{\infty}a_r^4-\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r^2\right)^2+4\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)^2\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s\right)\\&-8\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}a_r a_s a_t\right)+8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}a_r a_s a_t a_u\end{aligned} \tag{3.4}$$

証明

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

これに次のような置換を行って (3.2) を得る。

$$a+b\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}a_r\quad,\quad a^2+b^2\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}a_r^2\quad,\quad ab\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s$$

次に

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc\\&=a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+3abc\right)-3abc\end{aligned}$$

ここで

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

これを上に代入して

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

これに次のような置換を行って (3.3) を得る。

$$a^3+b^3+c^3\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}a_r^3\quad,\quad a+b+c\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}a_r\quad,\quad ab+bc+ca\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s$$

$$,\quad abc\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}a_r a_s a_t$$

4次の場合、類似の計算を行うと次を得る。

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^4=&\,a^4+b^4+c^4+d^4-2\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)\\&+4(a+b+c+d)^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&-8(abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d)\\&+8abcd\end{aligned}$$

これに次のような置換を行う。

$$a+b+c+d\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}a_r\quad,\quad a^4+b^4+c^4+d^4\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}a_r^4$$

$$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r^2a_s^2$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\rightarrow\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}a_r a_s$$

$$abc+abd+acd+bcd \rightarrow \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t \quad , \quad abcd \rightarrow \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} a_r a_s a_t a_u$$

すると、次を得る。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^4 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^4 - 2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r^2 a_s^2 + 4\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)^2\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s\right)$$
$$- 8\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t\right) + 8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} a_r a_s a_t a_u \quad (3.4_w)$$

このままでも良いのだが、これは使い勝手が今一である。そこで、

$$2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r^2 a_s^2 = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r^2\right)^2 - \sum_{r=0}^{\infty} a_r^4$$

を (3.4_w) に代入して (3.4) を得る。

5次以上の場合、簡単な式は得られない。

例　無限級数の3乗

数式処理ソフト Matematica を用いて (3.3) を $m=5$ まで展開すると次のようになる。長いので4行目以下を省略して等価の検証を行い、ついでに $m=100$ の場合も等価の検証を行っている。結果、いづれの場合も両辺は等しいことが確認された。

$$f3[m\_] := \left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right)^3$$

$$g3[m\_] := \sum_{r=0}^{m} a_r^3 + 3\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r+1}^{m} a_r a_s\right) - 3\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r+1}^{m}\sum_{t=s+1}^{m} a_r a_s a_t$$

Expand[f3[5]]

$a_0^3 + 3 a_0^2 a_1 + 3 a_0 a_1^2 + a_1^3 + 3 a_0^2 a_2 + 6 a_0 a_1 a_2 + 3 a_1^2 a_2 + 3 a_0 a_2^2 + 3 a_1 a_2^2 +$
$a_2^3 + 3 a_0^2 a_3 + 6 a_0 a_1 a_3 + 3 a_1^2 a_3 + 6 a_0 a_2 a_3 + 6 a_1 a_2 a_3 + 3 a_2^2 a_3 +$
$3 a_0 a_3^2 + 3 a_1 a_3^2 + 3 a_2 a_3^2 + a_3^3 + 3 a_0^2 a_4 + 6 a_0 a_1 a_4 + 3 a_1^2 a_4 + 6 a_0 a_2 a_4 +$
The rest is omitted

Expand[g3[5]]

$a_0^3 + 3 a_0^2 a_1 + 3 a_0 a_1^2 + a_1^3 + 3 a_0^2 a_2 + 6 a_0 a_1 a_2 + 3 a_1^2 a_2 + 3 a_0 a_2^2 + 3 a_1 a_2^2 +$
$a_2^3 + 3 a_0^2 a_3 + 6 a_0 a_1 a_3 + 3 a_1^2 a_3 + 6 a_0 a_2 a_3 + 6 a_1 a_2 a_3 + 3 a_2^2 a_3 +$
$3 a_0 a_3^2 + 3 a_1 a_3^2 + 3 a_2 a_3^2 + a_3^3 + 3 a_0^2 a_4 + 6 a_0 a_1 a_4 + 3 a_1^2 a_4 + 6 a_0 a_2 a_4 +$
The rest is omitted

Expand[f3[5]] == Expand[g3[5]]

True

Expand[f3[100]] == Expand[g3[100]]

True

公式 1･3･1 において a_r を $a_r z^r$ に置換することにより、直ちに次の公式が得られる。

公式 1･3･2 (冪級数の累乗)

収束する冪級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^2 z^{2r} + 2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s z^{r+s} \tag{3.2'}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^3 z^{3r} + 3\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s z^{r+s}\right) - 3\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t z^{r+s+t} \tag{3.3'}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^4 &= 2\sum_{r=0}^{\infty} a_r^4 z^{4r} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r^2 z^{2r}\right)^2 + 4\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)^2\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty} a_r a_s z^{r+s}\right) \\ &- 8\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty} a_r a_s a_t z^{r+s+t}\right) + 8\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty} a_r a_s a_t a_u z^{r+s+t+u}\end{aligned} \tag{3.4'}$$

例　冪級数の4乗

数式処理ソフト Matematica を用いて (3.4') を $m=5$ まで展開すると次のようになる。長いので4行目以下を省略して等価の検証を行い、ついでに $m=50$ の場合も等価の検証を行っている。結果、いずれの場合も両辺は等しいことが確認された。

$$f4[z\_, m\_] := \left(\sum_{r=0}^{m} a_r z^r\right)^4$$

$$\begin{aligned} g4[z\_, m\_] := {} & 2\sum_{r=0}^{m} a_r^4 z^{4r} - \left(\sum_{r=0}^{m} a_r^2 z^{2r}\right)^2 + 4\left(\sum_{r=0}^{m} a_r z^r\right)^2 \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r+1}^{m} a_r a_s z^{r+s} \\ & - 8\left(\sum_{r=0}^{m} a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r+1}^{m}\sum_{t=s+1}^{m} a_r a_s a_t z^{r+s+t}\right) \\ & + 8\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r+1}^{m}\sum_{t=s+1}^{m}\sum_{u=t+1}^{m} a_r a_s a_t a_u z^{r+s+t+u} \end{aligned}$$

Collect[f4[z, 5], z]

$$\begin{aligned} & a_0^4 + 4 z a_0^3 a_1 + z^2 \left(6 a_0^2 a_1^2 + 4 a_0^3 a_2\right) + z^3 \left(4 a_0 a_1^3 + 12 a_0^2 a_1 a_2 + 4 a_0^3 a_3\right) + \\ & z^4 \left(a_1^4 + 12 a_0 a_1^2 a_2 + 6 a_0^2 a_2^2 + 12 a_0^2 a_1 a_3 + 4 a_0^3 a_4\right) + 4 z^{19} a_4 a_5^3 + z^{20} a_5^4 + \\ & z^5 \left(4 a_1^3 a_2 + 12 a_0 a_1 a_2^2 + 12 a_0 a_1^2 a_3 + 12 a_0^2 a_2 a_3 + 12 a_0^2 a_1 a_4 + 4 a_0^3 a_5\right) + \end{aligned}$$

The rest is omitted

Collect[g4[z, 5], z]

$$\begin{aligned} & a_0^4 + 4 z a_0^3 a_1 + z^2 \left(6 a_0^2 a_1^2 + 4 a_0^3 a_2\right) + z^3 \left(4 a_0 a_1^3 + 12 a_0^2 a_1 a_2 + 4 a_0^3 a_3\right) + \\ & z^4 \left(a_1^4 + 12 a_0 a_1^2 a_2 + 6 a_0^2 a_2^2 + 12 a_0^2 a_1 a_3 + 4 a_0^3 a_4\right) + 4 z^{19} a_4 a_5^3 + z^{20} a_5^4 + \\ & z^5 \left(4 a_1^3 a_2 + 12 a_0 a_1 a_2^2 + 12 a_0 a_1^2 a_3 + 12 a_0^2 a_2 a_3 + 12 a_0^2 a_1 a_4 + 4 a_0^3 a_5\right) + \end{aligned}$$

The rest is omitted

```
Collect[f4[z, 5], z] == Collect[g4[z, 5], z]
True
```

```
Collect[f4[z, 50], z] == Collect[g4[z, 50], z]
True
```

2017.09.23
2018.09.18 (3.4) と (3.4’) を書き換え

Kano Kono

宇宙人の数学