2 整数を根とする無限次方程式

2・1 整数を根とする無限次方程式(その1)

例えば、次のような関数 $f(z)$ を考えよう。

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} = 1+c_1 z^1+c_2 z^2+c_3 z^3+\cdots$$

この関数は正整数 $z=1,2,3,\cdots$ のみを零点として持つ。何故ならば、補正項 $\prod_{r=1}^{\infty} e^{z/r}$ は零点を持たないからである。そこで、次のようにその冪級数を0と置けば、

$$1+c_1 z^1+c_2 z^2+c_3 z^3+\cdots = 0$$

これは正整数(自然数) $z=1,2,3,\cdots$ を根とする無限次方程式と言うことができる。

本節では、このような 負または正のいづれか一方の整数を零点とする冪級数を求める。

公式 2・1・1

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー・マスケロ二の定数、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)e^{-\frac{z}{r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.1$_-$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.1$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r}\right)e^{-\frac{z}{2r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.2$_-$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r}\right)e^{\frac{z}{2r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.2$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)e^{-\frac{z}{2r-1}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.3$_-$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)e^{\frac{z}{2r-1}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.3$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)e^{-\frac{z}{2r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s \gamma^{r-s}}{(2s)!!\,(2r-2s)!!}\right\}z^r \tag{1.4$_-$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)e^{\frac{z}{2r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s \gamma^{r-s}}{(2s)!!\,(2r-2s)!!}\right\}z^r \tag{1.4$_+$}$$

証明

「 11 ガンマ関数の逆数の級数展開 」公式 11・1・1 によれば、(1.1$_-$) は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)e^{-\frac{z}{r}} = \frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)}$$

「 12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」公式 12・3・1 によれば、この右辺はベル多項式とポリガンマ関数を用いてそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

$$e^{-\gamma z} = 1-\frac{\gamma^1}{1!}z^1+\frac{\gamma^2}{2!}z^2-\frac{\gamma^3}{3!}z^3+- \cdots$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1+\frac{a_1}{1!}z^1+\frac{a_2}{2!}z^2+\frac{a_3}{3!}z^3+\cdots$$

但し

$$a_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\dots,\psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらのコーシー積を取れば

$$1-\frac{\gamma^1}{1!}z^1+\frac{\gamma^2}{2!}z^2-\frac{\gamma^3}{3!}z^3+- \cdots$$

$$\times\ 1+\frac{a_1}{1!}z^1+\frac{a_2}{2!}z^2+\frac{a_3}{3!}z^3+\cdots$$

$$= 1+\left(-\frac{\gamma^1}{1!}+\frac{a_1}{1!}\right)z^1+\left(\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^1}{1!}\frac{a_1}{1!}+\frac{a_2}{2!}\right)z^2+\left(-\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma^2}{2!}\frac{a_1}{1!}-\frac{\gamma^1}{1!}\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}\right)z^3+\cdots$$

$$= 1+\left\{-\frac{\gamma^1}{1!}+\sum_{s=1}^{1}\frac{(-1)^{1-s}\gamma^{1-s}}{(1-s)!}\frac{a_s}{s!}\right\}z^1+\left\{\frac{\gamma^2}{2!}+\sum_{s=1}^{2}\frac{(-1)^{2-s}\gamma^{2-s}}{(2-s)!}\frac{a_s}{s!}\right\}z^2+\cdots$$

$$= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{(-1)^r\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{r-s}\gamma^{r-s}}{(r-s)!}\frac{a_s}{s!}\right\}z^r$$

i.e.

$$\frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s \gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

これより (1.1$_-$) が得られ、 z の符号を反転して (1.1$_+$) が得られる。

そして、(1.1$_-$), (1.1$_+$) において z を $z/2$ に置換して (1.2$_-$), (1.2$_+$) が得られる。

「 11 ガンマ関数の逆数の級数展開 」公式 11・1・1 によれば、(1.3$_-$) は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)e^{-\frac{z}{2r-1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z}$$

「 12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」公式 12･3･2 によれば、この右辺はベル多項式とポリガンマ関数を用いてそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

$$e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z} = 1-\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^1}{1!}z^1+\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2}{2!}z^2-\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3}{3!}z^3+-\cdots$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}} = 1+\frac{b_1}{2!!}z^1+\frac{b_2}{4!!}z^2+\frac{b_3}{6!!}z^3+\cdots$$

但し

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\cdots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらのコーシー積を取れば

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)!}\right\}z^r$$

これより (1.3_-) が得られ、 z の符号を反転して (1.3_+) が得られる。

「 11 ガンマ関数の逆数の級数展開 」公式 11･1･1 によれば、(1.4_-) は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)e^{-\frac{z}{2r}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\frac{\gamma z}{2}}$$

「 12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」公式 12･3･2 によれば、この右辺はベル多項式とポリガンマ関数を用いてそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

$$e^{-\frac{\gamma z}{2}} = 1-\frac{\gamma^1}{2!!}z^1+\frac{\gamma^2}{4!!}z^2-\frac{\gamma^3}{6!!}z^3+-\cdots$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}} = 1+\frac{b_1}{2!!}z^1+\frac{b_2}{4!!}z^2+\frac{b_3}{6!!}z^3+\cdots$$

但し

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\cdots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらのコーシー積を取って (1.4_-) が得られ、 z の符号を反転して (1.4_+) が得られる。

例1　自然数を根とする無限次方程式

これには上記 (1.1_+) が該当する。即ち

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} = 1 &+ \left(\frac{\gamma^1}{1!}-\frac{a_1\gamma^0}{1!0!}\right)z^1 \\ &+\left(\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{a_1\gamma^1}{1!1!}+\frac{a_2\gamma^0}{2!0!}\right)z^2 \\ &+\left(\frac{\gamma^3}{3!}-\frac{a_1\gamma^2}{1!2!}+\frac{a_2\gamma^1}{2!1!}-\frac{a_3\gamma^0}{3!0!}\right)z^3+\cdots \\ &\vdots\end{aligned} \qquad (1.1_+)$$

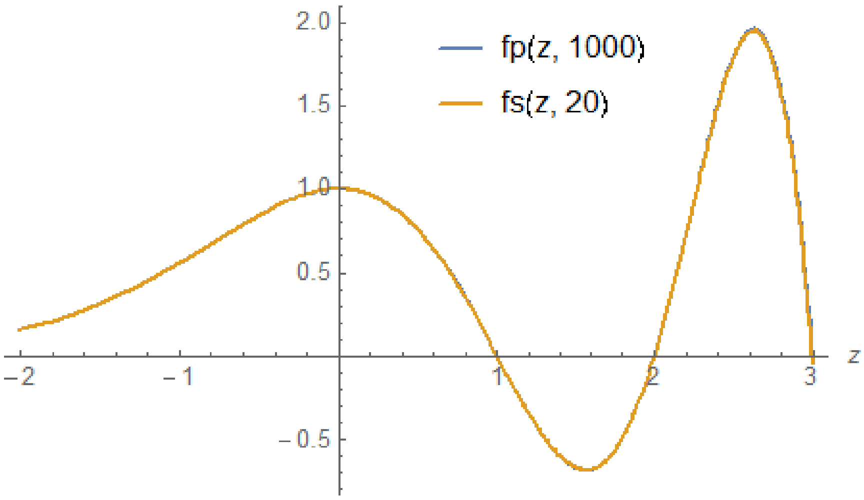
この両辺を図示すると次のようになる。左辺（青）は1000項、右辺（橙）は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺（青）は見えない。そして $z=1,2,3,\cdots$ が右辺の零点（根）であることが視認できる。なお、多項式 $B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

$$\mathtt{a[r\_]} := \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k}\,\mathtt{BellY[r,\ k,\ Tbl\psi[r,\ 1]]}$$

$$\mathtt{fp[z\_,\ m\_]} := \prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{z}{r}\right) e^{\frac{z}{r}}$$

$$\mathtt{fs[z\_,\ m\_]} := 1+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\mathtt{EulerGamma}^{r}}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{s}\,\mathtt{a[s]}\,\mathtt{EulerGamma}^{r-s}}{s\,!\,(r-s)\,!}\right) z^{r}$$



例2　正の奇数を根とする無限次方程式

上記 (1.3_+) と (1.4_+) がこれに該当するが、此処では (1.4_+) を例示する。

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)e^{\frac{z}{2r}} = 1 &+ \left(\frac{\gamma^{1}}{2!!}-\frac{b_1\gamma^{0}}{2!!0!!}\right)z^{1} \\ &+ \left(\frac{\gamma^{2}}{4!!}-\frac{b_1\gamma^{1}}{2!!2!!}+\frac{b_2\gamma^{0}}{4!!0!!}\right)z^{2} \\ &+ \left(\frac{\gamma^{3}}{6!!}-\frac{b_1\gamma^{2}}{2!!4!!}+\frac{b_2\gamma^{1}}{4!!2!!}-\frac{b_3\gamma^{0}}{6!!0!!}\right)z^{3} \\ &\ \ \vdots\end{aligned} \tag{1.4$_+$}$$

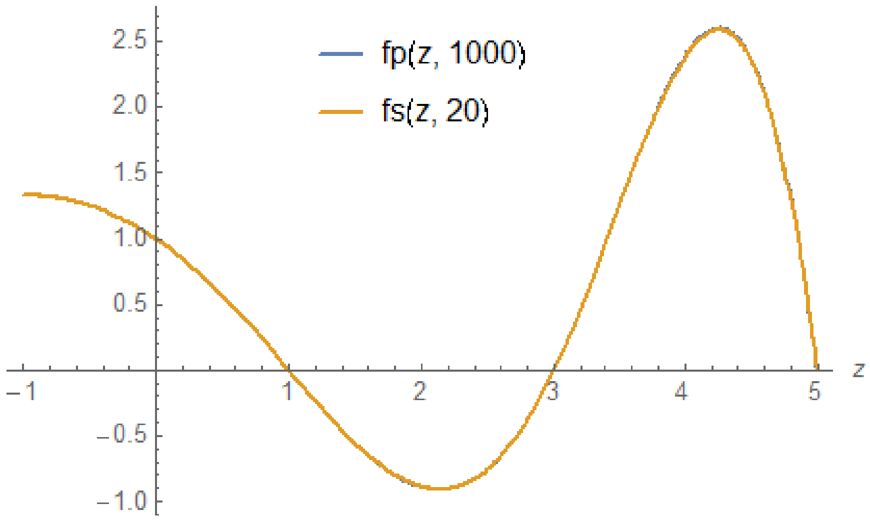
この両辺を図示すると次のようになる。左辺（青）は1000項、右辺（橙）は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺（青）は見えない。そして $z=1,3,5,\cdots$ が右辺の零点（根）であることが視認できる。なお、多項式 $B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。

$$\mathtt{Tbl\psi[r\_,\ z\_]\ :=\ Table[PolyGamma[k,\ z],\ \{k,\ 0,\ r-1\}]}$$

$$\mathtt{b[r\_]\ :=\ }\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k}\ \mathtt{BellY}\left[\mathtt{r,\ k,\ Tbl\psi}\left[\mathtt{r},\ \frac{1}{2}\right]\right]$$

$$\mathtt{fp[z\_,\ m\_]\ :=\ }\prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{z}{2\,r-1}\right)e^{\frac{z}{2\,r}}$$

$$\mathtt{fs[z\_,\ m\_]\ :=\ }1+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\mathtt{EulerGamma}^{r}}{(2\,r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{s}\ \mathtt{b[s]}\ \mathtt{EulerGamma}^{r-s}}{(2\,s)!!\ (2\,r-2\,s)!!}\right)z^{r}$$



z^1 の係数 c_1

z^1 の係数は (1.1_-) ~ (1.3_+) については $c_1=0$ 、(1.4_-) と (1.4_+) については $c_1=\pm \log 2$ である。上記 例1 (1.1_+) と 例2 (1.4_+) について c_1 を計算すると、

$$\frac{\gamma^1}{1!}-\frac{a_1\gamma^0}{1!0!}=\gamma+\psi_0(1)=\gamma-\gamma=0 \qquad \left(=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\gamma^1}{2!!}-\frac{b_1\gamma^0}{2!!0!!}=\frac{1}{2}\left\{\gamma+\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma+2\log 2}{2}=-\log 2 \qquad \left(=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r-1}\right)$$

括弧内は補正項と本体の z の係数の総和である。補正項のこの働きによって c_1 は定数になる。もし補正項が無かったならば $c_1=-\infty$ となり、級数自体が存在できない。

2･2 整数を根とする無限次方程式(その2)

例えば、次のような関数 $f(z)$ を考えよう。

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right) = 1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$$

この関数は全整数 $z=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ を零点として持つ。そこで、その冪級数を0と置けば、

$$1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+\cdots = 0$$

これは全整数 $z=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ を根とする無限次方程式と言うことができる。

本節では、このような 負および正の両方の整数を零点とする冪級数を求める。

公式 2･2･1

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ をBell 多項式、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r} \qquad \left(=\frac{\sin\pi z}{\pi z}\right) \tag{2.1}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r}\right)\left(1-\frac{z}{2r}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^{2r} \qquad \left(=\frac{\sin(\pi z/2)}{\pi z/2}\right) \tag{2.2}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r-1}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(4r)!!}z^{2r} \qquad \left(=\cos\frac{\pi z}{2}\right) \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r}\right) &= 1+\frac{b_1-a_1}{2!!}z^1 \\ &+ \sum_{r=2}^{\infty}\left\{\frac{b_r+(-1)^r a_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}b_s a_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)\left(1+\frac{z}{2r}\right) &= 1+\frac{a_1-b_1}{2!!}z^1 \\ &+ \sum_{r=2}^{\infty}\left\{\frac{a_r+(-1)^r b_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}a_s b_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r\end{aligned} \tag{2.5}$$

証明

「11 ガンマ関数の逆数の級数展開 」系 11･1･1 によれば、(2.1) は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin\pi z}{\pi z}$$

この右辺は次のようにマクローリン展開される。

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z} = 1-\frac{\pi^2}{3!}z^2+\frac{\pi^4}{5!}z^4-\frac{\pi^6}{7!}z^6+-\cdots = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r}$$

かくて (2.1) が得られる。そして z を $z/2$ に置換して (2.2) が得られる。

「11 ガンマ関数の逆数の級数展開」系 11･1･1 によれば、(2.3) は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}=\cos\frac{\pi z}{2}$$

この右辺は次のようにマクローリン展開される。

$$\cos\frac{\pi z}{2}=1-\frac{\pi^2}{4!!}z^2+\frac{\pi^4}{8!!}z^4-\frac{\pi^6}{12!!}z^6+-\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(4r)!!}z^{2r}$$

かくて (2.3) が得られる。

「11 ガンマ関数の逆数の級数展開」系 11･1･1 によれば、(2.4) は次のように表される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

「12 ガンマ関数とその逆数の級数展開」公式 12･3･1、12･3･2 によれば、この右辺はベル多項式とポリガンマ関数を用いてそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)}=1-\frac{a_1}{2!!}z^1+\frac{a_2}{4!!}z^2-\frac{a_3}{6!!}z^3+\frac{a_4}{8!!}z^4-+\cdots$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}=1+\frac{b_1}{2!!}z^1+\frac{b_2}{4!!}z^2+\frac{b_3}{6!!}z^3+\frac{b_4}{8!!}z^4+\cdots$$

但し

$$a_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\ldots,\psi_{r-1}(1)\right)\qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらのコーシー積を計算して (2.4) を得る。そして a と b を入れ替えて (2.5) を得る。

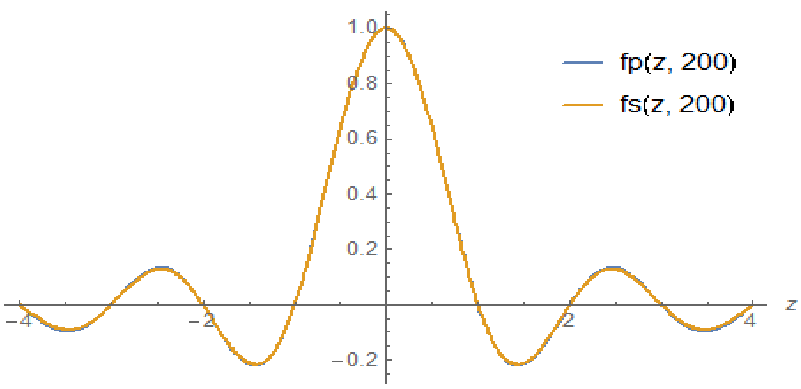
例1 全整数を根とする無限次方程式

これには上記 (2.1) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right)=1-\frac{\pi^2}{3!}z^2+\frac{\pi^4}{5!}z^4-\frac{\pi^6}{7!}z^6+-\cdots \tag{2.1}$$

この両辺を図示すると次のようになる。

$$\mathrm{fp}[z\_,m\_]:=\prod_{r=1}^{m}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right)\qquad \mathrm{fs}[z\_,m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r}$$



両辺共に200項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。
そして $z=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。

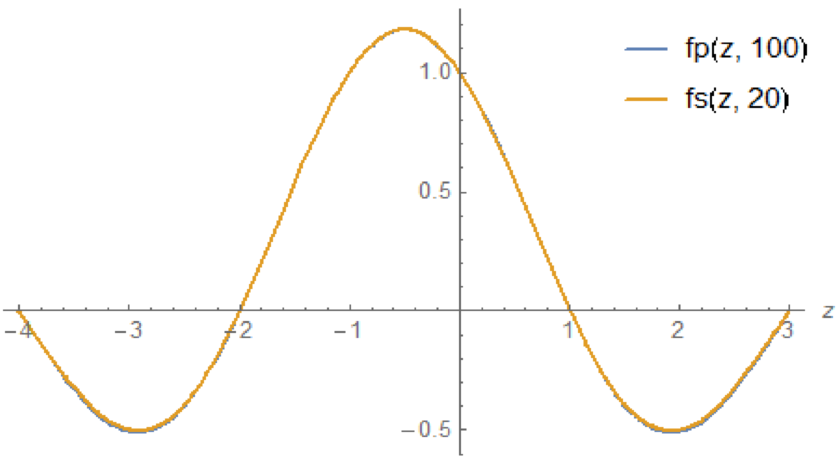
例2 負の偶数と正の奇数を根とする無限次方程式

これには上記 (2.5) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)\left(1+\frac{z}{2r}\right)=1+\frac{a_1-b_1}{2!!}z^1$$
$$+\left(\frac{a_2+b_2}{4!!}-\frac{a_1}{2!!}\frac{b_1}{2!!}\right)z^2$$
$$+\left(\frac{a_3-b_3}{6!!}+\frac{a_1}{2!!}\frac{b_2}{4!!}-\frac{a_2}{4!!}\frac{b_1}{2!!}\right)z^3$$
$$+\left(\frac{a_4+b_4}{8!!}-\frac{a_1}{2!!}\frac{b_3}{6!!}+\frac{a_2}{4!!}\frac{b_2}{4!!}-\frac{a_3}{6!!}\frac{b_1}{2!!}\right)z^4$$
$$\vdots \tag{2.5}$$

この両辺を図示すると次のようになる。左辺(青)は100項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $z=-2,-4,\cdots$ 及び $z=1,3,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。なお、多項式 $B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 $BellY[\,]$ を用いて生成される。

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
a[r_] := Sum[(-1)^k BellY[r, k, Tblψ[r, 1]], {k, 1, r}]
b[r_] := Sum[(-1)^k BellY[r, k, Tblψ[r, 1/2]], {k, 1, r}]
fp[z_, m_] := Product[(1 - z/(2 r - 1)) (1 + z/(2 r)), {r, 1, m}]
fs[z_, m_] := 1 + (a[1] - b[1])/2!! z
   + Sum[((a[r] + (-1)^r b[r])/(2 r)!! + Sum[((-1)^(r-s) a[s] b[r - s])/((2 s)!! (2 (r - s))!!), {s, 1, r-1}]) z^r, {r, 2, m}]
```



z^1 の係数 c_1

(2.1), (2.2), (2.3) は偶関数 ($f(z)=f(-z)$) であるから そもそも奇数項を持たない。$c_1=0$ である。

(2.4_) と (2.5) については $c_1=\pm log\,2$ である。

上記 例2 (2.5) について c_1 を計算すると、

$$\frac{a_1-b_1}{2\,!!}=\frac{1}{2}\left\{\gamma+\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma+2log\,2}{2}=-log\,2 \qquad \left(=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r-1}\right)$$

括弧内は(2.5) の左辺の z の係数の総和である。偶数の逆数の総和は奇数の逆数の総和はより $log\,2$ だけ小さいと解釈できそうである。

2･3　虚整数を根とする無限次方程式(その1)

公式 2･1･1 は、z を iz に置換することによって、容易に虚整数を零点とする冪級数に変換できる。そこで、次のようにその冪級数を0と置けば、

$$1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+\cdots = 0$$

これは負または正のいずれか一方の虚整数を根とする無限次方程式となる。

公式 2･3･1

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー･マスケロ二の定数、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)e^{-\frac{z}{ir}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty} i^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r \tag{3.1₋}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{ir}\right)e^{\frac{z}{ir}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r \tag{3.1₊}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2ir}\right)e^{-\frac{z}{2ir}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{i^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r \tag{3.2₋}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2ir}\right)e^{\frac{z}{2ir}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-i)^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r \tag{3.2₊}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{-\frac{z}{i(2r-1)}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty} i^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^r \tag{3.3₋}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{\frac{z}{i(2r-1)}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^r \tag{3.3₊}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{-\frac{z}{2ir}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty} i^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^r \tag{3.4₋}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{\frac{z}{2ir}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^r \tag{3.4₊}$$

証明

公式 2･1･1 より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.1₊}$$

z を iz に置換すれば、

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{iz}{r}\right)e^{\frac{iz}{r}}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)e^{-\frac{z}{ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}i^{r}\left\{\frac{\gamma^{r}}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{s}a_{s}\gamma^{r-s}}{s\,!\,(r-s)\,!}\right\}z^{r} \tag{3.1$_-$}$$

次に、公式 2･1･1 より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)e^{-\frac{z}{r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\left\{\frac{\gamma^{r}}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{s}a_{s}\gamma^{r-s}}{s\,!\,(r-s)\,!}\right\}z^{r} \tag{1.1$_-$}$$

z を iz に置換すれば、

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{iz}{r}\right)e^{-\frac{iz}{r}}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{ir}\right)e^{\frac{z}{ir}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-i)^{r}\left\{\frac{\gamma^{r}}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{s}a_{s}\gamma^{r-s}}{s\,!\,(r-s)\,!}\right\}z^{r} \tag{3.1$_+$}$$

以下同様にして与式を得る。

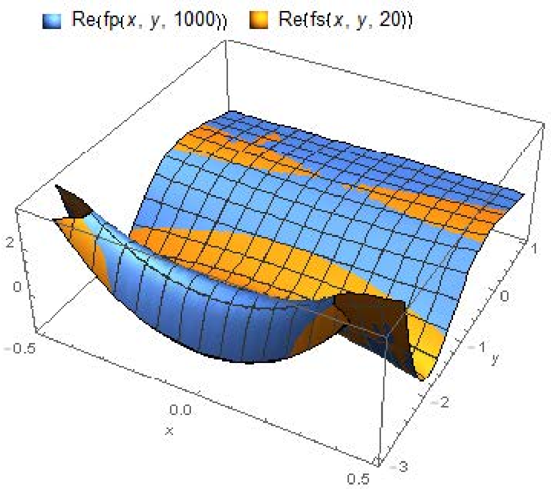
例1 負の虚整数を根とする無限次方程式

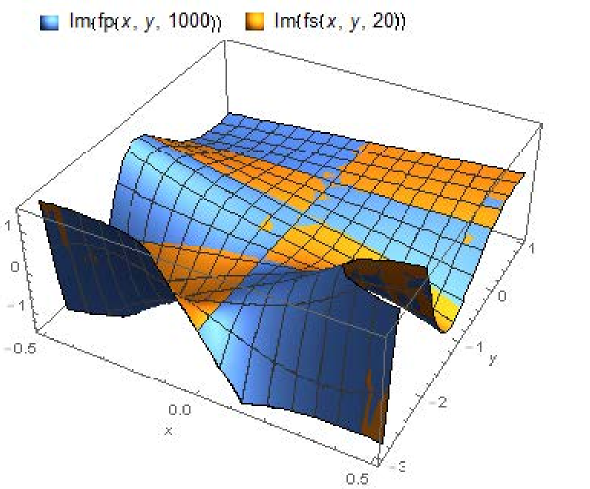
これには上記 (3.1_) が該当する。即ち

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)e^{\frac{iz}{r}}=1&+i^{1}\left(\frac{\gamma^{1}}{1!}-\frac{a_1\gamma^{0}}{1!0!}\right)z^{1}\\&+i^{2}\left(\frac{\gamma^{2}}{2!}-\frac{a_1\gamma^{1}}{1!1!}+\frac{a_2\gamma^{0}}{2!0!}\right)z^{2}\\&+i^{3}\left(\frac{\gamma^{3}}{3!}-\frac{a_1\gamma^{2}}{1!2!}+\frac{a_2\gamma^{1}}{2!1!}-\frac{a_3\gamma^{0}}{3!0!}\right)z^{3}+\cdots\\&\vdots\end{aligned} \tag{3.1$_-$}$$

z を $x+iy$ に置換してこの両辺の3D図を示すと次のようになる。

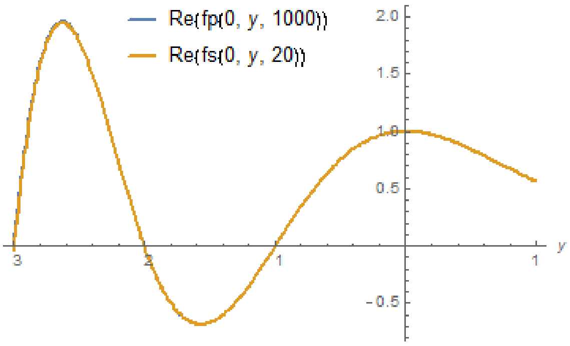
```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]

a[r_] := Sum[(-1)^k BellY[r, k, Tblψ[r, 1]], {k, 1, r}]

fp[x_, y_, m_] := Product[(1 + (x + i y)/(i r)) e^(-(x + i y)/(i r)), {r, 1, m}]

fs[x_, y_, m_] := 1 + Sum[i^r (EulerGamma^r/r! + Sum[((-1)^s a[s] EulerGamma^(r-s))/(s! (r - s)!), {s, 1, r}]) (x + i y)^r, {r, 1, m}]
```

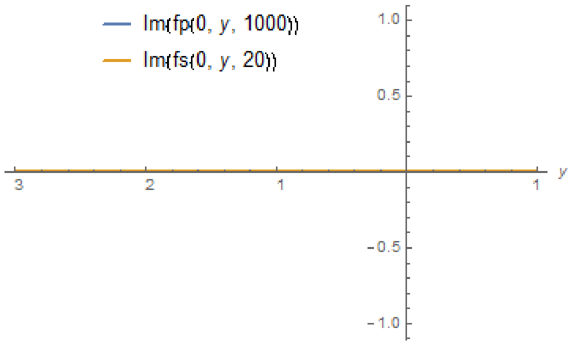




左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は市松模様になっている。これは左辺(無限乗積)の収束速度が遅いためである。なお、多項式 $B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。

次に、$x=0$ における両辺の2D図を示すと次のようになる。左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $y=-1,-2,-3,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。





例2 負の虚奇数を根とする無限次方程式

上記 (3.3_) と (3.4_) がこれに該当するが、此処では (3.3_) を例示する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}e^{-\frac{z}{i(2r-1)}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}i^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)\,!}\right\}z^r \tag{3.3_}$$

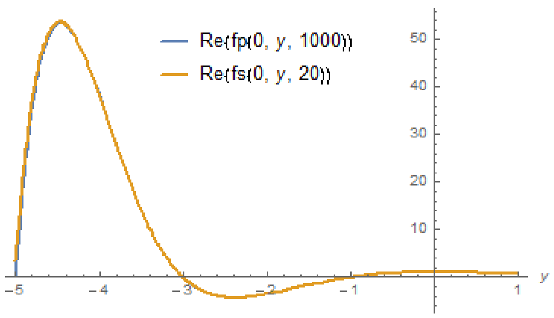
z を $0+iy$ に置換してこの両辺の2D図を示すと次のようになる。左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $y=-1,-3,-5,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。

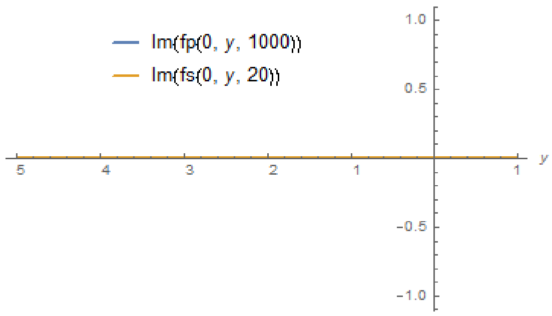
$$\text{Tbl}\psi[r\_,\ z\_] := \text{Table}[\text{PolyGamma}[k,\ z],\ \{k,\ 0,\ r-1\}]$$

$$b[r\_] := \sum_{k=1}^{r}(-1)^k\,\text{BellY}\left[r,\ k,\ \text{Tbl}\psi\left[r,\ \frac{1}{2}\right]\right] \qquad \gamma := \text{EulerGamma}$$

$$fp[x\_,\ y\_,\ m\_] := \prod_{r=1}^{m}\left(1+\frac{x+i\,y}{i\,(2\,r-1)}\right)e^{-\frac{x+i\,y}{i\,(2\,r-1)}}$$

$$fs[x\_,\ y\_,\ m\_] := 1+\sum_{r=1}^{m}i^r\left(\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\text{Log}[2]\right)^r}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\,b[s]\left(\frac{\gamma}{2}+\text{Log}[2]\right)^{r-s}}{(2\,s)\,!!\,(r-s)\,!}\right)(x+i\,y)^r$$





2･4 虚整数を根とする無限次方程式(その2)

公式 2･2･1 は、z を iz に置換することによって、容易に虚整数を零点とする冪級数に変換できる。そこで、次のようにその冪級数を0と置けば、

$$1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+\cdots = 0$$

これは負および正の両方の虚整数を根とする無限次方程式となる。

公式 2･4･1

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ をBell 多項式、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\ldots,\psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)\left(1-\frac{z}{ir}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r} \qquad \left(=\frac{\sinh\pi z}{\pi z}\right) \tag{4.1}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2ir}\right)\left(1-\frac{z}{2ir}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^{2r} \qquad \left(=\frac{\sinh(\pi z/2)}{\pi z/2}\right) \tag{4.2}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(4r)!!}z^{2r} \qquad \left(=\cosh\frac{\pi z}{2}\right) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left(1-\frac{z}{2ir}\right) &= 1+i\frac{a_1-b_1}{2!!}z \\ &+\sum_{r=2}^{\infty}i^r\left\{\frac{a_r+(-1)^r b_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}a_s b_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left(1+\frac{z}{2ir}\right) &= 1+i\frac{b_1-a_1}{2!!}z \\ &+\sum_{r=2}^{\infty}i^r\left\{\frac{b_r+(-1)^r a_r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}b_s a_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r\end{aligned} \tag{4.5}$$

証明

公式 2･2･1 より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r} \tag{2.1}$$

z を iz に置換すれば、

左辺: $\displaystyle\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{iz}{r}\right)\left(1-\frac{iz}{r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{ir}\right)\left(1+\frac{z}{ir}\right)$

右辺: $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}(iz)^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(i^2\right)^r(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2r}\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r}$

かくて

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)\left(1-\frac{z}{ir}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)\,!}z^{2r} \tag{4.1}$$

(4.2) と (4.3) も同様にして得られる。
(4.4) は公式 2･2･1 (2.5) において z を iz に置換して得られ、(4.5) は a と b を入れ替えて得られる。

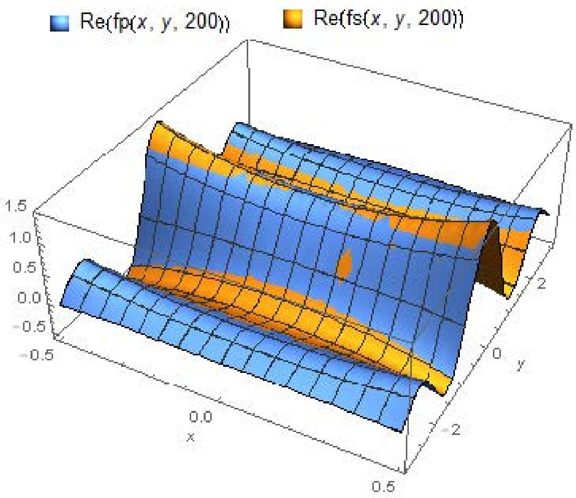
例1 全虚整数を根とする無限次方程式

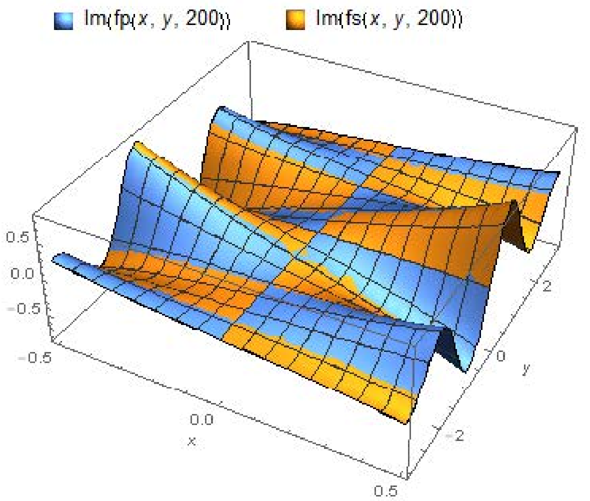
これには上記 (4.1) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{ir}\right)\left(1-\frac{z}{ir}\right)=1+\frac{\pi^2}{3\,!}z^2+\frac{\pi^4}{5\,!}z^4+\frac{\pi^6}{7\,!}z^6+-\cdots \tag{4.1}$$

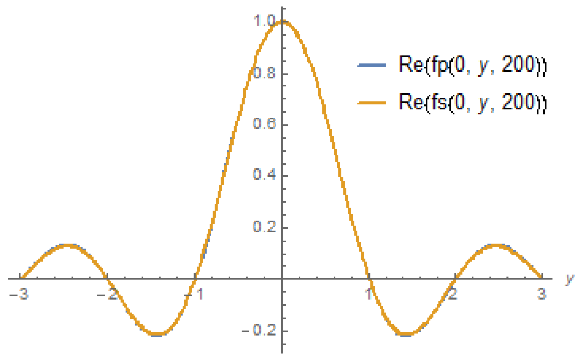
z を $x+iy$ に置換してこの両辺の3D図を示すと次のようになる。左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)も右辺(橙)も共に200項計算されているが、両辺は市松模様になっている。これは左辺(無限乗積)の収束速度が遅いためである。

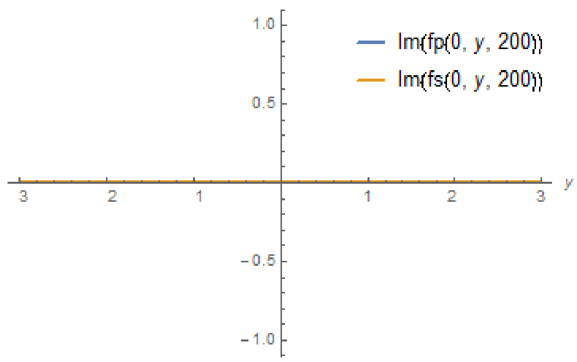
$$\texttt{fp}[x\_,y\_,m\_]:=\prod_{r=1}^{m}\left(1+\frac{x+i\,y}{r\,i}\right)\left(1-\frac{x+i\,y}{r\,i}\right) \qquad \texttt{fs}[x\_,y\_,m\_]:=\sum_{r=0}^{m}\frac{\pi^{2r}}{(2\,r+1)\,!}(x+i\,y)^{2r}$$





次に、$x=0$ における両辺の2D図を示すと次のようになる。左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)も右辺(橙)も共に200項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $y=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。





例2 負の虚偶数と正の虚奇数を根とする無限次方程式

これには上記 (4.5) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{i(2r-1)}\right\}\left(1+\frac{z}{2ir}\right)=1+i\frac{b_1-a_1}{2!!}z$$
$$+i^2\left(\frac{b_2+a_2}{4!!}-\frac{b_1}{2!!}\frac{a_1}{2!!}\right)z^2$$
$$+i^3\left(\frac{b_3-a_3}{6!!}+\frac{b_1}{2!!}\frac{a_2}{4!!}-\frac{b_2}{4!!}\frac{a_1}{2!!}\right)z^3$$
$$+i^4\left(\frac{b_4+a_4}{8!!}-\frac{b_1}{2!!}\frac{a_3}{6!!}+\frac{b_2}{4!!}\frac{a_2}{4!!}-\frac{b_3}{6!!}\frac{a_1}{2!!}\right)z^4$$
$$\vdots \tag{4.5}$$

z を $0+iy$ に置換してこの両辺の2D図を示すと次のようになる。左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $y=-2,-4,\cdots$ 及び $y=1,3,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できるなお、多項式 $B_{r,k}(f_1,f_2,\dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。

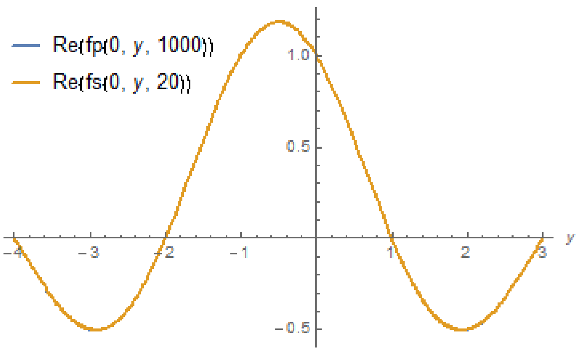
```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

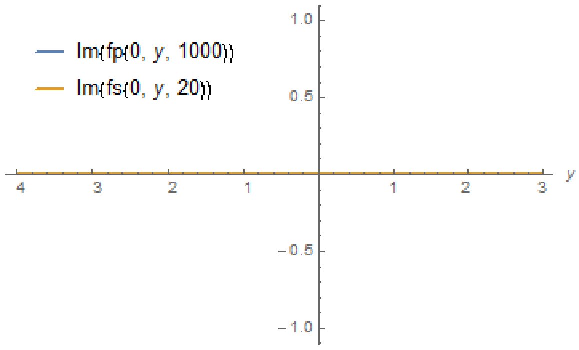
$$\texttt{a[r\_]} := \sum_{k=1}^{r}(-1)^k\,\texttt{BellY}[r,k,\texttt{Tbl}\psi[r,1]]$$

$$\texttt{b[r\_]} := \sum_{k=1}^{r}(-1)^k\,\texttt{BellY}\left[r,k,\texttt{Tbl}\psi\left[r,\frac{1}{2}\right]\right]$$

$$\texttt{fp[x\_, y\_, m\_]} := \prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{x+\mathrm{i}\,y}{\mathrm{i}\,(2r-1)}\right)\left(1+\frac{x+\mathrm{i}\,y}{2\,\mathrm{i}\,r}\right)$$

$$\texttt{fs[x\_, y\_, m\_]} := 1+\mathrm{i}\,\frac{b[1]-a[1]}{2!!}(x+\mathrm{i}\,y)$$
$$+\sum_{r=2}^{m}\mathrm{i}^r\left(\frac{b[r]+(-1)^r a[r]}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}\,b[s]\,a[r-s]}{(2s)!!\,(2(r-s))!!}\right)(x+\mathrm{i}\,y)^r$$





2･5 整数の平方根を持つ無限次方程式

公式 2･1･1 は、z を z^2 に置換することによって、容易に整数の平方根を零点とする冪級数に変換できる。そこで、次のようにその冪級数を0と置けば、

$$1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+\cdots=0$$

これは整数の平方根を持つ無限次方程式となる。

公式 2･5･1 (正整数の平方根を持つ無限次方程式)

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー･マスケロ二の定数、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^kB_{r,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^kB_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{r}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{r}}\right)e^{\frac{z^2}{r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^sa_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^{2r} \tag{5.1$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{2r}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{2r}}\right)e^{\frac{z^2}{2r}}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^sa_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^{2r} \tag{5.2$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)e^{\frac{z^2}{2r-1}}$$
$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^sb_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!(r-s)!}\right\}z^{2r} \tag{5.3$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{2r-1}}\right)e^{\frac{z^2}{2r}}$$
$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^sb_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!(2r-2s)!!}\right\}z^{2r} \tag{5.4$_+$}$$

証明

公式 2･1･1 (1.1$_+$) , (1.2$_+$) , (1.3$_+$) , (1.4$_+$) において、z を z^2 に置換して与式を得る。

例 自然数の平方根を持つ無限次方程式

これには上記 (5.1$_+$) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{r}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{r}}\right)e^{\frac{z^2}{r}}=1+\left(\frac{\gamma^1}{1!}-\frac{a_1\gamma^0}{1!0!}\right)z^2$$
$$+\left(\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{a_1\gamma^1}{1!1!}+\frac{a_2\gamma^0}{2!0!}\right)z^4$$
$$+\left(\frac{\gamma^3}{3!}-\frac{a_1\gamma^2}{1!2!}+\frac{a_2\gamma^1}{2!1!}-\frac{a_3\gamma^0}{3!0!}\right)z^6$$
$$\vdots \tag{5.1$_+$}$$

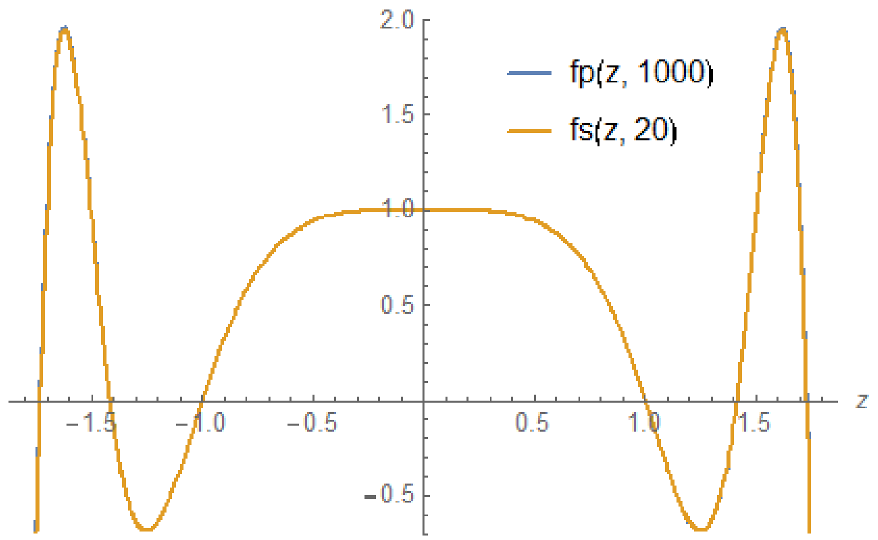
この両辺を図示すると次のようになる。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $y=\pm\sqrt{1},\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3},\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。なお、多項式 $B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

$$a[r\_] := \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \,\mathrm{BellY}[r, k, \mathrm{Tbl}\psi[r, 1]]$$

$$fp[z\_, m\_] := \prod_{r=1}^{m} \left(1+\frac{z}{\sqrt{r}}\right)\left(1-\frac{z}{\sqrt{r}}\right) e^{\frac{z^2}{r}}$$

$$fs[z\_, m\_] := 1+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{EulerGamma}^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\, a[s]\,\mathrm{EulerGamma}^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right) z^{2r}$$



公式 2･5･2 (負整数の平方根を持つ無限次方程式)

$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー･マスケロ二の定数、そして a_r, b_r は次のような定数とする。

$$a_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}(\psi_0(1),\psi_1(1),\ldots,\psi_{r-1}(1)) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$b_r = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{r}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{r}}\right)e^{-\frac{z^2}{r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^{2r} \qquad (5.1\_)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r}} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\left\{\frac{\gamma^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s a_s\gamma^{r-s}}{s!\,(r-s)!}\right\}z^{2r} \qquad (5.2\_)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r-1}}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+log\,2\right)^r}{r\,!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\left(\frac{\gamma}{2}+log\,2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)\,!}\right\}z^{2r} \quad (5.3\_)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r}}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{\frac{\gamma^r}{(2r)!!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s b_s\gamma^{r-s}}{(2s)!!\,(2r-2s)!!}\right\}z^{2r} \quad (5.4\_)$$

証明

公式 2･1･1 (1.1_) , (1.2_) , (1.3_) , (1.4_) において、z を z^2 に置換して与式を得る。

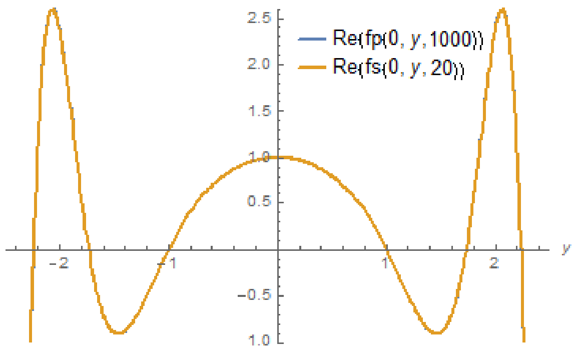
例 負奇数の平方根を持つ無限次方程式

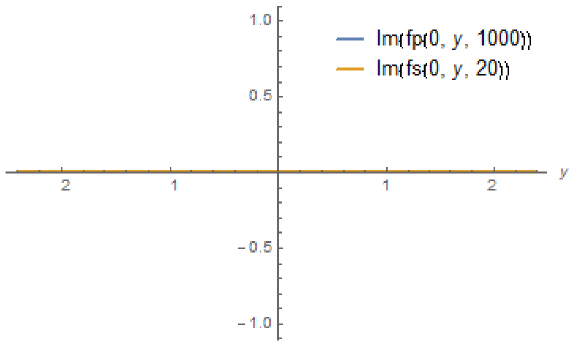
上記 (5.3_) と (5.4_) がこれに該当するが、此処では (5.4_) を例示する。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)\left(1-\frac{z}{i\sqrt{2r-1}}\right)e^{-\frac{z^2}{2r}}=1-\left(\frac{\gamma^1}{2!!}-\frac{b_1\gamma^0}{2!!0!!}\right)z^2$$
$$+\left(\frac{\gamma^2}{4!!}-\frac{b_1\gamma^1}{2!!2!!}+\frac{b_2\gamma^0}{4!!0!!}\right)z^4$$
$$-\left(\frac{\gamma^3}{6!!}-\frac{b_1\gamma^2}{2!!4!!}+\frac{b_2\gamma^1}{4!!2!!}-\frac{b_3\gamma^0}{6!!0!!}\right)z^6$$
$$\vdots \quad (5.4\_)$$

z を $0+iy$ に置換してこの両辺の2D図を示すと次のようになる。左図が実数部で右図が虚数部である。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $y=\pm\sqrt{1},\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{5},\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。なお、多項式 $B_{r,k}(f_1,f_2,\dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。

```
γ := EulerGamma

Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]

b[r_] := Sum[(-1)^k BellY[r, k, Tblψ[r, 1/2]], {k, 1, r}]

fp[x_, y_, m_] := Product[(1 + (x + i y)/(i Sqrt[2 r - 1])) (1 - (x + i y)/(i Sqrt[2 r - 1])) e^(-(x + i y)^2/(2 r)), {r, 1, m}]

fs[x_, y_, m_] := 1 + Sum[(-1)^r (γ^r/(2 r)!! + Sum[((-1)^s b[s] γ^(r-s))/((2 s)!! (2 r - 2 s)!!), {s, 1, r}]) (x + i y)^(2 r), {r, 1, m}]
```


Re(fp(0, y, 1000))
Re(fs(0, y, 20))


Im(fp(0, y, 1000))
Im(fs(0, y, 20))

2･6　平方数を根とする無限次方程式

公式 2･2･1 の一部は、z を $\sqrt{z}$ に置換することによって、容易に平方数を零点とする冪級数に変換できる。そこで、次のようにその冪級数を0と置けば、

$$1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+\cdots=0$$

これは平方数を根とする無限次方程式となる。

公式 2･6･1（平方数を根とする無限次方程式）

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r^2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^r \qquad \left(=\frac{\sin\left(\pi\sqrt{z}\right)}{\pi\sqrt{z}}\right) \tag{6.1$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{(2r)^2}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^r \qquad \left(=\frac{\sin\left(\pi\sqrt{z/4}\right)}{\pi\sqrt{z/4}}\right) \tag{6.2$_+$}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{z}{(2r-1)^2}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(4r)!!}z^r \qquad \left(=\cos\frac{\pi\sqrt{z}}{2}\right) \tag{6.3$_+$}$$

証明

公式 2･2･1 (2.1) , (2.2) , (2.3) において、z を $\sqrt{z}$ に置換して与式を得る。

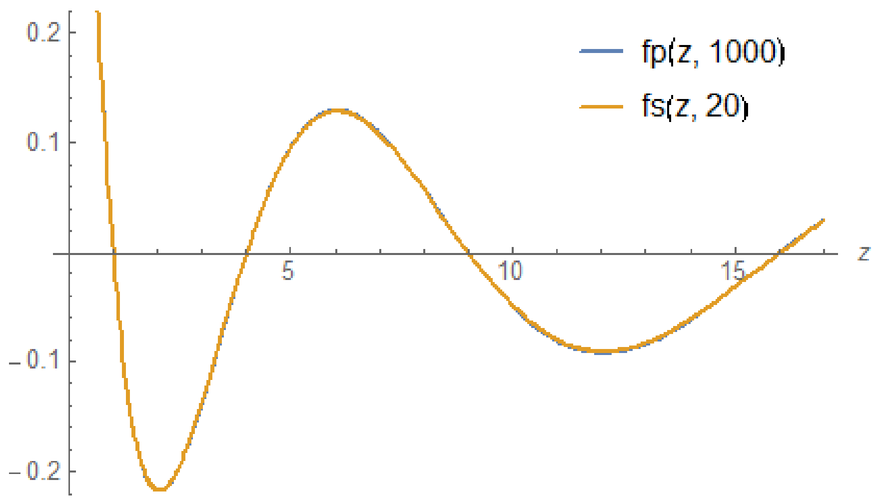
例　自然数の2乗を根とする無限次方程式

これには上記 (6.1$_+$) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r^2}\right)=1-\frac{\pi^2}{3!}z^1+\frac{\pi^4}{5!}z^2-\frac{\pi^6}{7!}z^3+-\cdots \tag{6.1$_+$}$$

この両辺を図示すると次のようになる。左辺(青)は1000項、右辺(橙)は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $z=1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。

```
fp[z_, m_] := \prod_{r=1}^{m} (1 - z/r^2)        fs[z_, m_] := \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \pi^{2r}/(2r+1)! z^r
```



公式 2･6･2 (負の平方数を根とする無限次方程式)

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r^2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^r \qquad \left(=\frac{\sinh(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}}\right) \tag{6.1_}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{(2r)^2}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{2^{2r}(2r+1)!}z^r \qquad \left(=\frac{\sinh(\pi\sqrt{z/4})}{\pi\sqrt{z/4}}\right) \tag{6.2_}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{(2r-1)^2}\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\pi^{2r}}{(4r)!!}z^r \qquad \left(=\cosh\frac{\pi\sqrt{z}}{2}\right) \tag{6.3_}$$

証明

公式 2･6･1 において、z を $-z$ に置換して与式を得る。

例 −(奇数の2乗) を根とする無限次方程式

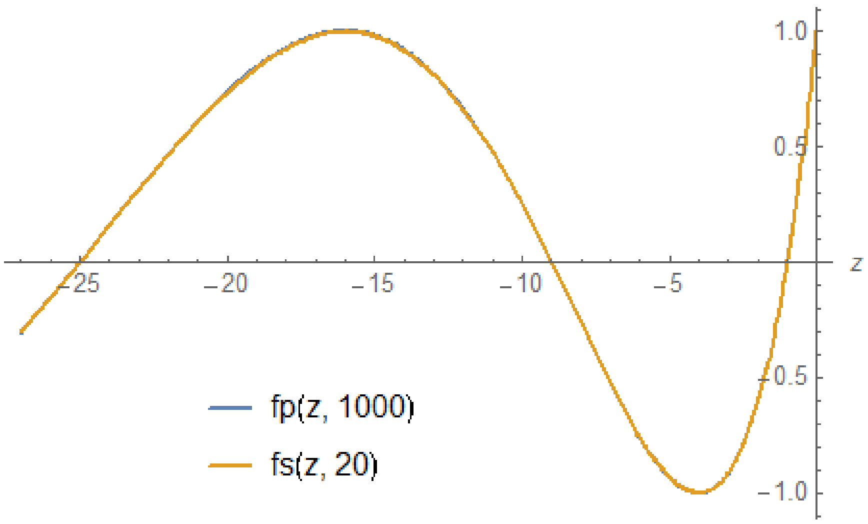
これには上記 (6.3_) が該当する。即ち

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{z}{(2r-1)^2}\right\}=1+\frac{\pi^2}{4!!}z^1+\frac{\pi^4}{8!!}z^2+\frac{\pi^6}{12!!}z^3+\cdots \tag{6.3_}$$

この両辺を図示すると次のようになる。左辺は1000項右辺は20項計算されているが、両辺は重なっていて左辺(青)は見えない。そして $z=-1^2,-3^2,-5^2,\cdots$ が右辺の零点(根)であることが視認できる。

```
fp[z_, m_] := Product[1 + z/(2 r - 1)^2, {r, 1, m}]        fs[z_, m_] := Sum[π^(2 r)/(4 r)!! z^r, {r, 0, m}]
```

$$fp[z\_, m\_] := \prod_{r=1}^{m}\left(1+\frac{z}{(2r-1)^2}\right) \qquad fs[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m}\frac{\pi^{2r}}{(4r)!!}z^r$$



2017.08.31
2017.10.20 第6節追加

Kano Kono

宇宙人の数学