3 無限次方程式における根と係数

3･1 無限次方程式の特性

有限次方程式と異なり、無限次方程式には固有の特性がある。本節では先ずそれを明らかにする。

(1) 代数学の基本定理が一般的に成立しない。

代数学の基本定理と言うのは、「複素係数の多項式から成る1変数の n 次方程式は、重複も数えて、n 個の根を複素平面上に持つ」と言う事である。

ところが無限次方程式の場合、これが一般的には成立しない。 例えば、無限次方程式

$$1+\frac{1}{1!}z^1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots=0$$

は複素平面上に根を持たない。何故ならば、この級数は e^z に等しく、この関数は複素平面上に零点を持たないことが知られているからである。

それならば、無限次方程式が根を持つならばその根は無限個あるかと言うと、そうとも限らない。例えば、無限次方程式

$$1+\frac{2}{1!}z^1+\frac{3}{2!}z^2+\frac{4}{3!}z^3+\cdots=0$$

は $z=-1$ のみを根として持つ。何故ならば、この級数は $(z+1)e^z$ に等しいからである。

(2) 根と係数の関係（Vieta's formulas）が一般的に成立しない。

2次方程式

$$1+a_1z^1+a_2z^2=0$$

の根を α_1,α_2 とすれば

$$a_1=-\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right) \quad , \quad a_2=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$$

これが2次の場合のヴィエタの公式である。

ところが無限次の場合、これが一般的には成立しない。例えば、$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ をBell多項式、γ をオイラー･マスケロ二の定数、そして

$$a_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\ldots,\psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$ とするとき、

無限次方程式

$$1+\left(\frac{\gamma^1}{1!}-\frac{a_1\gamma^0}{1!0!}\right)z^1+\left(\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{a_1\gamma^1}{1!1!}+\frac{a_2\gamma^0}{2!0!}\right)z^2$$
$$+\left(\frac{\gamma^3}{3!}-\frac{a_1\gamma^2}{1!2!}+\frac{a_2\gamma^1}{2!1!}-\frac{a_3\gamma^0}{3!0!}\right)z^3+\cdots=0$$

の根は $z=1,2,3,\cdots$ である。（「２ 整数を根とする無限次方程式 」参照 。）

この方程式においては、次のように、係数 a_1 と根の関係が成立しない。

$$a_1=\frac{\gamma^1}{1!}-\frac{a_1\gamma^0}{1!0!}=0\neq-\infty=-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)=-\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots\right)$$

(3) 有理係数の無限次方程式の根は一般的に代数的数でない。

有理係数の有限次方程式の根は必ず代数的数である。何故ならば、これは代数的数の定義だからである。

ところが、有理係数の無限次方程式の根は多くの場合代数的数でない。例えば、無限次方程式

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+-\cdots=0$$

の係数は全て有理数であるが、その根は $z=\pm 1\pi/2,\pm 3\pi/2,\pm 5\pi/2\cdots$ で、これらは代数的数ではない。

勿論、代数的数を根として持つ有理係数の無限次方程式も存在する。例えば、(1)で述べた

$$1+\frac{2}{1!}z^1+\frac{3}{2!}z^2+\frac{4}{3!}z^3+\cdots=0$$

は代数的数 $z=-1$ を根として持つ。

3・2 根と係数の関係（その1）

前節で述べたように、無限次方程式においては代数学の基本定理とヴィエタの公式が保証されない。しかしながら関数 $f(z)$ が零点を持ちかつその零点で完全に因数分解されるならば、その無限乗積に対してヴィエタの公式が成立する。本節ではそのような場合のみを考察する。

公式 3・2・1 (ヴィエタの公式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots$ を持ち、次のように完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\left(1-\frac{z}{z_3}\right)\left(1-\frac{z}{z_4}\right)\cdots$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots \tag{2.s}$$

但し、

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_3}}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}\cdots z_{r_n}}$$

証明

(2.s) の根を $z_1, z_2, z_3, \cdots$ とすれば

$$\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\left(1-\frac{z}{z_3}\right)\left(1-\frac{z}{z_4}\right)\cdots = 0 \tag{2.p}$$

(2.p) を展開すれば

$$1 - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r}z^1 + \sum_{r<s}^{\infty}\frac{1}{z_rz_s}z^2 - \sum_{r<s<t}^{\infty}\frac{1}{z_rz_sz_t}z^3 + \sum_{r<s<t<u}^{\infty}\frac{1}{z_rz_sz_tz_u}z^4 -+\cdots = 0 \tag{2.c}$$

(2.s) と (2.p) が同じ関数を表しているから、級数の一意性により、両者の係数は等しくなければならない。よって次式が成立する。

$$a_1 = -\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r}\ ,\ a_2 = \sum_{r<s}\frac{1}{z_rz_s}\ ,\ a_3 = -\sum_{r<s<t}\frac{1}{z_rz_sz_t}\ ,\ a_4 = \sum_{r<s<t<u}\frac{1}{z_rz_sz_tz_u}\ ,\ -+\cdots$$

$a_2, a_3, a_4, \cdots$ の右辺は更に次のように計算される。

$$\sum_{r<s}^{\infty}\frac{1}{z_rz_s} = \frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}+\cdots\right)+\frac{1}{z_2}\left(\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}+\frac{1}{z_5}+\cdots\right)+\frac{1}{z_3}\left(\frac{1}{z_4}+\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_6}+\cdots\right)+\cdots$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{z_s} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{z_rz_s}$$

$$\sum_{r<s<t}^{\infty} \frac{1}{z_r z_s z_t}$$

$$= \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\left(\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}+\frac{1}{z_5}+\cdots\right)+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_3}\left(\frac{1}{z_4}+\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_6}+\cdots\right)+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_4}\left(\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_6}+\frac{1}{z_7}+\cdots\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3}\left(\frac{1}{z_4}+\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_3}+\cdots\right)+\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_4}\left(\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_6}+\frac{1}{z_7}+\cdots\right)+\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_5}\left(\frac{1}{z_6}+\frac{1}{z_7}+\frac{1}{z_8}+\cdots\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{z_3}\frac{1}{z_4}\left(\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_6}+\frac{1}{z_7}+\cdots\right)+\frac{1}{z_3}\frac{1}{z_5}\left(\frac{1}{z_5}+\frac{1}{z_6}+\frac{1}{z_7}+\cdots\right)+\frac{1}{z_3}\frac{1}{z_6}\left(\frac{1}{z_7}+\frac{1}{z_8}+\frac{1}{z_9}+\cdots\right)+\cdots$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{z_s}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{z_t} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{z_r z_s z_t}$$

以下、帰納法を適用し$r,s,t\cdots$ を $r_1, r_2, r_3, \cdots$ に書き換えて与式を得る。

例　自然数の1.5乗を根とする方程式

このような関数$f_p(z)$は次の無限積で表せる。

$$f_p(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r^{1.5}}\right)$$

これが次のように冪級数に展開されるとする。

$$f_s(z) = 1+a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

上記公式を適用すれば、$z_r = r^{1.5}$ $(r=1,2,3,\cdots)$ であるから、これらの係数は次のように表される。

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^{1.5}}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(r_1 r_2)^{1.5}}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{(r_1 r_2 r_3)^{1.5}}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{(r_1 r_2 \cdots r_n)^{1.5}}$$

数式処理ソフト*Mathematica*を用いて$f_p(z)$をz^3までマクローリン展開し、係数a_1, a_2, a_3を計算すると、次のようになる。いづれもm=1,000まで計算されているが、両者の係数はぴったり一致している。

$$\mathrm{fp}[z\_,\ m\_] := \prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{z}{r^{1.5}}\right)$$

$$\mathrm{a_1}[m\_] := -\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1^{1.5}} \qquad \mathrm{a_2}[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{(r_1\ r_2)^{1.5}} \qquad \mathrm{a_3}[m\_] := -\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\frac{1}{(r_1\ r_2\ r_3)^{1.5}}$$

```
Series[fp[z, 1000], {z, 0, 3}]
1 - 2.54915 z + 2.64804 z^2 - 1.58025 z^3 + O[z]^4
{a1[1000], a2[1000], a3[1000]}
{-2.54915, 2.64804, -1.58025}
```

この公式を「 02 整数を根とする無限次方程式 」公式 2·2·1 と比較すれば、次の公式を得る。

公式 3·2·2

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{(r_1 r_2\cdots r_n)^2}=\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} \tag{2.1}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\{(2r_1-1)(2r_2-1)\cdots(2r_n-1)\}^2}=\frac{\pi^{2n}}{(4n)!!} \tag{2.2}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_n}}{r_1 r_2\cdots r_n}=\frac{\alpha_n+(-1)^n\beta_n}{(2n)!!}+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-s}\alpha_s\beta_{n-s}}{(2s)!!\{2(n-s)\}!!} \tag{2.3}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ は Bell 多項式、かつ

$$\alpha_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}(\psi_0(1),\psi_1(1),\ldots,\psi_{r-1}(1)) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$\beta_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

証明

「 02 整数を根とする無限次方程式 」公式 2·2·1 より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}z^{2r} \tag{evn}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{z}{2r-1}\right)^2\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(4r)!!}z^{2r} \tag{odd}$$

(evn) の左辺は 公式 3·2·1 において z/z_r を z^2/r^2 に置換したものに過ぎない。よって

$$a_1=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}=-\frac{\pi^2}{3!}$$

$$a_2=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{r^2s^2}=\frac{\pi^4}{5!}$$

$$a_3=-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{r^2s^2t^2}=-\frac{\pi^6}{7!}$$

$\vdots$

$$a_n = (-1)^n \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{(r_1 r_2 \cdots r_n)^2} = (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

かくて、(2.1) を得る。

(odd) の左辺は 公式 3·2·1 において z/z_r を $z^2/(2r-1)^2$ に置換したものに過ぎない。よって、上と類似の方法で (2.2) を得る。

「 02 整数を根とする無限次方程式 」公式 2·2·1 より

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)\left(1+\frac{z}{2r}\right) = 1 + \frac{\alpha_1-\beta_1}{2!!}z^1 + \sum_{r=2}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_r+(-1)^r\beta_r}{(2r)!!} + \sum_{s=1}^{r-1}\frac{(-1)^{r-s}\alpha_s\beta_{r-s}}{(2s)!!\{2(r-s)\}!!}\right\}z^r$$

これに 公式 3·2·1 を適用すれば、$z_r = -(-1)^r r \quad (r=1,2,3,\cdots)$ であるから、これらの係数は次のようになる。

$$a_1 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r} = \frac{\alpha_1-\beta_1}{2!!}$$

$$a_2 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{rs} = \frac{\alpha_2+\beta_2}{4!!} - \frac{\alpha_1}{2!!}\frac{\beta_1}{2!!}$$

$$a_3 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}}{rst} = \frac{\alpha_3-\beta_3}{6!!} + \frac{\alpha_1}{2!!}\frac{\beta_2}{4!!} - \frac{\alpha_2}{4!!}\frac{\beta_1}{2!!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+\cdots+r_n}}{r_1 r_2 \cdots r_n} = \frac{\alpha_n+(-1)^n\beta_n}{(2n)!!} + \sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{n-s}\frac{\alpha_s\beta_{n-s}}{(2s)!!\{2(n-s)\}!!}$$

即ち、(2.3) を得る。

例1

(2.1) の両辺を $n=3$ について計算すると次のとおり。左辺は $m=1,100$ まで計算されているが、両辺は小数点以下3桁まで一致している。

```
a3[m_] := Sum[1/(r s t)^2, {r,1,m}, {s,r+1,m}, {t,s+1,m}]      f[n_] := π^(2 n)/(2 n + 1)!
N[{a3[1100] , f[3]}]
{0.190015 , 0.190752}
```

例2

(2.2) の両辺を $n=3$ について計算すると次のとおり。左辺は $m=1,500$ まで計算されているが、両辺は小数点以下4桁まで一致している。

$$a_3[m\_] := \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=r+1}^{m}\sum_{t=s+1}^{m} \frac{1}{((2r-1)(2s-1)(2t-1))^2} \qquad f[n\_] := \frac{\pi^{2n}}{(4n)!!}$$

```
N[{a3[1500] , f[3]}]
{0.0208212 , 0.0208635}
```

例3

(2.3) の両辺を $n=2$ について計算すると次のとおり。多項式 $B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。左辺は m=5,000 まで計算されているが、両辺は小数点以下4桁まで一致している。

$$a_2[m\_] := \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=r+1}^{m} \frac{(-1)^{r+s}}{r\,s}$$

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

$$\alpha_{r\_} := \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \,\mathrm{BellY}[r, k, \mathrm{Tbl}\psi[r, 1]] \qquad \beta_{r\_} := \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \,\mathrm{BellY}\left[r, k, \mathrm{Tbl}\psi\left[r, \frac{1}{2}\right]\right]$$

$$N\left[\left\{a_2[5000], \frac{\alpha_2 + \beta_2}{4!!} - \frac{\alpha_1\,\beta_1}{2!!\quad 2!!}\right\}\right]$$

```
{-0.58221 , -0.58224}
```

3・3 根と係数の関係(その2)

本節では、関数 $f(z)$ がその零点で完全には因数分解されない場合の根と係数の関係を考察する。

公式 3・3・1

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots$ を持ち、次のように不完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_r}\right)e^{\frac{z}{z_r}}$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\cdots \tag{3.s}$$

$$c_1 = \frac{a_1 a_1^0}{0!} - \frac{a_0 a_1^1}{1!}$$

$$c_2 = \frac{a_2 a_1^0}{0!} - \frac{a_1 a_1^1}{1!} + \frac{a_0 a_1^2}{2!}$$

$$c_3 = \frac{a_3 a_1^0}{0!} - \frac{a_2 a_1^1}{1!} + \frac{a_1 a_1^2}{2!} - \frac{a_0 a_1^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$c_r = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!}$$

但し、

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\ ,\ a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\ ,\ a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\ ,\ \cdots$$

特に $c_1 \sim c_4$ は次のように簡潔に表される。

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r^3}$$

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^4} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^2 z_{r_2}^2}$$

証明

関数 $f(z)$ を次のように分割する。

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_r}\right)e^{\frac{z}{z_r}} = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_r}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z}{z_r}} \equiv f_1(z)f_2(z)$$

すると $f_1(z)$ と $f_2(z)$ はそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

$$f_1(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_r}\right) = 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$$

$$f_2(z) = e^{z\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r}} = 1+b_1z^1+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4+\cdots$$

但し、

$$a_0=1\ ,\ a_1=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\ ,\ a_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\ ,\ a_3=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\ ,\cdots$$

$$b_0=1\ ,\ b_1=\frac{1}{1!}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\ ,\ b_2=\frac{1}{2!}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2\ ,\ b_3=\frac{1}{3!}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^3\ ,\ \cdots$$

$f_1(z)$ と $f_2(z)$ の コーシー積を取れば

$$f_1(z)f_2(z) = \left(\sum_{r=0}^{\infty}a_rz^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_rz^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}a_{r-s}b_sz^r$$

ここで

$$b_s = (-1)^s\frac{a_1^s}{s!}\qquad s=0,1,2,\cdots$$

であるから、これを用いれば

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}a_{r-s}b_sz^r = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!}z^r$$

故に

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_r}\right)e^{\frac{z}{z_r}} = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!}\right\}z^r$$

書き下せば

$$f(z) = 1+\left(\frac{a_1a_1^0}{0!}-\frac{a_0a_1^1}{1!}\right)z^1+\left(\frac{a_2a_1^0}{0!}-\frac{a_1a_1^1}{1!}+\frac{a_0a_1^2}{2!}\right)z^2$$
$$+\left(\frac{a_3a_1^0}{0!}-\frac{a_2a_1^1}{1!}+\frac{a_1a_1^2}{2!}-\frac{a_0a_1^3}{3!}\right)z^3+\cdots$$

かくて c_1 , c_2 , c_3 , $\cdots$ を得る。

特に、

$$c_1 = \frac{a_1a_1^0}{0!}-\frac{a_0a_1^1}{1!} = a_1-a_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{a_2a_1^0}{0!}-\frac{a_1a_1^1}{1!}+\frac{a_0a_1^2}{2!} = a_2-\frac{a_1^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(a_1^2-2a_2\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2-2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\right\} = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{z_r^2}$$

次に

$$c_3 = \frac{a_3a_1^0}{0!}-\frac{a_2a_1^1}{1!}+\frac{a_1a_1^2}{2!}-\frac{a_0a_1^3}{3!} = a_3-a_2a_1+\frac{a_1^3}{3} = -\frac{1}{3}\left(-a_1^3+3a_1a_2-3a_3\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^3 - 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}} + 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\right\}$$

ここで、公式 1·3·1（01 無限級数の累乗）によれば

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^3 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^3} + 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}} - 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}$$

であるから、これを上に代入すれば

$$c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^3}$$

次に

$$c_4 = \frac{a_4 a_1^0}{0!} - \frac{a_3 a_1^1}{1!} + \frac{a_2 a_1^2}{2!} - \frac{a_1 a_1^3}{3!} + \frac{a_0 a_1^4}{4!} = a_4 - a_3 a_1 + \frac{a_2 a_1^2}{2} - \frac{a_1^4}{8}$$

$$= \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_4}} - \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\right)\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^4$$

ここで、公式 1·3·1（01 無限級数の累乗）によれば

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^4} - 2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^2 z_{r_2}^2} + 4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\right)\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2$$

$$- 8\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$+ 8\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_4}}$$

であるから、これを上に代入すると

$$c_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_4}} - \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\right)\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2 - \frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^4}$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^2 z_{r_2}^2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\right)\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2$$

$$+ \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$- \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_4}}$$

i.e.

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^4} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^2 z_{r_2}^2}$$

例　自然数を根とする方程式

このような関数 $f_p(z)$ は次の無限積で表せる。

$$f_p(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}}$$

これが次のように冪級数に展開されるとする。

$$f_s(z) = 1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\cdots$$

上記公式を適用すれば、$z_r = r \quad (r=1,2,3,\cdots)$ であるから、これらの係数は次のようになる。

$$c_r = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s\,!} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

但し、

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1}\ ,\ a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1r_2}\ ,\ a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{r_1r_2r_3}\ ,\ \cdots$$

数式処理ソフト *Mathematica* を用いて $f_p(z)$ を z^3 までマクローリン展開し、係数 c_1 , c_2 , c_3 を計算すると、次のようになる。いづれも $m=1,000$ まで計算されているが、両者の係数はぴったり一致している。

$$a_0[m\_] := 1 \quad a_1[m\_] := -\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1} \quad a_2[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{r_1\ r_2} \quad a_3[m\_] := -\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\frac{1}{r_1\ r_2\ r_3}$$

$$\mathrm{fp}[z\_,\ m\_] := \prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} \qquad c_{r\_}[m\_] := \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}[m]\ a_1[m]^s}{s\,!}$$

```
N[Series[fp[z, 1000], {z, 0, 3}]]
1. - 0.821967 (z + 0.)^2 - 0.400685 (z + 0.)^3 + O[z + 0.]^4
```

```
N[{c1[1000], c2[1000], c3[1000]}]
{0., -0.821967, -0.400685}
```

特に $c_1 \sim c_4$ は次のように簡潔に表される。

$$c_1 = 0 \quad ,\quad c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2} = -\frac{\zeta(2)}{2} \quad ,\quad c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^3} = -\frac{\zeta(3)}{3}$$

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^4}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2\,r_2^2} = -\frac{\zeta(4)}{8}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2\,r_2^2}$$

今度は精度を上げて $f_p(z)$ のマクローリン級数と係数 c_2 , c_3 , c_4 を計算すると次のようになる。$f_p(z)$ は $m=10,000$　c_4 は $m=5,000$ まで計算されているが、両者はほぼ一致している。

$$c_2 := -\frac{\mathrm{Zeta}[2]}{2} \qquad c_3 := -\frac{\mathrm{Zeta}[3]}{3} \qquad c_4[m\_] := -\frac{\mathrm{Zeta}[4]}{8}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{(r_1\ r_2)^2}$$

```
N[Series[fp[z, 10000], {z, 0, 4}]]
1. - 0.822417(z + 0.)^2 - 0.4006856 (z + 0.)^3 + 0.0676041(z + 0.)^4 + O[z + 0.]^5
```

```
N[{c2, c3, c4[5000]}]
{-0.822467, -0.400686, 0.067563}
```

この公式を前章「02 整数を根とする無限次方程式」公式 2·1·1 と比較すれば、次の公式を得る。

公式 3·3·2

$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数、$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー・マスケロ二の定数、そして α_r, a_r はそれぞれ次のような定数とする。

$$\alpha_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$a_0 = 1, \ a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{r_1}, \ a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{r_1 r_2}, \ a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{r_1 r_2 r_3}, \ \cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{a_{r-s} a_1^s}{s!} = \frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r} \frac{(-1)^s \alpha_s \gamma^{r-s}}{s!(r-s)!} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

特に、

$$-\frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\gamma^2}{2!} - \frac{\alpha_1 \gamma^1}{1!1!} + \frac{\alpha_2 \gamma^0}{2!0!}$$

$$-\frac{\zeta(3)}{3} = \frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\alpha_1 \gamma^2}{1!2!} + \frac{\alpha_2 \gamma^1}{2!1!} - \frac{\alpha_3 \gamma^0}{3!0!}$$

$$-\frac{\zeta(4)}{8} + \frac{1}{4} \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\alpha_1 \gamma^3}{1!3!} + \frac{\alpha_2 \gamma^2}{2!2!} - \frac{\alpha_3 \gamma^1}{3!1!} + \frac{\alpha_4 \gamma^0}{4!0!}$$

証明

公式 3·3·1 において $z_r = r \quad r=1,2,3,\cdots$ と置けば、

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r}\right) e^{\frac{z}{r}} = 1 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots$$

$$c_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{a_{r-s} a_1^s}{s!} \tag{3.c}$$

但し、

$$a_0 = 1, \ a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{r_1}, \ a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{r_1 r_2}, \ a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{r_1 r_2 r_3}, \ \cdots$$

特に c_2, c_3, c_4 は次のように簡潔に表される。

$$c_2 = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = -\frac{\zeta(2)}{2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} = -\frac{\zeta(3)}{3}$$

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2 r_2^2} = -\frac{\zeta(4)}{8} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2 r_2^2}$$

他方、「 02 整数を根とする無限次方程式 」公式 2･1･1 よれば

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}\right)e^{\frac{z}{r}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\alpha_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!}\right\}z^r \tag{1.1$_+$}$$

(3.c) と (1.1$_+$) より

$$c_r = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!} = \frac{\gamma^r}{r!} + \sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\alpha_s\gamma^{r-s}}{s!(r-s)!} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

特に、

$$c_2 = -\frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\gamma^2}{2!} - \frac{\alpha_1\gamma^1}{1!1!} + \frac{\alpha_2\gamma^0}{2!0!}$$

$$c_3 = -\frac{\zeta(3)}{3} = \frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\alpha_1\gamma^2}{1!2!} + \frac{\alpha_2\gamma^1}{2!1!} - \frac{\alpha_3\gamma^0}{3!0!}$$

$$c_4 = -\frac{\zeta(4)}{8} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\alpha_1\gamma^3}{1!3!} + \frac{\alpha_2\gamma^2}{2!2!} - \frac{\alpha_3\gamma^1}{3!1!} + \frac{\alpha_4\gamma^0}{4!0!}$$

例 c_3

次の等式を検証する。

$$-\frac{\zeta(3)}{3} = \frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\alpha_1\gamma^2}{1!2!} + \frac{\alpha_2\gamma^1}{2!1!} - \frac{\alpha_3\gamma^0}{3!0!}$$

右辺に $\alpha_1 = -\psi_0(1)$, $\alpha_2 = \psi_0^2(1) - \psi_1(1)$, $\alpha_3 = -\psi_0^3(1) + 3\psi_0(1)\psi_1(1) - \psi_2(1)$ を代入すると、

$$\frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\alpha_1\gamma^2}{1!2!} + \frac{\alpha_2\gamma^1}{2!1!} - \frac{\alpha_3\gamma^0}{3!0!} = \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\psi_0(1)\gamma^2}{1!2!} + \frac{\{\psi_0^2(1) - \psi_1(1)\}\gamma^1}{2!1!} + \frac{\{\psi_0^3(1) - 3\psi_0(1)\psi_1(1) + \psi_2(1)\}\gamma^0}{3!0!}$$

更に、右辺に $\psi_0[1] = -\gamma$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\alpha_1\gamma^2}{1!2!} + \frac{\alpha_2\gamma^1}{2!1!} - \frac{\alpha_3\gamma^0}{3!0!} &= \frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\gamma^3}{1!2!} + \frac{\{\gamma^2 - \psi_1(1)\}\gamma^1}{2!1!} \\ &\quad + \frac{-\gamma^3 + 3\gamma\,\psi_1(1) + \psi_2(1)}{3!0!} \\ &= -\frac{\psi_1(1)\gamma}{2!} + \frac{3\psi_1(1)\gamma}{3!} + \frac{\psi_2(1)}{3!}\end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{\gamma^3}{3!} - \frac{\alpha_1\gamma^2}{1!2!} + \frac{\alpha_2\gamma^1}{2!1!} - \frac{\alpha_3\gamma^0}{3!0!} = \frac{\psi_2(1)}{3!}$$

よって

$$-\frac{\zeta(3)}{3}=\frac{\psi_2(1)}{3!}$$

i.e.

$$\zeta(3)=-\frac{\psi_2(1)}{2}$$

この関係は周知のものである。よって本例の等式は成立する。

公式 3･3･2の証明 と類似の方法により、次の公式を得る。

公式 3･3･3

$\lambda(z)$ をディリクレ･ラムダ関数、$\psi_r(z)$ をポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\dots)$ を Bell 多項式、γ をオイラー･マスケロ二の定数、そして β_r,a_r は次のような定数とする。

$$\beta_r=\sum_{k=1}^{r}(-1)^k B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\dots,\psi_{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\qquad r=1,2,3,\cdots$$

$$a_0=1\ ,\quad a_1=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{2r_1-1}\ ,\quad a_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(2r_1-1)(2r_2-1)}$$

$$a_3=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{(2r_1-1)(2r_2-1)(2r_3-1)}\ ,\ \cdots$$

すると、次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\frac{a_{r-s}a_1^s}{s!}=\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^r}{r!}+\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{r-s}}{(2s)!!\,(r-s)!}$$

特に、

$$-\frac{\lambda(2)}{2}=\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2}{2!}+\sum_{s=1}^{2}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{2-s}}{(2s)!!\,(2-s)!}$$

$$-\frac{\lambda(3)}{3}=\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3}{3!}+\sum_{s=1}^{3}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{3-s}}{(2s)!!\,(3-s)!}$$

$$-\frac{\lambda(4)}{8}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(2r_1-1)^2(2r_2-1)^2}=\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^4}{4!}+\sum_{s=1}^{4}\frac{(-1)^s\beta_s\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^{4-s}}{(2s)!!\,(4-s)!}$$

「特に」の3行を計算すると次のとおり。左辺が f で 右辺が g である。 多項式 $B_{r,k}(f_1,f_2,\dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。2行目と3行目については両辺がぴったり一致している。4行目の両辺もほぼ一致している。

```
λ[z_] := DirichletLambda[z]        γ := EulerGamma
```

$$\texttt{f[r\_]} := -\frac{\lambda[r]}{r}\qquad \texttt{f4[m\_]} := -\frac{\lambda[4]}{8}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{(2r_1-1)^2(2r_2-1)^2}$$

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
```

$$\beta_{s\_} := \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k}\, \text{BellY}\left[s,\, k,\, \text{Tbl}\psi\left[s,\, \frac{1}{2}\right]\right]$$

$$g[r\_] := \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right)^{r}}{r\,!} + \sum_{s=1}^{r} \frac{(-1)^{s}\, \beta_{s} \left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right)^{r-s}}{(2\,s)\,!!\,(r-s)\,!}$$

```
N[{f[2], g[2]}]          N[{f[3], g[3]}]        N[{f4[5000], g[4]}]
{-0.61685, -0.61685}     {-0.3506, -0.3506}     {-0.0634328, -0.0634174}
```

3・4 実係数の無限次方程式
本節では、実係数の無限次方程式の性質について述べる。

定義

領域 D 上に定義された関数 $f(z)$ が

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \qquad z \in D$$

を満たすとき、$f(z)$ は **複素共役性を持つ** と言う。ここで $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

定理 3・4・1

関数 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ において $a_k \quad (k=0,1,2,\cdots)$ が実数であるとき、$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

証明

直交座標 $z = x+iy$ を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r=|z|\ ,\ \theta = \arg z\ ,\ -\pi<\theta \le \pi)$$

と極座標に変換すれば

$$z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \qquad k=0,1,2,\cdots$$

これを用いて

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta + i\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

$$\because \quad a_k \ (k=0,1,2,\cdots) \ \textit{are real numbers}$$

他方、$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ より、

$$(\bar{z})^k = r^k(\cos k\theta - i\sin k\theta) \qquad k=0,1,2,\cdots$$

これを用いて

$$f(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k(\cos k\theta - i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \cos k\theta - i\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

$$\because \quad a_k \ (k=0,1,2,\cdots) \ \textit{are real numbers}$$

$$\therefore \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

この定理から、実係数の無限次方程式に関する重要な次の系が導かれる。

系 3・4・1

無限次方程式 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0$ において $a_k \quad (k=0,1,2,\cdots)$ が実数であるとき、

z_0 が根ならば、$\overline{z_0}$ もまた根である。

証明

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = f(z) = u(x) + i\,v(z)$ と置けば、z_0 を根とするとき

$$f(z_0) = u(x_0) + i\,v(z_0) = 0$$

これより $u(z_0) = 0$, $v(z_0) = 0$ であるから

$$\overline{f(z_0)} = u(x_0) - i\,v(z_0) = 0$$

定理 3･4･1 により

$$\overline{f(z_0)} = f\left(\overline{z_0}\right)$$

故に $\overline{z_0}$ は $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0$ の根である。

3・5 根と係数の関係(その3)

本節では、完全に因数分解される実係数の無限次方程式について、根と係数の関係を考察する。

公式 3・5・1 (共役複素根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k = x_k \pm i y_k$, $y_k \ne 0$ $(k=1,2,3,\cdots)$ を持ち、次のように完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+a_1 z^1+a_2 z^2+a_3 z^3+a_4 z^4+\cdots \tag{5.s}$$

但し、

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$\begin{aligned}a_4 = &\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}\\ &+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}\\ &+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}a_{2n-1} = &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}\\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)}\\ &\vdots\\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_n}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}\end{aligned}$$

$$a_{2n}=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

証明

(5.s) の根を $z_k=x_k\pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=0$$

i.e.

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)=0 \tag{5.p}$$

簡単化のため、

$$\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}=X_r \quad , \quad \frac{1}{x_r^2+y_r^2}=I_r$$

と略記すれば(5.p)は

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-X_r z+I_r z^2\right)=\left(1-X_1 z+I_1 z^2\right)\left(1-X_2 z+I_2 z^2\right)\left(1-X_3 z+I_3 z^2\right)\cdots \tag{5.p'}$$

(5.s) と (5.p') を比べて、(5.s) の係数を計算すると、

$$a_1=-X_1-X_2-X_3-\cdots=-\sum_{r_1=1}^{\infty}X_{r_1}$$

$$a_2=X_1\left(X_2+X_3+X_4+\cdots\right)+X_2\left(X_3+X_4+X_5+\cdots\right)+X_3\left(X_4+X_5+X_6+\cdots\right)+\cdots+I_1+I_2+I_3+\cdots$$

$$=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}X_{r_1}X_{r_2}+\sum_{r_1=1}^{\infty}I_{r_1}$$

$$a_3=-X_1X_2\left(X_3+X_4+X_5+\cdots\right)-X_1X_3\left(X_4+X_5+X_6+\cdots\right)-X_1X_4\left(X_5+X_6+X_4+\cdots\right)-\cdots$$

$$-X_2X_3\left(X_4+X_5+X_6+\cdots\right)-X_2X_4\left(X_5+X_6+X_4+\cdots\right)-X_2X_5\left(X_6+X_7+X_8+\cdots\right)-\cdots$$

$$\vdots$$

$$-X_1\left(I_2+I_3+I_4+\cdots\right)-X_2\left(I_3+I_4+I_5+\cdots\right)-X_3\left(I_4+I_5+I_6+\cdots\right)-\cdots$$

$$-I_1\left(X_2+X_3+X_4+\cdots\right)-I_2\left(X_3+X_4+X_5+\cdots\right)-I_3\left(X_4+X_5+X_6+\cdots\right)-\cdots$$

$$=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}X_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(X_{r_1}I_{r_2}+I_{r_1}X_{r_2}\right)$$

$$a_4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}X_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}X_{r_4}$$

$$+X_1X_2\left(I_3+I_4+I_5+\cdots\right)+X_1X_3\left(I_4+I_5+I_6+\cdots\right)+X_1X_4\left(I_5+I_6+I_4+\cdots\right)+\cdots$$

$$+X_2X_3\left(I_4+I_5+I_6+\cdots\right)+X_2X_4\left(I_5+I_6+I_4+\cdots\right)+X_2X_5\left(I_6+I_7+I_8+\cdots\right)+\cdots$$

$$\vdots$$

$$+X_1I_2(X_3+X_4+X_5+\cdots)+X_1I_3(X_4+X_5+X_6+\cdots)+X_1I_4(X_5+X_6+X_4+\cdots)+\cdots$$

$$+X_2I_3(X_4+X_5+X_6+\cdots)+X_2I_4(X_5+X_6+X_4+\cdots)+X_2I_5(X_6+X_7+X_8+\cdots)+\cdots$$

$$\vdots$$

$$+I_1X_2(X_3+X_4+X_5+\cdots)+I_1X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots)+I_1X_4(X_5+X_6+X_4+\cdots)+\cdots$$

$$+I_2X_3(X_4+X_5+X_6+\cdots)+I_2X_4(X_5+X_6+X_4+\cdots)+I_2X_5(X_6+X_7+X_8+\cdots)+\cdots$$

$$\vdots$$

$$+I_1(I_2+I_3+I_4+\cdots)+I_2(I_3+I_4+I_5+\cdots)+I_3(I_4+I_5+I_6+\cdots)+\cdots$$

$$=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}X_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}X_{r_4}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\left(X_{r_1}X_{r_2}I_{r_3}+X_{r_1}I_{r_2}X_{r_3}+I_{r_1}X_{r_2}X_{r_3}\right)+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}I_{r_1}I_{r_2}$$

記号を元に戻して $a_1 \sim a_4$ を得る。そして帰納法により a_{2n-1} , a_{2n} を得る。

例 $z_r = r^2 \pm ir$ ($r=1,2,3,\cdots$) とするとき

$$f_p(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2z}{r^2+1}+\frac{z^2}{r^4+r^2}\right)$$

これを数式処理ソフト *Mathematica* で z^3 までマクローリン展開すれば、

$$\mathtt{fp[z\_,\,m\_]} := \prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{2z}{r^2+1}+\frac{z^2}{r^4+r^2}\right)$$

```
N[Series[fp[z, 10000], {z, 0, 3}]]
```

$$1. - 2.1535\,(z+0.) + 2.27261\,(z+0.)^2 - 1.40118\,(z+0.)^3 + O[z+0.]^4$$

他方、上記公式により a_1 , a_2 , a_3 を計算すれば次のとおり。各係数はほぼ一致している。

$$\mathtt{a_1[m\_]} := -\sum_{r_1=1}^{m}\frac{2\,r_1^2}{r_1^4+r_1^2} \qquad \mathtt{a_2[m\_]} := \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{2^2\,r_1^2\,r_2^2}{(r_1^4+r_1^2)\,(r_2^4+r_2^2)}+\sum_{r_1=1}^{m}\frac{2^0}{r_1^4+r_1^2}$$

$$\mathtt{a_3[m\_]} := -\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\frac{2^3\,r_1^2\,r_2^2\,r_3^2}{(r_1^4+r_1^2)\,(r_2^4+r_2^2)\,(r_3^4+r_3^2)}-\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{2^1\,(r_1^2+r_2^2)}{(r_1^4+r_1^2)\,(r_2^4+r_2^2)}$$

`N[a1[1000]]`	`N[a2[1500]]`	`N[a3[2000]]`
-2.15135	2.27017	-1.39936

系 3·5·1 (共役虚根を持つ無限次方程式)

無限次方程式

$$1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots = 0$$

がその根 $z_k = \pm iy_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) で完全に因数分解されるとき、

$$a_{2r-1} = 0 \qquad (r=1,2,3,\cdots)$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{y_{r_1}^2}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2}$$

$$a_6 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2 y_{r_3}^2}$$

$$a_8 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2 y_{r_3}^2 y_{r_4}^2}$$

$$\vdots$$

例　全虚整数を根とする無限次方程式

$$1 + \frac{\pi^2}{3!} z^2 + \frac{\pi^4}{5!} z^4 + \frac{\pi^6}{7!} z^6 + \cdots = 0$$

この左辺は次のように因数分解される。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!} z^{2r} = \frac{\sinh \pi z}{\pi z} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{ir}\right)\left(1-\frac{z}{ir}\right)$$

根は $z_r = \pm ir \quad (r=1,2,3,\cdots)$ であるから、系により

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{r_1^2} = \frac{\pi^2}{3!}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\pi^4}{5!}$$

$$a_6 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{r_1^2 r_2^2 r_3^2} = \frac{\pi^6}{7!}$$

$$\vdots$$

これらは 公式 3･2･2 (2.1) に一致する。

Note

　共役虚数のみを根とする無限次方程式は偶数冪のみから構成される正項級数である。この逆は成り立たない。即ち、偶数冪のみの正項級数が零点を持つ場合、その実数部は0とは限らない。例えば、無限次方程式

$$1 + \left(1+\frac{\pi^2}{3!}\right) z^2 + \left(\frac{\pi^0}{1!}+\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}\right) z^4 + \left(\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^6}{7!}\right) z^6 + \cdots = 0$$

は根 $z_r = \pm ir \quad r=1,2,3,\cdots$ を持つが、これらの他に根 $z_s = \pm\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad s=1,2,3,4$ も持つ。

実は、この左辺は次のようにして作られたものである。

$$\left(1+z^2+z^4\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!} z^{2r} = 1 + \left(1+\frac{\pi^2}{3!}\right) z^2$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!} + \frac{\pi^{2r+2}}{(2r+3)!} + \frac{\pi^{2r+4}}{(2r+5)!} \right\} z^{2r+4}$$

共役実根を持つ無限次方程式

系 3･5･1 と似ているが、全く異なる次の公式が成り立つ。

公式 3･5･2

無限次方程式

$$1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots=0$$

がその根 $z_k=\pm x_k$, $x_k\neq 0$ $(k=1,2,3,\cdots)$ で完全に因数分解されるとき、

$$a_{2r-1}=0 \quad (r=1,2,3,\cdots)$$

$$a_2=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2}$$

$$a_4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2x_{r_2}^2}$$

$$a_6=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2x_{r_2}^2x_{r_3}^2}$$

$$a_8=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2x_{r_2}^2x_{r_3}^2x_{r_4}^2}$$

$$\vdots$$

証明

$$1+c_1z^1+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\cdots=0 \tag{2.s}$$

この根を $z_k=\pm ix_k$, $k_k\neq 0$ $(k=1,2,3,\cdots)$ とすれば、

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{x_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r}\right)=0$$

i.e.

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{x_r^2}\right)=0$$

これは 定理 3･2･1 (2.s) において z/z_r を z^2/x_r^2 に置換したものである。

先ず、(2.s) において z を z^2 に置換して

$$1+c_1z^2+c_2z^4+c_3z^6+c_4z^8+\cdots=0$$

そして $c_1,c_2,c_3,\cdots$ において z_r を x_r^2 に置換して

$$c_1=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2}$$

$$c_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2x_{r_2}^2}$$

$$c_3=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{x_{r_1}^2x_{r_2}^2y_{r_3}^2}$$

$$c_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{x_{r_1}^2 x_{r_2}^2 x_{r_3}^2 x_{r_4}^2}$$

$$\vdots$$

c_r を a_{2r} に置換し、奇数項 $a_{2r-1}z^{2r-1}$ $(a_{2r-1}=0)$ を補って与式を得る。

例　全奇数を根とする無限次方程式

$$1 - \frac{\pi^2}{4!!}z^2 + \frac{\pi^4}{8!!}z^4 - \frac{\pi^6}{12!!}z^6 + - \cdots = 0$$

この左辺は次のように因数分解される。

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(4r)!!} z^{2r} = \cos\frac{\pi z}{2} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{2r-1}\right)\left(1-\frac{z}{2r-1}\right)$$

根は $z_r = \pm(2r-1)$　$(r=1,2,3,\cdots)$ であるから、公式により

$$a_2 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{x_{r_1}^2} = -\frac{\pi^2}{4!!}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \frac{1}{x_{r_1}^2 x_{r_2}^2} = \frac{\pi^4}{8!!}$$

$$a_6 = -\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \frac{1}{x_{r_1}^2 x_{r_2}^2 x_{r_3}^2} = -\frac{\pi^6}{12!!}$$

$$\vdots$$

これらは 公式 3･2･2 (2.2) に一致する。

Note

虚数部が0の共役実数のみを根とする無限次方程式は偶数冪のみから構成される交代級数である。この逆は成り立たない。即ち、偶数冪のみの交代級数が零点を持つ場合、その虚数部は0とは限らない。例えば、無限次方程式

$$1 - \left(1+\frac{\pi^2}{4!!}\right)z^2 + \left(\frac{\pi^0}{0!!}+\frac{\pi^2}{4!!}+\frac{\pi^4}{8!!}\right)z^4 - \left(\frac{\pi^2}{4!!}+\frac{\pi^4}{8!!}+\frac{\pi^6}{12!!}\right)z^6 + - \cdots = 0$$

は根 $z_r = \pm(2r-1)$　$r=1,2,3,\cdots$ を持つが、これらの他に根 $z_s = \pm\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$　$s=1\sim4$ も持つ。

実は、この左辺は次のようにして作られたものである。

$$\left(1-z^2+z^4\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(4r)!!} z^{2r} = 1 - \left(1+\frac{\pi^2}{4!!}\right)z^2$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ \frac{\pi^{2r}}{(4r)!!} + \frac{\pi^{2r+2}}{(4r+4)!!} + \frac{\pi^{2r+4}}{(4r+8)!!} \right\} z^{2r+4}$$

3・6 根と係数の関係(その4)

本節では、完全には因数分解されない実係数の無限次方程式について、根と係数の関係を考察する。

公式 3・6・1 (共役複素根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k = x_k \pm iy_k \ , \ y_k \neq 0 \quad (k=1,2,3,\cdots)$ を持ち、次のように不完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}}$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+c_1 z^1+c_2 z^2+c_3 z^3+c_4 z^4+\cdots \tag{6.s}$$

$$c_r = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{a_{r-s}a_1^s}{s\,!}$$

但し、

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$\begin{aligned}a_4 =& \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}\\ &+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}\\ &+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}a_{2n-1} =& -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}\\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)}\\ &\ \vdots\\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_n}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}\end{aligned}$$

$$a_{2n}=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

特に $c_1 \sim c_4$ は次のような より高速な式で表される。

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^4+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{2x_{r_2}}{x_{r_2}^2+y_{r_2}^2}\right)^2$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

証明

関数 $f(z)$ を次のように分割する。

$$f(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}}$$

$$= \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}} \equiv f_1(z)f_2(z)$$

すると $f_1(z)$ と $f_2(z)$ はそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

$$f_1(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right) = 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$$

$$f_2(z) = e^{z\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}} = 1+b_1z^1+b_2z^2+b_3z^3+b_4z^4+\cdots$$

ここで $f_1(z)$ の係数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ は 公式 3･5･1 により、但し書のようになる。

また、 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ のコーシー積を取ることにより、c_r を得る。(公式3･3･1 の証明 参照。)

特に、

$$c_1=\frac{a_1a_1^0}{0!}-\frac{a_0a_1^1}{1!}=a_1-a_1=0$$

$$c_2=\frac{a_2a_1^0}{0!}-\frac{a_1a_1^1}{1!}+\frac{a_0a_1^2}{2!}=a_2-\frac{a_1^2}{2}$$

$$=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2-2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

次に、

$$c_3=\frac{a_3a_1^0}{0!}-\frac{a_2a_1^1}{1!}+\frac{a_1a_1^2}{2!}-\frac{a_0a_1^3}{3!}=a_3-a_2a_1+\frac{a_1^3}{3}$$

$$=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3$$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3-3\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right.$$

$$\left.+3\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}\right\}$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

ここで、公式 1･3･1 (01 無限級数の累乗) によれば

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^3=\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^3}+3\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}-3\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}$$

であったから、これに $\frac{1}{z_r}=\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}$ を代入し、さらにそれを上の青字の部分に適用すれば、

$$c_3=-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

最後に、

$$c_4=\frac{a_4a_1^0}{0!}-\frac{a_3a_1^1}{1!}+\frac{a_2a_1^2}{2!}-\frac{a_1a_1^3}{3!}+\frac{a_0a_1^4}{4!}=a_4-a_3a_1+\frac{a_2a_1^2}{2}-\frac{a_1^4}{8}$$

$$=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right\}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{8}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^4$$

$$=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)}$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{8}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^4$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

ここで、公式 1･3･1（01 無限級数の累乗）によれば

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^4}-2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^2 z_{r_2}^2}+4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}}\right)\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^2$$

$$-8\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}$$

$$+8\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}z_{r_4}}$$

であったから、これに $\dfrac{1}{z_r}=\dfrac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}$ を代入してさらにそれを上の青字の部分に適用すれば、

$$c_4=-\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^4+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{2x_{r_2}}{x_{r_2}^2+y_{r_2}^2}\right)^2$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

例　$z_r=r\pm ir\ \ (r=1,2,3,\cdots)$ とするとき

$$f_p(z)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}}=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r}+\frac{z^2}{2r^2}\right)e^{\frac{z}{r}}$$

これを数式処理ソフト *Mathematica* で z^4 までマクローリン展開すれば、

$$\mathrm{fp}[z\_,m\_]:=\prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{z}{r}+\frac{z^2}{2r^2}\right)e^{\frac{z}{r}}$$

```
N[Series[fp[z, 1000], {z, 0, 4}]]
```

$$1.+0.200343(z+0.)^3+0.13529(z+0.)^4+O[z+0.]^5$$

他方、上記公式により $c_1\sim c_4$ を計算すると次のとおり。これらは級数の係数とぴったり一致している。

$$a_0[m\_]:=1\qquad a_1[m\_]:=-\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1}\qquad a_2[m\_]:=\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{r_1 r_2}+\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1^2}$$

$$a_3[m\_]:=-\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\frac{1}{r_1 r_2 r_3}-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{r_1+r_2}{r_1^2 r_2^2}$$

$$a_4[m\_]:=\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\sum_{r_4=r_3+1}^{m}\frac{1}{r_1 r_2 r_3 r_4}+\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\frac{r_1 r_2+r_1 r_3+r_2 r_3}{r_1^2 r_2^2 r_3^2}+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{r_1^2 r_2^2}$$

$$c_{r\_}[m\_] := \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{a_{r-s}[m]\, a_1[m]^s}{s!}$$

```
N[{c1[100], c2[100], c3[600], c4[100]}]
 {0.   ,   0.   ,   0.200343, 0.13529}
```

特に $c_1 \sim c_4$ は次のような より高速な式で表される。

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^2} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{2r_1^2} = 0$$

$$c3[m\_] := -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1{}^3} - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{r_1+r_2}{r_1{}^2\, r_2{}^2} + \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1} \times \sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1{}^2}$$

$$c4[m\_] := -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1{}^4} + \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{1}{r_1{}^2\, r_2{}^2} + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1{}^2}\left(\sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1{}^2\, r_2{}^2\, r_3{}^2} - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\frac{r_1+r_2}{r_1{}^2\, r_2{}^2} \times \sum_{r_1=1}^{m}\frac{1}{r_1}$$

これらにより c_3, c_4 を計算するとつぎのとおり。これらは上の級数の係数と正確に一致している。

```
N[{c3[600], c4[50]}]
 {0.200343, 0.13529}
```

この公式の特殊ケースとして、次の系が得られる。

系 3･6･1 (実数部が 1/2 の根を持つ無限次方程式)

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k = 1/2 \pm i y_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) を持ち、次のように不完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+c_1 z^1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots \qquad (6.s')$$

$$c_r = \sum_{s=0}^{r}(-1)^s \frac{a_{r-s}\, a_1^s}{s!}$$

但し、

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$\vdots$$

特に $c_1 \sim c_4$ は次のような より高速な式で表される。

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2$$

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^4 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3 - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{1}{1/4+y_{r_2}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

証明

公式 3･6･1 に $x_r = 1/2 \quad r = 1, 2, 3, \cdots$ を代入して $a_1, a_2, a_3 \cdots$ 及び c_2 を得る。

c_3 は

$$c_3 = -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3 - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)} + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2$$

c_4 は

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^4 + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{1}{1/4+y_{r_2}^2}\right)^2$$

$$-\left\{\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{3}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^4 + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{1}{1/4+y_{r_2}^2}\right)^2$$

$$+3\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)(1/4+y_{r_3}^2)}$$

$$-3\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)} + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)} - \frac{1}{2}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)}$$

公式 1･3･1（01 無限級数の累乗）によれば

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\right)^3 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}^3} + 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}} - 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{z_{r_1}z_{r_2}z_{r_3}}$$

であったから、これに $\dfrac{1}{z_r}=\dfrac{1}{1/4+y_r^2}$ を代入し、さらにそれを上の青字の部分に適用すれば、

$$c_4 = -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^4 + \frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{1}{1/4+y_{r_2}^2}\right)^2$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2 - 2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)}\right\}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$= -\frac{1}{8}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^4 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^3 - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2\left(\frac{1}{1/4+y_{r_2}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{(1/4+y_{r_1}^2)(1/4+y_{r_2}^2)}$$

例　$z_r = 1/2 \pm ir \quad (r=1,2,3,\cdots)$ とするとき

$$f_p(z) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+r^2}+\frac{z^2}{1/4+r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+r^2}}$$

これを数式処理ソフト *Mathematica* で z^4 までマクローリン展開すれば、

$$\mathrm{fp}[z\_, m\_] := \prod_{r=1}^{m}\left(1-\frac{z}{1/4+r^2}+\frac{z^2}{1/4+r^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+r^2}}$$

```
N[Series[fp[z, 1000], {z, 0, 4}]]
```

$$1. + 1.0672\,(z+0.)^2 + 0.538818\,(z+0.)^3 + 0.635695\,(z+0.)^4 + O[z+0.]^5$$

他方、上記公式により $c_1 \sim c_4$ を計算すると次のとおり。c_1, c_2, c_3 について両者の係数はぴったり一致しており、c_4 について両者の係数はほぼ等しい。

$$a_0[m\_] := 1 \qquad a_1[m\_] := -\sum_{r_1=1}^{m} \frac{1}{1/4+r_1^2} \qquad a_2[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \frac{1}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)} + \sum_{r_1=1}^{m} \frac{1}{1/4+r_1^2}$$

$$a_3[m\_] := -\sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \sum_{r_3=r_2+1}^{m} \frac{1}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)(1/4+r_3^2)} - \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \frac{2}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)}$$

$$a_4[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \sum_{r_3=r_2+1}^{m} \sum_{r_4=r_3+1}^{m} \frac{1}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)(1/4+r_3^2)(1/4+r_4^2)}$$
$$+ \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \sum_{r_3=r_2+1}^{m} \frac{3}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)(1/4+r_3^2)} + \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \frac{1}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)}$$

$$c_{r\_}[m\_] := \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{a_{r-s}[m]\, a_1[m]^s}{s!}$$

N[{c_1[200] , c_2[1000] , c_3[200] , c_4[200]}]

{0. , 1.0672 , 0.538818, 0.631447}

特に $c_1 \sim c_4$ は次のような より高速な式で表される。

$c_1 = 0$

$$c2[m\_] := -\frac{1}{2} \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{m} \frac{1}{1/4+r_1^2}$$

$$c3[m\_] := -\frac{1}{3} \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^2$$

$$c4[m\_] := -\frac{1}{8} \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^4 + \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{m} \frac{1}{1/4+r_1^2}$$
$$+ \frac{1}{4} \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \left(\frac{1}{1/4+r_1^2}\right)^2 \left(\frac{1}{1/4+r_2^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \frac{1}{(1/4+r_1^2)(1/4+r_2^2)}$$

これらにより c_2, c_3, c_4 を計算するとつぎのとおり。これらは上の級数の係数と正確に一致している。

N[{c2[1000] , c3[200] , c4[1000]}]

{1.0672, 0.538818, 0.635695}

2017.10.20
2017.10.29 第6節追加

Kano Kono

宇宙人の数学