4 リーマン仮説と同値な級数の和

前章「 03 無限次方程式における根と係数 」の応用例として、本章ではリーマン仮説と同値な級数の和を取り上げる。そのような級数とその和は、関数 $-z\zeta(1-z)$ のマクローリン級数における根と係数の関係から得られる。なお、この関数は完備化されたリーマン・ゼータの一部である。

4·1 $-z\zeta(1-z)$ の因数分解

本節では先ず、$-z\zeta(1-z)$ を0 の周りで因数分解する。

公式 4·1·1 (0の周りの因数分解)

γ をオイラー・マスケロ二の定数、$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数、その非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}} e^{\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right) e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

証明

完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

z を $1-z$ に置換すると

$$\xi(1-z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) \tag{wL}$$

リーマン・ゼータ関数編「 08 完備化されたリーマン・ゼータの因数分解 」公式 8·1·1 によれば $\xi(z)$ は次のようなアダマール積で表された。

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

関数等式 $\xi(z)=\xi(1-z)$ が成立するから

$$\xi(1-z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{wR}$$

(wL) と (wR) より

$$-z(1-z)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

これより

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1-z}{2}}}{\frac{1-z}{2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

ここで

$$\frac{1}{2}\pi^{\frac{1-z}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\pi^{-\frac{z}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-z\log\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1-z}{2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1-z}{2}\right) = \Gamma\{(3-z)/2\}$$

これらを上に代入して

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}}e^{\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}} \tag{1.0}$$

非自明な零点を $z_k = x_k \pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とすれば、

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}}e^{\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}} \tag{1.1}$$

もし、$x_n = 1/2 \quad n=1,2,3,\cdots$ 、ならば

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}}e^{\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_n^2}+\frac{z^2}{1/4+y_n^2}\right)e^{\frac{z}{1/4+y_n^2}} \tag{1.1'}$$

自明な零点

$\zeta(1-z)$ の自明な零点 $z=3,5,7,\cdots$ は $\dfrac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}$ 中に含まれる。

何故ならば、アラカルト編「 11 ガンマ関数の逆数の級数展開 」の 公式 11・1・1 (1.3+) は次のようであった。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n-1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1-z)/2\}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z} \tag{1.3+}$$

左辺は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n-1}} = (1-z)e^{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n+1}\right)e^{\frac{z}{2n+1}}$$

であるから、(1.3+) の両辺を $(1-z)e^{z}$ で除せば

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n+1}\right)e^{\frac{z}{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{(1-z)\Gamma\{(1-z)/2\}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-1\right)z}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}/2}{(1-z)/2\Gamma\{(1-z)/2\}}e^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\log 2-1\right)z}\cdot e^{\gamma z}$$

これより

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}}e^{\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} = e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n+1}\right)e^{\frac{z}{2n+1}}$$

指数関数 $e^{\pm z}$ は零点を持たないから、この式は $z=3,5,7,\cdots$ が $\dfrac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}$ の零点であることを示している。

4·2 スチルチェス定数によるマクローリン展開

公式 4·2·1

$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数とするとき、全複素平面上で次式が成立する。

$$-z\zeta(1-z) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\gamma_{s-1}}{s!} z^s \tag{2.1}$$

但し γ_s は次式で定義されるスチルチェス定数である。

$$\gamma_s = \lim_{n\to\infty}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\log k)^s}{k} - \frac{(\log n)^{s+1}}{s+1} \right\}$$

導出

$z=1$ を除く全複素平面上で次式が成立することが知られている。。

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!}\gamma_s (z-1)^s \qquad \gamma_s : \textit{Stieltjes constant}$$

両辺に $z-1$ を乗ずれば

$$(z-1)\zeta(z) = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!}\gamma_s (z-1)^{s+1} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1}\frac{s\gamma_{s-1}}{s!}(z-1)^s$$

z を $1-z$ に置換すれば

$$(1-z-1)\zeta(1-z) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1}\frac{s\gamma_{s-1}}{s!}(1-z-1)^s$$

$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{2s-1}\frac{s\gamma_{s-1}}{s!} z^s$$

i.e.

$$-z\zeta(1-z) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s\gamma_{s-1}}{s!} z^s$$

Note

関数 $-z\zeta(1-z)$ は複素平面上に特異点を持たない。従って、(2.1) の収束半径は無限大である。

4･3 アダマール積によるマクローリン展開

第1節で見たように、$\zeta(z)$ の非自明な零点を $z_k = x_k \pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ とするとき、関数 $-z\zeta(1-z)$ は次のように因数分解された。

$$-z\zeta(1-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}} e^{\left(log2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}} \tag{1.1}$$

これを構成する各関数はそれぞれ次のようにマクローリン展開される。

ガンマ関数の逆数のマクローリン展開

アラカルト編「 12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」公式 12･3･3 によれば、$\psi_s(z)$ をポリガンマ関数とし $B_{s,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、(1.1) のガンマ関数（逆数）は次のようにマクローリン展開された。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{\beta_s}{(2s)!!}z^s \tag{3.g}$$

$$= 1 + \frac{z}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{z^2}{4!!}\left\{\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$+ \frac{z^3}{6!!}\left\{\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right) - 3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\right\} + \cdots$$

但し

$$\beta_s = \sum_{k=1}^{s}(-1)^k B_{s,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{s-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad s=1,2,3,\cdots$$

指数関数のマクローリン展開

(1.1) の指数関数は次のようにマクローリン展開される。

$$e^{\left(log2-1-\frac{\gamma}{2}\right)z} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{s!}\left(log2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^s \tag{3.e}$$

$$= 1 + \frac{z^1}{1!}\left(log2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^1 + \frac{z^2}{2!}\left(log2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{z^3}{3!}\left(log2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^3 + \cdots$$

非自明な零点のマクローリン展開

無限次方程式編「 03 無限次方程式における根と係数 」公式 3･6･1 によると、(1.1) の非自明な零点は次のようにマクローリン展開される。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}} = 1 - 0z - \left\{\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2 - \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right\}z^2$$

$$-\left\{\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3 - \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1(x_{r_1}+x_{r_2})}{(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2)(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2)}\right\}z^3$$

$$- \cdots \tag{3.z}$$

$-z\zeta(1-z)$ の マクローリン級数

$-z\zeta(1-z)$ のマクローリン級数は (3.g), (3.e), (3.z) の積から成る。即ち、

$$-z\zeta(1-z) = \left(1+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{\beta_s}{(2s)!!}z^s\right)\times\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{s\,!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^s$$
$$\times\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)e^{\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}}$$

無限次方程式編「 01 無限級数の累乗 」公式 1･1･2 によると、(1.1) の3つの級数の積は次式で示される。(但し、$a_0=b_0=c_0=1$)

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}a_{r-s}b_{s-t}c_t\,z^r$$
$$= 1+z^1(a_1+b_1+c_1)$$
$$+z^2(a_2+b_2+c_2+a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)$$
$$+z^3(a_3+b_3+c_3+a_2b_1+a_2c_1+b_2c_1+b_2a_1+c_2a_1+c_2b_1+a_1b_1c_1)$$
$$+$$
$$\vdots$$

そこで

$$a_1=\frac{1}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\quad,\ a_2=\frac{1}{4!!}\left\{\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$,\ a_3=\frac{1}{6!!}\left\{\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)-3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$b_1=\frac{1}{1!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^1,\ b_2=\frac{1}{2!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2,\ b_3=\frac{1}{3!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^3$$

$$c_1=0\ ,\quad c_2=-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\quad,$$

$$c_3=-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1(x_{r_1}+x_{r_2})}{(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2)(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2)}$$

と置けば、

$$-z\zeta(1-z) = 1+z^1(a_1+b_1+c_1)$$
$$+z^2(a_2+b_2+c_2+a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)$$
$$+z^3(a_3+b_3+c_3+a_2b_1+a_2c_1+b_2c_1+b_2a_1+c_2a_1+c_2b_1+a_1b_1c_1)$$
$$+$$
$$\vdots$$

$c_1=0$ であるから、

$$-z\zeta(1-z) = 1 + z^1(a_1+b_1)$$
$$+ z^2(a_2+b_2+c_2+a_1b_1)$$
$$+ z^3(a_3+b_3+c_3+a_2b_1+b_2a_1+c_2a_1+c_2b_1)$$
$$+$$
$$\vdots \tag{3.0}$$

1次、2次、3次の係数

公式 4･2･1 と (3.0) を比較することにより、次の公式を得る。

公式 4･3･1

γ をオイラー･マスケロ二の定数、γ_k をスチルチェス定数、$\psi_s(z)$ をポリガンマ関数、リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成り立つ。

$$-\gamma_0 = \frac{1}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) + \log 2 - 1 - \frac{\gamma}{2} \tag{3.1$_1$}$$

$$-\gamma_1 = \frac{\gamma_0^2}{2} - \frac{1}{4!!}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \tag{3.1$_2$}$$

$$-\frac{\gamma_2}{2} = \frac{\gamma_0^3}{3} + \gamma_0\gamma_1 + \frac{1}{6!!}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1(x_{r_1}+x_{r_2})}{(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2)(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2)} \tag{3.1$_3$}$$

証明

公式 4･2･1 より

$$-z\zeta(1-z) = 1 - \frac{\gamma_0}{0!}z^1 - \frac{\gamma_1}{1!}z^2 - \frac{\gamma_2}{2!}z^3 - \frac{\gamma_3}{3!}z^4 - \cdots$$

この係数を (3.0) の係数と比較すれば

$$-\gamma_0 = a_1+b_1 \tag{1}$$

$$-\gamma_1 = a_2+b_2+a_1b_1 + c_2 \tag{2}$$

$$-\frac{\gamma_2}{2} = a_3+b_3+a_2b_1+b_2a_1+c_2(a_1+b_1) + c_3 \tag{3w}$$

(2) より

$$c_2 = -\gamma_1 - (a_2+b_2) - a_1b_1$$

これと (1) を (3w) に代入すれば

$$-\frac{\gamma_2}{2} = a_3+b_3+a_2b_1+b_2a_1+\{-\gamma_1 - (a_2+b_2) - a_1b_1\}(-\gamma_0) + c_3$$

i.e.

$$-\frac{\gamma_2}{2}=a_3+b_3+a_2b_1+b_2a_1+\gamma_0\gamma_1+\gamma_0(a_2+b_2)+\gamma_0\,a_1b_1+c_3 \tag{3}$$

上記 $a_1 \sim c_3$ を (1), (2), (3) にそれぞれ代入すれば

1次の係数

$$-\gamma_0=a_1+b_1=\frac{1}{2^1 1!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\log 2-1-\frac{\gamma}{2}$$

i.e.

$$-\gamma_0=\frac{1}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\log 2-1-\frac{\gamma}{2} \tag{3.1$_1$}$$

2次の係数

$$-\gamma_1=a_2+b_2+c_2+a_1b_1$$

$$=\frac{1}{4!!}\left\{\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right\}+\frac{1}{2!}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$+\frac{1}{2!!}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^1$$

i.e.

$$-\gamma_1=\frac{1}{4!!}\left\{\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right\}+\frac{1}{2}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

ここで、(1) より

$$\log 2-1-\frac{\gamma}{2}=-\gamma_0-\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \tag{3.1$_1$'}$$

これを右辺の2項と3項に用いれば

$$\frac{1}{2}\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\left(\log 2-1-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\gamma_0+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^2-\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\left\{\gamma_0+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\gamma_0^2}{2}-\frac{1}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)$$

これを上の右辺に代入して

$$-\gamma_1=\frac{1}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\gamma_0^2}{2}-\frac{1}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$=\frac{\gamma_0^2}{2}-\frac{1}{4!!}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r1}^2+y_{r1}^2} \tag{3.1$_2$}$$

3次の係数

$$-\frac{\gamma_2}{2}=a_3+b_3+a_2b_1+b_2a_1+\gamma_0\gamma_1+\gamma_0(a_2+b_2)+\gamma_0 a_1b_1+c_3 \tag{3}$$

上記 $a_1 \sim c_3$ をこれにそれぞれ代入すれば

$$\begin{aligned}-\frac{\gamma_2}{2}=&\frac{1}{3!}\left(log\,2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\gamma_0\right\}\left(log\,2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2\\&+\left\{\frac{1}{4!!}\left(\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{\gamma_0}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\left(log\,2-1-\frac{\gamma}{2}\right)\\&+\frac{1}{6!!}\left\{\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)-3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\\&+\frac{\gamma_0}{4!!}\left\{\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right\}+\gamma_0\gamma_1\\&-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1(x_{r1}+x_{r2})}{(x_{r1}^2+y_{r1}^2)(x_{r2}^2+y_{r2}^2)}\end{aligned}$$

ここで (3.1$_1$') を右辺の1項～3項に用いれば

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3!}\left(log\,2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\gamma_0\right\}\left(log\,2-1-\frac{\gamma}{2}\right)^2\\&\quad+\left\{\frac{1}{4!!}\left(\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{\gamma_0}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\left(log\,2-1-\frac{\gamma}{2}\right)\\&=-\frac{1}{3!}\left\{\gamma_0+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^3+\frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\gamma_0\right\}\left\{\gamma_0+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^2\\&\quad-\left\{\frac{1}{4!!}\left(\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{\gamma_0}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\left\{\gamma_0+\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\gamma_0^3+\frac{\gamma_0^2}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\gamma_0}{4}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{24}\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)\\&\quad-\frac{\gamma_0}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\gamma_0}{8}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{16}\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{16}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\\&\quad-\frac{\gamma_0^2}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\gamma_0}{4}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{\gamma_0^3}{3}-\frac{\gamma_0}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{48}\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\gamma_0}{8}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{16}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

これを上の右辺に代入して

$$-\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\gamma_0^3}{3}-\frac{\gamma_0}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{48}\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{\gamma_0}{8}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{16}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{48}\psi_0^3\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{16}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{48}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$+\frac{\gamma_0}{8}\psi_0^2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\gamma_0}{8}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\gamma_0\gamma_1$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r1}+x_{r2}\right)}{\left(x_{r1}^2+y_{r1}^2\right)\left(x_{r2}^2+y_{r2}^2\right)}$$

$$=\frac{\gamma_0^3}{3}+\gamma_0\gamma_1+\frac{1}{6!!}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r1}+x_{r2}\right)}{\left(x_{r1}^2+y_{r1}^2\right)\left(x_{r2}^2+y_{r2}^2\right)} \tag{3.1$_3$}$$

4･4 リーマン仮説と同値な命題

前節 公式 4･3･1 から、リーマン仮説と同値な次の命題が得られる。

命題 4･4･1

γ_k をスチルチェス定数、$\psi_s(z)$ をポリガンマ関数、リーマン･ゼータ関数の非自明な零点を $1/2+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = \gamma_0 - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_1$}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2 = \gamma_0^2 + 2\gamma_0 + 2\gamma_1 - \log\pi + \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_2$}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3 &= \gamma_0^3 + 3\gamma_0^2 + 6\gamma_0 + 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 - 3\log\pi \\ &\quad + 3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{16}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.1$_3$}$$

同値性の証明

リーマン･ゼータ関数編「 **08 完備化されたリーマン･ゼータの因数分解** 」定理 8･2･4 によれば、もしリーマン仮説が真ならば次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log\pi}{2} \tag{1.2'}$$

他方、前節 より

$$\log 2 - 1 - \frac{\gamma}{2} = -\gamma_0 - \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \tag{3.1$_1$'}$$

後者を前者の右辺に代入すれば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = \gamma_0 - \frac{\log\pi}{2} + \frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_1$}$$

次に、$x_{r_1} = 1/2$ を公式 4･3･1 (3.1$_2$) の右辺に代入すれば

$$-\gamma_1 = \frac{\gamma_0^2}{2} - \frac{1}{4!!}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

右辺末項に (1.2') を代入して整理すれば

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2 = \gamma_0^2 + 2\gamma_1 - \frac{1}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(1+\frac{\gamma}{2} - \log 2 - \frac{\log\pi}{2}\right)$$

右辺末項の一部に (3.1$_1$') を代入すれば

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}\right)^2 = \gamma_0^2 + 2\gamma_0 + 2\gamma_1 - \log\pi + \psi_0\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right) \tag{4.1$_2$}$$

次に、無限次方程式編「 **03 無限次方程式における根と係数** 」公式 3･6･1 及び 系 3･6･1 によると、もし $x_{r_1} = 1/2$ ならば

$$-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{2x_{r_1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}\cdot\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r1}^2+y_{r1}^2}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r1}^2+y_{r1}^2\right)\left(x_{r2}^2+y_{r2}^2\right)}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r1}^2}\right)^2$$

これを 公式 4•3•1 (3.1_3) の右辺に代入すると

$$-\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\gamma_0^3}{3}+\gamma_0\gamma_1+\frac{1}{6!!}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r1}^2}\right)^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r1}^2}\right)^2$$

さらに末項に (4.1_2) を代入すれば

$$-\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\gamma_0^3}{3}+\gamma_0\gamma_1+\frac{1}{6!!}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r1}^2}\right)^3$$
$$+\gamma_0^2+2\gamma_0+2\gamma_1-\log\pi+\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)$$

これより

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_{r1}^2}\right)^3=\gamma_0^3+3\gamma_0^2+6\gamma_0+6\gamma_1+3\gamma_0\gamma_1+\frac{3}{2}\gamma_2-3\log\pi$$
$$+3\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{16}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\qquad(4.1_3)$$

数値計算

臨界線上の零点 y_r を 30000 個を取り、数式処理ソフト *Mathematica* により $(4.1_1)\sim(4.1_3)$ を計算すると、それぞれ次のようになる。。

```
γs_ := StieltjesGamma[s]; ψk_[p_] := PolyGamma[k, p];  yn_ := Im[ZetaZero[n]]
```

1st degree

$$f1[m\_]:=\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{1/4+y_r^2}\qquad g1:=\gamma_0-\frac{1}{2}\mathrm{Log}[\pi]+\frac{1}{2}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]$$

```
N[f1[30000]]          N[g1]
0.0230381             0.0230957
```

$$\frac{0.023038125016396405`}{0.023095708966121044`}\times 100 = 99.7507$$

2nd degree

$$f2[m\_]:=\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2\qquad g2:=\gamma_0^2+2\gamma_0+2\gamma_1-\mathrm{Log}[\pi]+\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]-\frac{1}{4}\psi_1\left[\frac{3}{2}\right]$$

```
SetPrecision[f2[30000], 20]        SetPrecision[g2, 20]
0.000037100636410598344 98         0.00003710063643746 5
```

$$\frac{0.00003710063641059834498}{0.000037100636437465}\times 100 = 99.999999927585$$

3rd degree

$$f3[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{1}{1/4 + y_r^2} \right)^3$$

$$g3 := \gamma_0^3 + 3\gamma_0^2 + 6\gamma_0 + 6\gamma_1 + 3\gamma_0\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_2 - 3\,\mathrm{Log}[\pi] + 3\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] - \frac{3}{4}\psi_1\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{16}\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]$$

SetPrecision[f3[30000], 25]

$1.436778602886917509211370 \times 10^{-7}$

SetPrecision[g3, 25]

$1.4367786028869177 \times 10^{-7}$

$$\frac{1.436778602886917509211370 \times 10^{-7}}{1.4367786028869177 \times 10^{-7}} \times 100 = 99.999999999999983$$

リーマン仮説が成立する確率

上の計算結果を見ると、冪が大きくなるほど近似度が上がっていることが分る。特に３次の場合、臨界線上の最初の３万個の零点の絶対値の逆数の６乗の合計が理論値の 99.9999999999999% を占めている。このことは、リーマン仮説が成立する確率が少なくとも **99.9999999999999%**（**15** 桁）以上である ことを意味している。

この確率は次数と共に上昇し、また、零点の個数と共に上昇する。両者を勘案すれば、リーマン仮説が成立する確率は極めて **100%** に近い。

2018.06.16
2024.03.24 Updated numerical calculation.
2024.11.24 Updated numerical calculation.

河野 和
広島市

宇宙人の数学