05 冪級数と半多重級数

要　旨

無限級数の冪を研究中に、筆者はこれが冪級数と半多重級数から成る式で表現されることに気が付いた。この表現は一意ではなく、冪が大きくなるに連れて表現も多様化する。そんな中で、これらを統一的に表現できることを筆者は発見した。最初の 3 節ではそれを述べる。

最終節では、多大な時間を要する半多重級数の計算を冪級数から成る多項式で代替する高速計算法を提示する。

5･1 頭部･胴体･末尾

次の補題は、多項式と冪多項式の積が 頭部･胴体･末尾に 3 分割されることを示すものである。

補題 5･1･1

$n\,,m$ を自然数とし a_{r_1} を実数とするとき、次が成立する。

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=0}^{m} a_{r_1}^{n-1} = \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n} + \sum_{t=2}^{n-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n-t}\right)H_t(m) + (-1)^n nH_n(m) \qquad (1.1_n)$$

但し、

$$H_2(m) = \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}$$

$$H_3(m) = \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$\vdots$$

$$H_n(m) = \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}\cdots a_{r_n}$$

$n \le 2$ のとき (1.1_n) の第 2 項は無いものとする。

証明

冪多項式を次のように定義する。

$$G_n(m) = \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n}$$

これらの記号を用いると (1.1n) は次のように記述できる。

$$G_1(m)G_{n-1}(m) = G_n(m) + \sum_{t=2}^{n-1}(-1)^t G_{n-t}(m)\,H_t(m) + (-1)^n n\,H_n(m) \qquad (1.1_n')$$

我々は (1.1_n) の代わりに $(1.1_n')$ を証明すれば良い。

***n*=3** のとき、$G_1(3)G_2(3)$ を展開して整理すれば

$$G_1(3)G_2(3) = \left(a_1^3+a_2^3+a_3^3\right) + a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_1a_3^2+a_2^2a_3+a_1a_3^2+a_2a_3^2$$

ここで、

$$G_1(3)H_2(3) = a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_1a_3^2+a_2^2a_3+a_1a_3^2+a_2a_3^2 + 3a_1a_2a_3$$

であるから

$$a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_1a_3^2+a_2^2a_3+a_1a_3^2+a_2a_3^2 = G_1(3)H_2(3) - 3H_3(3)$$

これを$G_1(3)G_2(3)$の右辺に代入すると

$$G_1(3)G_2(3) = G_3(3) + G_1(3)H_2(3) - 3H_3(3) \qquad (1.1_3')$$

なお、この等式は任意の自然数mについて成り立つ。

n=4のとき、$G_1(4)G_3(4)$を展開して整理すれば

$$G_1(4)G_3(4) = \left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4\right) + a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 + \cdots + a_3 a_4^3$$

ここで、

$$G_2(4)H_2(4) = \left(a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 + \cdots + a_3 a_4^3\right) + a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3 + \cdots + a_2 a_3 a_4^2$$

そして

$$a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3 + \cdots + a_2 a_3 a_4^2 = G_1(4)H_3(4) - 4H_4(4)$$

であるから、この2式より

$$a_1^3 a_2 + a_1^3 a_3 + \cdots + a_3 a_4^3 = G_2(4)H_2(4) - G_1(4)H_3(4) + 4H_4(4)$$

これを$G_1(4)G_3(4)$の右辺に代入すると

$$G_1(4)G_3(4) = G_4(4) + G_2(4)H_2(4) - G_1(4)H_3(4) + 4H_4(4) \qquad (1.1_4')$$

なお、この等式は任意の自然数mについて成り立つ。

n=5のとき、$G_1(5)G_4(5)$を展開して整理すれば

$$G_1(5)G_4(5) = \left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + a_4^5\right) + a_1^4 a_2 + a_1 a_2^4 + \cdots + a_4 a_5^4$$

ここで、

$$G_3(5)H_2(5) = \left(a_1^4 a_2 + a_1 a_2^4 + \cdots + a_4 a_5^4\right) + a_1^3 a_2 a_3 + a_1 a_2^3 a_3 + \cdots + a_3 a_4 a_5^3$$

そして

$$a_1^3 a_2 a_3 + a_1 a_2^3 a_3 + \cdots + a_3 a_4 a_5^3 = G_2(5)H_3(5) - G_1(5)H_4(5) + 5H_5(5)$$

であるから

$$a_1^4 a_2 + a_1 a_2^4 + \cdots + a_4 a_5^4 = G_3(5)H_2(5) - G_2(5)H_3(5) + G_1(5)H_4(5) - 5H_5(5)$$

これを$G_1(5)G_4(5)$の右辺に代入すると

$$G_1(5)G_4(5) = G_5(5) + G_3(5)H_2(5) - G_2(5)H_3(5) + G_1(5)H_4(5) - 5H_5(5) \qquad (1.1_5')$$

以下、帰納法により、次式を得る。

$$G_1(m)G_{n-1}(m) = G_n(m) + \sum_{t=2}^{n-1} (-1)^t G_{n-t}(m)\, H_t(m) + (-1)^n n\, H_n(m) \qquad (1.1_n')$$

これを数式処理ソフト*Mathematica*で実行する。先ずは次のように関数を定義する。

$$\mathbf{Clear[G,\ H,\ a,\ r]}$$

$$\mathbf{G_{n\_}[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}{}^{n}}$$

$$\mathbf{H_2[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} a_{r_1}\, a_{r_2}}$$

$$\mathbf{H_3[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \sum_{r_3=r_2+1}^{m} a_{r_1}\, a_{r_2}\, a_{r_3}}$$

$\vdots$

$$H_9[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\sum_{r_4=r_3+1}^{m}\sum_{r_5=r_4+1}^{m}\sum_{r_6=r_5+1}^{m}\sum_{r_7=r_6+1}^{m}\sum_{r_8=r_7+1}^{m}\sum_{r_9=r_8+1}^{m} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6} a_{r_7} a_{r_8} a_{r_9}$$

すると、上段を入力して下段が出力される。

$$G_1[m]\, G_{n-1}[m] == G_n[m] + \sum_{t=2}^{n-1} (-1)^t G_{n-t}[m]\, H_t[m] + (-1)^n n H_n[m]$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{-1+n} == \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n} + \sum_{t=2}^{-1+n} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n-t}\right) H_t[m] + (-1)^n n H_n[m]$$

かくして (1.1_n) が得られた。　Q.E.D.

例　n=5

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{5-1} = \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{5} + \sum_{t=2}^{5-1} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{5-t}\right) H_t(m) + (-1)^5 5 H_5(m)$$

各 Σ を $G_n(m), H_n(m)$ で表し、数式処理ソフト *Mathematica* を用いて検証すると次のとおり。m=6 と m=4 が検証されているが、これらの等式は真であることが確認されている。

m=6 のとき

$$G_1[6]\, G_{5-1}[6] == G_5[6] + \sum_{t=2}^{5-1} (-1)^t G_{5-t}[6]\, H_t[6] + (-1)^5 5 H_5[6]$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 + a_6^4\right) ==$$
$$a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 + a_5^5 + a_6^5 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$$
$$(a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_5 + a_1 a_2 a_4 a_5 + a_1 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_6 + a_1 a_2 a_4 a_6 + a_1 a_3 a_4 a_6 +$$
$$a_2 a_3 a_4 a_6 + a_1 a_2 a_5 a_6 + a_1 a_3 a_5 a_6 + a_2 a_3 a_5 a_6 + a_1 a_4 a_5 a_6 + a_2 a_4 a_5 a_6 + a_3 a_4 a_5 a_6) -$$
$$5 (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4 a_6 + a_1 a_2 a_3 a_5 a_6 + a_1 a_2 a_4 a_5 a_6 + a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 + a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) -$$
$$(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_3 a_5 + a_2 a_3 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_2 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 +$$
$$a_1 a_2 a_6 + a_1 a_3 a_6 + a_2 a_3 a_6 + a_1 a_4 a_6 + a_2 a_4 a_6 + a_3 a_4 a_6 + a_1 a_5 a_6 + a_2 a_5 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6)$$
$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2\right) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_5 + a_2 a_5 +$$
$$a_3 a_5 + a_4 a_5 + a_1 a_6 + a_2 a_6 + a_3 a_6 + a_4 a_6 + a_5 a_6)\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3 + a_6^3\right)$$

```
Simplify[%]
True
```

m=4 のとき

$$G_1[4]\, G_{5-1}[4] == G_5[4] + \sum_{t=2}^{5-1} (-1)^t G_{5-t}[4]\, H_t[4] + (-1)^5 5 H_5[4]$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4\right) == a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 +$$
$$a_1 a_2 a_3 a_4 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\right) +$$
$$(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4 + a_3 a_4)\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3\right)$$

```
Simplify[%]
True
```

5・2 級数の冪の分解(統一表記)

定理 5・2・1

n を 2 以上の自然数、m を自然数、そして a_{r_1} を実数とするとき、次が成立する。

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right)^{n} = \sum_{r_1=1}^{m} a_r^n + 2\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right)^{n-2} H_2(m)$$

$$+\sum_{s=0}^{n-3}\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right)^{s}\left(\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n-s-t}\right)H_t(m)+(-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}(m)\right) \tag{2.1n}$$

但し、

$$H_2(m) = \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}$$

$$H_3(m) = \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$\vdots$$

$$H_n(m) = \sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m}\sum_{r_3=r_2+1}^{m}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}\cdots a_{r_n}$$

$n \le 2$ のとき (2.1_n) の第 3 項は無いものとする。

証明

冪級数を次のように定義する。

$$G_n(m) = \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^n$$

そして更に $G_n(m)$, $H_n(m)$ をそれぞれ G_n, H_n と略記する。すると

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}\right)^{2} = \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^2 + 2\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=r_1+1}^{m} a_{r_1}a_{r_2}$$

は次のように記述される。

$$G_1^2 = G_2 + 2H_2 \tag{2.1$_2$'}$$

両辺に G_1 を乗じると

$$G_1^3 = G_1G_{3-1} + 2G_1H_2$$

補題 5・1・1 により

$$G_1G_{3-1} = G_3 + \sum_{t=2}^{3-1}(-1)^t G_{3-t}H_t + (-1)^3 3H_3$$

これを右辺第1項に代入すると

$$G_1^3 = G_3 + G_1^0\left(\sum_{t=2}^{3-1}(-1)^t G_{3-t}H_t + (-1)^3 3H_3\right) + 2G_1H_2 \tag{2.1$_3$'}$$

両辺に G_1 を乗じると

$$G_1^4 = G_1G_{4-1} + G_1^1\left(\sum_{t=2}^{3-1}(-1)^t G_{3-t}H_t + (-1)^3 3H_3\right) + 2G_1^2H_2$$

補題 5・1・1 により

$$G_1 G_{4-1} = G_4 + \sum_{t=2}^{4-1} (-1)^t G_{4-t} H_t + (-1)^4 4 H_4$$

これを右辺第1項に代入すると

$$G_1^4 = G_4 + G_1^0 \left(\sum_{t=2}^{4-1} (-1)^t G_{4-t} H_t + (-1)^4 4 H_4 \right)$$
$$+ G_1^1 \left(\sum_{t=2}^{3-1} (-1)^t G_{3-t} H_t + (-1)^3 3 H_3 \right) + 2G_1^2 H_2 \qquad (2.1_4')$$

両辺に G_1 を乗じると

$$G_1^5 = G_1 G_{5-1} + G_1^1 \left(\sum_{t=2}^{4-1} (-1)^t G_{4-t} H_t + (-1)^4 4 H_4 \right)$$
$$+ G_1^2 \left(\sum_{t=2}^{3-1} (-1)^t G_{3-t} H_t + (-1)^3 3 H_3 \right) + 2G_1^3 H_2$$

補題 5・1・1 により

$$G_1 G_{5-1} = G_5 + \sum_{t=2}^{5-1} (-1)^t G_{5-t} H_t + (-1)^5 5 H_5$$

これを右辺第1項に代入すると

$$G_1^5 = G_5 + G_1^0 \left(\sum_{t=2}^{5-1} (-1)^t G_{5-t} H_t + (-1)^5 5 H_5 \right)$$
$$+ G_1^1 \left(\sum_{t=2}^{4-1} (-1)^t G_{4-t} H_t + (-1)^4 4 H_4 \right)$$
$$+ G_1^2 \left(\sum_{t=2}^{3-1} (-1)^t G_{3-t} H_t + (-1)^3 3 H_3 \right) + 2G_1^3 H_2 \qquad (2.1_5')$$

$\vdots$

以上を統一表記すれば 次のようになる。

$$G_1^n = G_n + \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s \left(\sum_{t=2}^{n-1-s} (-1)^t G_{n-s-t} H_t + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s} \right) + 2G_1^{n-2} H_2 \qquad (2.1_n')$$

そして (m) を戻して、

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1} \right)^n = \sum_{r_1=1}^{m} a_r^n + 2 \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1} \right)^{n-2} H_2(m)$$
$$+ \sum_{s=0}^{n-3} \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1} \right)^s \left(\sum_{t=2}^{n-s-1} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n-s-t} \right) H_t(m) + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s}(m) \right) \qquad (2.1_n)$$

(2.1_n) は *Mathematica* によって以下のように得られる。上2行を入力すると、下2行が出力される。

$$G_1[m]^n == G_n[m] + \sum_{s=0}^{n-3} G_1[m]^s \left(\sum_{t=2}^{n-1-s} (-1)^t G_{n-s-t}[m] H_t[m] + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s}[m] \right) + 2 G_1[m]^{n-2} H_2[m]$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1} \right)^n == \sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^n + \sum_{s=0}^{-3+n} \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1} \right)^s \left(\sum_{t=2}^{-1+n-s} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1}^{n-s-t} \right) H_t[m] + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s}[m] \right) + 2 \left(\sum_{r_1=1}^{m} a_{r_1} \right)^{-2+n} \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=1+r_1}^{m} a_{r_1} a_{r_2}$$

例 n=5 , m=4

$$\left(\sum_{r_1=1}^{4} a_{r_1}\right)^5 = \sum_{r_1=1}^{4} a_r^5 + 2\left(\sum_{r_1=1}^{4} a_{r_1}\right)^{5-2} H_2(4)$$

$$+\sum_{s=0}^{5-3}\left(\sum_{r_1=1}^{4} a_{r_1}\right)^s \left(\sum_{t=2}^{5-s-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{4} a_{r_1}^{5-s-t}\right)H_t(4)+(-1)^{5-s}(5-s)H_{5-s}(4)\right)$$

これを (2.1$_n$') により 計算すると次のとおり。

```
G1[4]^5 == G5[4] + 2 G1[4]^(5-2) H2[4]
   + Sum[G1[4]^s (Sum[(-1)^t G[5-s-t][4] Ht[4], {t, 2, 5-1-s}] + (-1)^(5-s) (5 - s) H[5-s][4]), {s, 0, 5-3}]
```

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^5 == a_1^5+a_2^5+a_3^5+a_4^5+a_1 a_2 a_3 a_4 (a_1+a_2+a_3+a_4)+$$
$$2(a_1+a_2+a_3+a_4)^3 (a_1 a_2+a_1 a_3+a_2 a_3+a_1 a_4+a_2 a_4+a_3 a_4) -$$
$$(a_1 a_2 a_3+a_1 a_2 a_4+a_1 a_3 a_4+a_2 a_3 a_4)\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)+$$
$$(a_1 a_2+a_1 a_3+a_2 a_3+a_1 a_4+a_2 a_4+a_3 a_4)\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3\right)+$$
$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 ((a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1 a_2+a_1 a_3+a_2 a_3+a_1 a_4+a_2 a_4+a_3 a_4) -$$
$$3(a_1 a_2 a_3+a_1 a_2 a_4+a_1 a_3 a_4+a_2 a_3 a_4))+$$
$$(a_1+a_2+a_3+a_4)\left(4 a_1 a_2 a_3 a_4-(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1 a_2 a_3+a_1 a_2 a_4+a_1 a_3 a_4+a_2 a_3 a_4)+\right.$$
$$\left.(a_1 a_2+a_1 a_3+a_2 a_3+a_1 a_4+a_2 a_4+a_3 a_4)\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)\right)$$

```
Simplify[%]
True
```

定理 5･2･1の系として次が得られる。しかしこれは本来の目的であるので、敢えて別定理とした。

定理 5･2･2

n を 2 以上の自然数とするとき、収束する無限級数について次式が成立する。

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^n = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_r^n + 2\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^{n-2} H_2$$

$$+\sum_{s=0}^{n-3}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^s \left(\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{n-s-t}\right)H_t+(-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right) \qquad (2.2_n)$$

但し、

$$H_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}$$

$$H_3 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$\vdots$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}\cdots a_{r_n}$$

$n \le 2$ のとき (2.2$_n$) の第 3 項は無いものとする。

導出

(2.1ₙ') において *Mathematica* を用いて [m] を [∞] に置換する。すると、

$$G_1[\infty]^n == G_n[\infty] + \sum_{s=0}^{n-3} G_1[\infty]^s \left(\sum_{t=2}^{n-1-s} (-1)^t G_{n-s-t}[\infty] H_t[\infty] + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s}[\infty] \right) + 2 G_1[\infty]^{n-2} H_2[\infty]$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^n == \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^n + \sum_{s=0}^{-3+n} \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^s \left(\sum_{t=2}^{-1+n-s} (-1)^t \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{n-s-t}\right) H_t[\infty] + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s}[\infty] \right) + 2 \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^{-2+n} \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2}$$

かくて (2.2_n) を得る。　　　Q.E.D.

第1次展開

定理 5・2・2 を n=6 について第1次展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^6 == \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^6 &+ \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^0 \left(\sum_{t=2}^{6-1} (-1)^t H_t \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{6-t} + (-1)^6\, 6 H_6 \right) \\ &+ \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^1 \left(\sum_{t=2}^{5-1} (-1)^t H_t \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{5-t} + (-1)^5\, 5 H_5 \right) \\ &+ \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \left(\sum_{t=2}^{4-1} (-1)^t H_t \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{4-t} + (-1)^4\, 4 H_4 \right) \\ &+ \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \left(\sum_{t=2}^{3-1} (-1)^t H_t \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^{3-t} + (-1)^3\, 3 H_3 \right) + 2 \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 H_2\end{aligned}$$

統一表記らしく整然としているが、やはり t を添え字とする Σ を展開しないと今少し分かりにくい。そこで、次節においては全展開を行う。

5・3 級数の冪の分解(個別表記)

本節では、前節の一般表記を全展開して分解の個別表記を行う。

公式 5・3・1

収束する無限級数について、次式が成立する。

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + 2\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2}$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + 3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} - 3\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 &+ \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} - 4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \\ &+ 4\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5 &+ \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} \\ &- \left(4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \\ &+ 5\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} \\ &- 5\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} \sum_{r_5=1+r_4}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^6 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^6 &+ \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} \\ &- \left(4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} \\ &+ \left(5\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} \\ &- 6\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} \sum_{r_5=1+r_4}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} \\ &+ 6\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} \sum_{r_5=1+r_4}^{\infty} \sum_{r_6=1+r_5}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^7 &= \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^7 \\ &+ \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2}\end{aligned}$$

$$- \left(4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$+ \left(5\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4}$$

$$- \left(6\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5}$$

$$+ 7\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6}$$

$$- 7 \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}\sum_{r_7=1+r_6}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6} a_{r_7}$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^8 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^8 + \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^6 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^6\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2}$$

$$- \left(4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$+ \left(5\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4}$$

$$- \left(6\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5}$$

$$+ \left(7\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6}$$

$$- 8\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}\sum_{r_7=1+r_6}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6} a_{r_7}$$

$$+ 8 \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}\sum_{r_7=1+r_6}^{\infty}\sum_{r_8=1+r_7}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4} a_{r_5} a_{r_6} a_{r_7} a_{r_8}$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^9 = \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^9 + \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^7 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^6 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^7\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2}$$

$$- \left(4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^6 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^6\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$+ \left(5\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right) \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5\right) \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3} a_{r_4}$$

$$-\left(6\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^4+\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^2\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^2+\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^3+\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^4\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}$$

$$+\left(7\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^3+\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^3\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}a_{r_6}$$

$$-\left(8\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^2+\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^2\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}\sum_{r_7=1+r_6}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}a_{r_6}a_{r_7}$$

$$+9\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}\sum_{r_7=1+r_6}^{\infty}\sum_{r_8=1+r_7}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}a_{r_6}a_{r_7}a_{r_8}$$

$$-9\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty}\sum_{r_6=1+r_5}^{\infty}\sum_{r_7=1+r_6}^{\infty}\sum_{r_8=1+r_7}^{\infty}\sum_{r_9=1+r_8}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}a_{r_6}a_{r_7}a_{r_8}a_{r_9}$$

$\vdots$

導出

ミス防止のため *Mathematica* を用いる。$G_n(m)$, $H_n(m)$ は 2頁 のように定義されたとする。

n=2

定理 5･2･1 (2.1$_n$) において n=2 を代入し [m] を除く。上段が入力で下段が出力である。

$$G_1{}^2 == G_2+\sum_{s=0}^{2-3}G_1{}^s\left(\sum_{t=2}^{2-1-s}(-1)^t G_{2-s-t}H_t+(-1)^{2-s}(2-s)H_{2-s}\right)+2G_1{}^{2-2}H_2$$

$$G_1^2 == G_2+2H_2$$

[2] を付加して検算すると、

$$G_1[2]^2 == G_2[2]+2H_2[2]$$

$$(a_1+a_2)^2 == a_1^2+2a_1a_2+a_2^2$$

```
Simplify[%]
True
```

[2] を [∞] に置換すると、

$$G_1[\infty]^2 == G_2[\infty]+2H_2[\infty]$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^2 == \sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^2+2\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}$$

n=3

(2.1$_n$) において n=3 を代入し [m] を除くと、

$$G_1{}^3 == G_3+\sum_{s=0}^{3-3}G_1{}^s\left(\sum_{t=2}^{3-1-s}(-1)^t G_{3-s-t}H_t+(-1)^{3-s}(3-s)H_{3-s}\right)+2G_1{}^{3-2}H_2$$

$$G_1^3 == G_3+3G_1H_2-3H_3$$

[3] を付加して検算すると、

$$G_1[3]^3 == G_3[3]+3G_1[3]H_2[3]-3H_3[3]$$

$$(a_1+a_2+a_3)^3 == a_1^3+a_2^3-3a_1a_2a_3+a_3^3+3(a_1+a_2+a_3)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)$$

```
Simplify[%]
True
```

[3] を [∞] に置換すると、

$$G_1[\infty]^3 == G_3[\infty] + 3\,G_1[\infty]\,H_2[\infty] - 3\,H_3[\infty]$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 == \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + 3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\ \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2} - 3\sum_{r_1=1}^{\infty}\ \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\ \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2}\,a_{r_3}$$

***n*=4**

(2.1_n) において n=4 を代入し [m] を除くと、

$$G_1{}^4 == G_4 + \sum_{s=0}^{4-3} G_1{}^s\left(\sum_{t=2}^{4-1-s}(-1)^t\,G_{4-s-t}\,H_t + (-1)^{4-s}\,(4-s)\,H_{4-s}\right) + 2\,G_1{}^{4-2}\,H_2$$

$$G_1^4 == G_4 + 2\,G_1^2\,H_2 + G_2\,H_2 + G_1\,(G_1\,H_2 - 3\,H_3) - G_1\,H_3 + 4\,H_4$$

Expand[%]

$$G_1^4 == G_4 + 3\,G_1^2\,H_2 + G_2\,H_2 - 4\,G_1\,H_3 + 4\,H_4$$

H_2 について整理すると

$$G_1^4 == G_4 + \left(3\,G_1^2 + G_2\right)H_2 - 4\,G_1\,H_3 + 4\,H_4$$

[4] を付加して検算すると、

$$G_1[4]^4 == G_4[4] + \left(3\,G_1[4]^2 + G_2[4]\right)H_2[4] - 4\,G_1[4]\,H_3[4] + 4\,H_4[4]$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 ==$$
$$a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + 4\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4 + a_4^4 - 4\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\,(a_1\,a_2\,a_3 + a_1\,a_2\,a_4 + a_1\,a_3\,a_4 + a_2\,a_3\,a_4) +$$
$$(a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_3 + a_1\,a_4 + a_2\,a_4 + a_3\,a_4)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 3\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2\right)$$

Simplify[%]

True

[4] を [∞] に置換すると、

$$G_1[\infty]^4 == G_4[\infty] + \left(3\,G_1[\infty]^2 + G_2[\infty]\right)H_2[\infty] - 4\,G_1[\infty]\,H_3[\infty] + 4\,H_4[\infty]$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 == \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\ \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2} -$$
$$4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\ \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\ \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2}\,a_{r_3} + 4\sum_{r_1=1}^{\infty}\ \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\ \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\ \sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2}\,a_{r_3}\,a_{r_4}$$

***n*=5**

(2.1_n) において n=5 を代入し [m] を除くと、

$$G_1{}^5 == G_5 + \sum_{s=0}^{5-3} G_1{}^s\left(\sum_{t=2}^{5-1-s}(-1)^t\,G_{5-s-t}\,H_t + (-1)^{5-s}\,(5-s)\,H_{5-s}\right) + 2\,G_1{}^{5-2}\,H_2$$

$$G_1^5 == G_5 + 2\,G_1^3\,H_2 + G_3\,H_2 + G_1^2\,(G_1\,H_2 - 3\,H_3) - G_2\,H_3 + G_1\,H_4 + G_1\,(G_2\,H_2 - G_1\,H_3 + 4\,H_4) - 5\,H_5$$

Expand[%]

$$G_1^5 == G_5 + 3\,G_1^3\,H_2 + G_1\,G_2\,H_2 + G_3\,H_2 - 4\,G_1^2\,H_3 - G_2\,H_3 + 5\,G_1\,H_4 - 5\,H_5$$

$H_2\,, H_3$ について整理すると

$$G_1^5 == G_5 + \left(3\,G_1^3 + G_1\,G_2 + G_3\right) H_2 - \left(4\,G_1^2 + G_2\right) H_3 + 5\,G_1\,H_4 - 5\,H_5$$

[5] を付加して検算すると、

$$G_1[5]^5 == G_5[5] + \left(3\,G_1[5]^3 + G_1[5]\,G_2[5] + G_3[5]\right) H_2[5] - \left(4\,G_1[5]^2 + G_2[5]\right) H_3[5] + 5\,G_1[5]\,H_4[5] - 5\,H_5[5]$$

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^5 == a_1^5+a_2^5+a_3^5+a_4^5-5\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5+a_5^5+\\&\quad 5\,(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\,(a_1\,a_2\,a_3\,a_4+a_1\,a_2\,a_3\,a_5+a_1\,a_2\,a_4\,a_5+a_1\,a_3\,a_4\,a_5+a_2\,a_3\,a_4\,a_5)-\\&\quad (a_1\,a_2\,a_3+a_1\,a_2\,a_4+a_1\,a_3\,a_4+a_2\,a_3\,a_4+a_1\,a_2\,a_5+a_1\,a_3\,a_5+a_2\,a_3\,a_5+a_1\,a_4\,a_5+a_2\,a_4\,a_5+a_3\,a_4\,a_5)\\&\qquad \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+4\,(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2\right)+\\&\quad (a_1\,a_2+a_1\,a_3+a_2\,a_3+a_1\,a_4+a_2\,a_4+a_3\,a_4+a_1\,a_5+a_2\,a_5+a_3\,a_5+a_4\,a_5)\\&\qquad \left(a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3+3\,(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^3+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\,\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\right)\right)\end{aligned}$$

```
Simplify[%]
True
```

[5] を [∞] に置換すると、

$$G_1[\infty]^5 == G_5[\infty] + \left(3\,G_1[\infty]^3 + G_1[\infty]\,G_2[\infty] + G_3[\infty]\right) H_2[\infty] - \left(4\,G_1[\infty]^2 + G_2[\infty]\right) H_3[\infty] + 5\,G_1[\infty]\,H_4[\infty] - 5\,H_5[\infty]$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 == &\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5 + \left(3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 + \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2} -\\&\left(4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 + \sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2}\,a_{r_3} +\\&5\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2}\,a_{r_3}\,a_{r_4} - 5\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty}\sum_{r_5=1+r_4}^{\infty} a_{r_1}\,a_{r_2}\,a_{r_3}\,a_{r_4}\,a_{r_5}\end{aligned}$$

n=6~

n=4,5 と同様の計算により n=6~9 が得られる。n=10~ も計算可能であるが、紙面に入り切らないので割愛した。

Note

公式 5・3・1 の特徴は、これらが冪級数と半多重級数とに完全に分離されていることである。そして、このことが 公式 5・3・1が定理 5・2・1から統一的に導出される理由と考えられる。
なお、公式 5・3・1自体にも法則性はあり統一表記も出来そうだが、それは煩雑そうである。

その他の公式

本章の冒頭で述べたように、公式 5・3・1 が唯一の公式ではない。これ以外の公式も無数に存在する。これらの多くは冪級数と半多重級数への分離が不完全または過剰なものが多い。
例えば、

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^3 = -2\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3 + 3\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2 + 6\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^4 = 2\sum_{r_1=1}^{\infty} a_r^4 - \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right)^2 + 4\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^2 \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}$$

$$- \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3} + 8\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^5 = 6\sum_{r=1}^{\infty} a_r^5 - 15\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 + 10\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right)\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3$$

$$+ 20\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}$$

$$+ 30\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$+ 30\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}$$

$$+ 30\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}$$

$$\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^6 = 10\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^3\right)^2 + 15\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right)\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4 - 24\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^5$$

$$+ 30\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^4\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2} - 90\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}\right)^2$$

$$+ 60\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$- 60\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}^2\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}$$

$$- 120\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}$$

$$+ 120\left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty} a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}a_{r_4}a_{r_5}$$

5･4 半多重級数の高速計算法

本節では、計算に多大な時間を要する半多重級数を 冪級数の多項式に代替して高速に計算する方法を提示する。

公式 5･4･1 （再帰式）

n を 2 以上の自然数とするとき、収束する無限級数について次式が成立する。

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(G_1^2 - G_2\right) \tag{4.2}$$

$$H_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(G_1^n - G_n - \sum_{s=0}^{n-3}\sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_1^s G_{n-s-t} H_t - \sum_{s=1}^{n-3}(-1)^{n-s} G_1^s (n-s) H_{n-s} - 2G_1^{n-2}H_2\right) \quad n \ge 3 \tag{4.n}$$

但し、

$$G_n = \left(\sum_{r_1=1}^{\infty} a_{r_1}\right)^n$$

$$H_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2}$$

$$H_3 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}$$

$$\vdots$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} a_{r_1} a_{r_2} a_{r_3}\cdots a_{r_n}$$

導出

定理 5･2･2 を記号 G_n, H_n で記述すれば次のようになる。

$n = 2$ のとき、

$$G_1^2 = G_2 + 2H_2 \qquad \Longrightarrow \qquad H_2 = \left(G_1^2 - G_2\right)/2$$

$n \ge 3$ のとき、

$$G_1^n = G_n + \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s \left(\sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_{n-s-t} H_t + (-1)^{n-s}(n-s) H_{n-s}\right) + 2G_1^{n-2}H_2 \tag{2.1$_n$'}$$

これを次のように分割する。

$$G_1^n = G_n + \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s \sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_{n-s-t} H_t + \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s (-1)^{n-s}(n-s) H_{n-s} + 2G_1^{n-2}H_2$$

$$= G_n + \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s \sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_{n-s-t} H_t + (-1)^n n H_n + \sum_{s=1}^{n-3} G_1^s (-1)^{n-s}(n-s) H_{n-s} + 2G_1^{n-2}H_2$$

これより

$$(-1)^n n H_n = G_1^n - G_n - \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s \sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_{n-s-t} H_t - \sum_{s=1}^{n-3} G_1^s (-1)^{n-s}(n-s) H_{n-s} - 2G_1^{n-2}H_2$$

両辺を $(-1)^n n$ で除して

$$H_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(G_1^n - G_n - \sum_{s=0}^{n-3}\sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_1^s G_{n-s-t} H_t \right.$$
$$\left. - \sum_{s=1}^{n-3}(-1)^{n-s} G_1^s (n-s) H_{n-s} - 2G_1^{n-2} H_2 \right) \qquad (4.n)$$

Q.E.D.

再帰式の実行

これらは再帰式であるので、数式処理ソフト*Mathematica* で実行すれば直ちに次の結果を得る。

Clear[G, H]

$$\mathbf{H_2 := \frac{1}{2}\left(G_1{}^2 - G_2\right)}$$

$$\mathbf{H_{n\_} := \frac{(-1)^n}{n}\left(G_1{}^n - G_n - \sum_{s=0}^{n-3}\sum_{t=2}^{n-1-s}(-1)^t G_1{}^s G_{n-s-t} H_t - \sum_{s=1}^{n-3}(-1)^{n-s} G_1{}^s (n-s) H_{n-s} - 2 G_1{}^{n-2} H_2\right)}$$

Simplify[H₂] $\frac{1}{2}\left(G_1^2 - G_2\right)$

Simplify[H₃] $\frac{1}{6}\left(G_1^3 - 3 G_1 G_2 + 2 G_3\right)$

Simplify[H₄] $\frac{1}{24}\left(G_1^4 - 6 G_1^2 G_2 + 3 G_2^2 + 8 G_1 G_3 - 6 G_4\right)$

Simplify[H₅] $\frac{1}{120}\left(G_1^5 - 10 G_1^3 G_2 + 20 G_1^2 G_3 - 20 G_2 G_3 + 15 G_1 \left(G_2^2 - 2 G_4\right) + 24 G_5\right)$

Simplify[H₆] $\frac{1}{720}\left(G_1^6 - 15 G_1^4 G_2 - 15 G_2^3 + 40 G_1^3 G_3 + 45 G_1^2 \left(G_2^2 - 2 G_4\right) + 90 G_2 G_4 - 24 G_1 (5 G_2 G_3 - 6 G_5) + 40 \left(G_3^2 - 3 G_6\right)\right)$

Simplify[H₇] $\frac{1}{5040}\left(G_1^7 - 21 G_1^5 G_2 + 70 G_1^4 G_3 + 105 G_1^3 \left(G_2^2 - 2 G_4\right) - 84 G_1^2 (5 G_2 G_3 - 6 G_5) - 35 G_1 \left(3 G_2^3 - 8 G_3^2 - 18 G_2 G_4 + 24 G_6\right) + 6 \left(35 G_2^2 G_3 - 70 G_3 G_4 - 84 G_2 G_5 + 120 G_7\right)\right)$

Simplify[H₈] $\frac{1}{40320}\left(G_1^8 - 28 G_1^6 G_2 + 112 G_1^5 G_3 + 210 G_1^4 \left(G_2^2 - 2 G_4\right) - 224 G_1^3 (5 G_2 G_3 - 6 G_5) - 140 G_1^2 \left(3 G_2^3 - 8 G_3^2 - 18 G_2 G_4 + 24 G_6\right) + 48 G_1 \left(35 G_2^2 G_3 - 70 G_3 G_4 - 84 G_2 G_5 + 120 G_7\right) + 7 \left(15 G_2^4 - 180 G_2^2 G_4 - 160 G_2 \left(G_3^2 - 3 G_6\right) + 12 \left(15 G_4^2 + 32 G_3 G_5 - 60 G_8\right)\right)\right)$

半多重級数の高速計算法

これらの結果を用いれば、半多重級数の計算を冪級数の多項式の計算に代替できる。
半多重級数 $H_m(n)$ の計算量は ${}_nC_m$ と膨大であるが、冪級数の多項式の計算量は上記のとおり少ない。従ってその代替効果は絶大である。

例 $a_{r_t} = 1/r_t^2$

この例を *Mathematica* で計算すると次のとおり。

```
Clear[G, f, g]
```

$$G_{n\_}[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \left(\frac{1}{r_1^2}\right)^n$$

(1) 半3重級数

$$f3[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \sum_{r_3=r_2+1}^{m} \frac{1}{r_1^2\, r_2^2\, r_3^2}$$

$$g3[m\_] := \frac{1}{6}\left(G_1[m]^3 - 3\,G_1[m]\,G_2[m] + 2\,G_3[m]\right)$$

$f3(m)$ は半3重級数、$g3(m)$ は上記 H_3 を転記し $[m]$ を補ったものである。

m=1000 としてこれらを計算すると次のとおり、両者は正確に一致している。

N[f3[1000]]	N[g3[1000]]
0.189941	0.189941

$f3(1000)$ の計算量は ${}_{1000}C_3$ = 166,167,000 。$g3(1000)$ のそれは約 3000 と見込まれる。この結果、$f3(1000)$ の計算時間は 10 分、$g3(1000)$ の計算時間は1秒未満であった。なお、筆者のパソコンは Intel Core i7-9750H , 16GB である。

(2) 半5重級数

$$f5[m\_] := \sum_{r_1=1}^{m} \sum_{r_2=r_1+1}^{m} \sum_{r_3=r_2+1}^{m} \sum_{r_4=r_3+1}^{m} \sum_{r_5=r_4+1}^{m} \frac{1}{r_1^2\, r_2^2\, r_3^2\, r_4^2\, r_5^2}$$

$$g5[m\_] := \frac{1}{120}\Big(G_1[m]^5 - 10\,G_1[m]^3\,G_2[m] + 20\,G_1[m]^2\,G_3[m] - 20\,G_2[m]\,G_3[m] + 15\,G_1[m]\left(G_2[m]^2 - 2\,G_4[m]\right) + 24\,G_5[m]\Big)$$

$f5(m)$ は半5重級数、$g5(m)$ は上記 H_5 を転記し $[m]$ を補ったものである。

m=150 としてこれらを計算すると次のとおり、両者は正確に一致している。

N[f5[150]]	N[g5[150]]
0.00217652	0.00217652

$f5(150)$ の計算量は ${}_{150}C_5$ = 591,600,030 。$g5(150)$ の計算量は約 1,050 (=150×7) と見込まれる。結果、$f5(150)$ の計算時間は 61 分、$g5(150)$ の計算時間は1秒未満であった。

更に $g5(5000)$ を計算すると次のとおり。計算時間は 1 秒であった。

N[g5[5000]]　　0.00234086

$f5(5000)$ は計算出来ない。何故なら、その計算量は ${}_{5000}C_5$ = 25,989,619,781,251,000 。

$f5(150)$ の計算量 591,600,030 が約 1 時間 (61 分)を要したから、$f5(5000)$ の計算時間は

25,989,619,781,251,000/591,600,030/24/365 ≈ 5,015 。

即ち、筆者のパソコンでは f5(5000) の計算に約 5,000 年を要することになる。

2025.01.14
2025.02.02 Added Sec.4

河野 和
広島市

宇宙人の数学