定理･公式の一覧（アラカルト編）

1　一般化されたテイラーの定理

公式 1･1･1（反復部分積分の公式）

$f(x)$ は $[a,b]$ で n 回連続微分可能、$g^{<n>}(x)$ は

$$g^{<n>}(x)=\int g^{<n-1>}(x)dx+c_n \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad c_n \text{ は任意定数}$$

とするとき、次式が成立する。

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[g^{<r>}(x)f^{(r-1)}(x)\right]_a^b+(-1)^n\int_a^b g^{<n>}(x)f^{(n)}(x)dx$$

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=\sum_{r=1}^{n}\left[g^{<2r-1>}(x)f^{(2r-2)}(x)\right]_a^b-\sum_{r=1}^{n}\left[g^{<2r>}(x)f^{(2r-1)}(x)\right]_a^b$$
$$+\int_a^b g^{<2n>}(x)f^{(2n)}(x)dx$$

以下において、$\Gamma(z)$, $\psi(z)$, γ, H_n はそれぞれ ガンマ関数、ディガンマ関数、オイラー･マスケロニの定数、調和数 とする。

公式 1･1･2（指数積分の級数展開）

指数積分を $Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}dx$ に関して、次式が成立する。

(1) $x>1$ に対して

$$Ei(x)=\frac{e^x}{x}\left\{1+\frac{1!}{x^1}+\frac{2!}{x^2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}\right\}+n!\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x^{n+1}}dx$$

(2) $x\neq 0$ に対して

$$Ei(x)=\frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log|x|-\psi(r)-\gamma}{\Gamma(r)}x^r+\gamma$$
$$=\log|x|+\frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\psi(r)}{\Gamma(r)}x^r=\log|x|+\gamma-e^x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{H_r}{r!}x^r$$

公式 1･1･3（正弦積分の級数展開）

正弦積分を $Si(x)=\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx=\int_{\infty}^{x}\frac{\sin x}{x}dx+\frac{\pi}{2}$ に関して、次式が成立する。

(1) $x>1$ に対して

$$Si(x)=\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{(2r-2)!}{x^{2r-2}}+\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{(2r-1)!}{x^{2r-1}}+\frac{\pi}{2}+R_{2n+1}$$
$$R_{2n+1}=(-1)^n(2n)!\int_{\infty}^{x}\frac{\sin x}{x^{2n+1}}dx$$

(2) 任意の x に対して

$$Si(x)=\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\log|x|-\psi(2r-1)-\gamma}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1}$$
$$-\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\log|x|-\psi(2r)-\gamma}{\Gamma(2r)}x^{2r}+R_{2n+1}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{\log|x| - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \sin x \, dx$$

$$Si(x) = \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\psi(2r-1)}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1} - \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\psi(2r)}{\Gamma(2r)} x^{2r}$$

$$= -\sin x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{H_{2r}}{(2r)!} x^{2r} + \cos x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{H_{2r+1}}{(2r+1)!} x^{2r+1}$$

公式 1･1･4 (余弦積分の級数展開)

余弦積分を $Ci(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\cos x}{x} dx = \gamma + \log x - \int_0^x \frac{1-\cos x}{x} dx$ に関して、次式が成立する。

(1) $x>1$ に対して

$$Ci(x) = \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{(2r-2)!}{x^{2r-2}} - \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{(2r-1)!}{x^{2r-1}} + R_{2n+1}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n (2n)! \int_{\infty}^{x} \frac{\cos x}{x^{2n+1}} dx$$

(2) $x>0$ に対して

$$Ci(x) = \gamma + \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1}$$

$$+ \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r} + R_{2n+1}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{\log x - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \cos x \, dx$$

$$Ci(x) = \log x + \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\psi(2r-1)}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1} + \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\psi(2r)}{\Gamma(2r)} x^{2r}$$

$$= \log x + \gamma - \cos x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{H_{2r}}{(2r)!} x^{2r} - \sin x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{H_{2r+1}}{(2r+1)!} x^{2r+1}$$

補題 1･2･1 (ラグランジュ型剰余項)

$f(x)$ は $[a\,,b]$ で $n+1$ 回連続微分可能、$g^{<n>}(x)$ は

$$g^{<n>}(x) = \int g^{<n-1>}(x) dx + c_n \quad n=1,2,3,\cdots \quad g^{<0>}(x)=1 \quad c_n \text{は任意定数}$$

とするとき、次式が成立する。

$$f(b) - f(a) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \left[g^{<r>}(x) f^{(r)}(x) \right]_a^b + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = (-1)^n \int_a^b g^{<n>}(x) f^{(n+1)}(x) dx = (-1)^n \left[g^{<n+1>}(x) \right]_a^b f^{(n+1)}(\xi) \quad (a<\xi<b)$$

定理 1･2･2 (一般化されたテイラーの定理)

$f(x)$ は $[a\,,b]$ で $n+1$ 回連続微分可能であるとき、$a<\xi<b$ なる ξ が存在して次式が成立する。

$$f(b) - f(a) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$f(b) - f(a) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(b) + (-1)^n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

公式 1･2･3 (対数関数のテイラー展開)

$$\log x = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r}(x-1)^r + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1} \qquad 1<\xi<x$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r}(x-1)^r \qquad 0<x\leqq 2$$

$$\log x = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{x-1}{x}\right)^r + \frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1} \qquad 1<\xi<x$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{x-1}{x}\right)^r \qquad x\geqq\frac{1}{2}$$

例

$$\log 3 = \frac{1}{1}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots$$

定理 1･2･4 (一般二項定理)

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{n}\binom{\alpha}{r}x^r + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)} \qquad 0<\xi<x$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^r \qquad |x|<1$$

$$= x^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{x^r} \qquad \left\{= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}x^{\alpha-r}\right\} \qquad |x|>1$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-\alpha}{r}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r \qquad \left\{= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha-1+r}{\alpha-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r\right\} \qquad x>-\frac{1}{2}$$

例

$$(1+x)^{\pi} = 1 + \binom{\pi}{1}x^1 + \binom{\pi}{2}x^2 + \binom{\pi}{3}x^3 + \cdots \qquad |x|<1$$

$$= x^{\pi}\left\{1 + \binom{\pi}{1}\frac{1}{x^1} + \binom{\pi}{2}\frac{1}{x^2} + \binom{\pi}{3}\frac{1}{x^3} + \cdots\right\} \qquad x>1$$

$$= 1 + \binom{-\pi}{1}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^1 + \binom{-\pi}{2}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots \qquad x>-\frac{1}{2}$$

ベキ関数のテイラー展開

$$x^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(x-1)^r \qquad 0<x<2$$

$$x^{\alpha} = (x-1)^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{(x-1)^r} \qquad x>2$$

$$x^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{r}\left(\frac{1}{x}-1\right)^r \qquad x>\frac{1}{2}$$

例

$$x^e = 1 + \binom{e}{1}(x-1)^1 + \binom{e}{2}(x-1)^2 + \binom{e}{3}(x-1)^3 + \cdots \qquad 0<x<2$$

$$= (x-1)^e\left\{1 + \binom{e}{1}\frac{1}{(x-1)^1} + \binom{e}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \binom{e}{3}\frac{1}{(x-1)^3} + \cdots\right\} \qquad x>2$$

$$= 1 + \binom{-e}{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{1} + \binom{-e}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2} + \binom{-e}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{3} + \cdots \qquad x > \frac{1}{2}$$

x のテイラー展開

$$x = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{r} \qquad x > \frac{1}{2}$$

$$x = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{r} \qquad x > -\frac{1}{2}$$

例

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4} + \cdots \qquad \left(= \frac{1}{1-1/2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{4} + \cdots \qquad \left(= \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-2/3}\right)$$

$$3 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{4} + \cdots \qquad \left(= \frac{1}{1-2/3}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^{4} + \cdots \qquad \left(= \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3/4}\right)$$

分数関数のテイラー展開

$$\frac{1}{x^{\alpha}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{r}(x-1)^{r} \qquad 0<x<2$$

$$\frac{1}{x^{\alpha}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{r} \qquad x > \frac{1}{2}$$

例

$$\frac{1}{x^{\sqrt{2}}} = 1 + \binom{\sqrt{2}}{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{1} + \binom{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2} + \binom{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{3} + \cdots \qquad x > \frac{1}{2}$$

2 多重級数と指数関数

公式 2·1·0 (多重級数と半多重級数)

多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}$ が絶対収束するとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s,s}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} a_{r,s,t} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s,s-t,t}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n}$$

Note

要するに、多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n}$ に対して次の操作をすれば良い。

r_{n-1} を $r_{n-1}-r_n$ に置換し、右から1番目の ∞ を r_{n-1} に置換する。

r_{n-2} を $r_{n-2}-r_{n-1}$ に置換し、右から2番目の ∞ を r_{n-2} に置換する。

$\vdots$

r_1 を r_1-r_2 に置換し、右から $(n-1)$ 番目の ∞ を r_1 に置換する。

公式 2·1·1

m を非負の整数とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} a^r b^s \frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a^{r-s} b^s \frac{x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} a^r b^s c^t \frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a^{r-s} b^{s-t} c^t \frac{x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n} a_k^{r_k} \frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n} r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)!} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_1^{r_1-r_2} a_2^{r_2-r_3}\cdots a_n^{r_n} \frac{x^{m+r_1}}{(m+r_1)!}$$

公式 2·1·2

$$\sum_{s=0}^{r} 2^s = \frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}3^t = 3\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1} - 2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} 2^{s-t}3^{t-u}4^u = 8\cdot\frac{4^{1+r}-1}{4-1} - 9\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1} + 2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} 2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s \frac{{}_nC_s\,(n-s)^{n-1}(n-s-1)}{n!}\,\frac{(n-s)^{1+r_1}-1}{n-s-1}$$

例

$$\sum_{s=0}^{7}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t}2^{s-t}3^{t-u}4^{u} = 8\cdot\frac{4^{1+7}-1}{4-1} - 9\cdot\frac{3^{1+7}-1}{3-1} + 2\cdot\frac{2^{1+7}-1}{2-1} = 145750$$

公式 2･1･3

$$\sum_{s=0}^{r}2^{s} = \frac{2^{2+r}-2\cdot1^{2+r}+0^{2+r}}{2!}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}2^{s-t}3^{t} = \frac{3^{3+r}-3\cdot2^{3+r}+3\cdot1^{3+r}-0^{3+r}}{3!}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t}2^{s-t}3^{t-u}4^{u} = \frac{4^{4+r}-4\cdot3^{4+r}+6\cdot2^{4+r}-4\cdot1^{4+r}+0^{4+r}}{4!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}{}_{n}C_{s}(n-s)^{n+r_1}$$

例

$$\sum_{s=0}^{4}\sum_{t=0}^{s}2^{s-t}3^{t} = 2^{0}3^{0}+\left(2^{1}3^{0}+2^{0}3^{1}\right)+\left(2^{2}3^{0}+2^{1}3^{1}+2^{0}3^{2}\right)+\left(2^{3}3^{0}+2^{2}3^{1}+2^{1}3^{2}+2^{0}3^{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3!}\left(3^{3+4}-3\cdot2^{3+4}+3\cdot1^{3+4}-0^{3+4}\right) = 301$$

公式 2･1･4

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}{}_{n}C_{s}(n-s)^{n-1} = 0 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}{}_{n}C_{s}(n-s)^{n} = n! \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}{}_{n}C_{s}(n-s)^{n+1} = {}_{n+1}C_{2}\,n! \qquad n=1,2,3,\cdots$$

例 $\boldsymbol{n=2}$

$$\sum_{s=0}^{2}(-1)^{s}{}_{2}C_{s}(2-s)^{2-1} = {}_{2}C_{0}\,2^{1} - {}_{2}C_{1}\,1^{1} + {}_{2}C_{2}\,0^{1} = 0$$

$$\sum_{s=0}^{2}(-1)^{s}{}_{2}C_{s}(2-s)^{2} = {}_{2}C_{0}\,2^{2} - {}_{2}C_{1}\,1^{2} + {}_{2}C_{2}\,0^{2} = 2!$$

$$\sum_{s=0}^{2}(-1)^{s}{}_{2}C_{s}(2-s)^{2+1} = {}_{2}C_{0}\,2^{3} - {}_{2}C_{1}\,1^{3} + {}_{2}C_{2}\,0^{3} = {}_{3}C_{2}\,2!$$

公式 2･1･5

$$\left(e^{x}-1\right)^{1} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(1^{1+r}-0^{1+r}\right)\frac{x^{1+r}}{(1+r)!}$$

$$\left(e^{x}-1\right)^{2} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(2^{2+r}-2\cdot1^{2+r}+0^{2+r}\right)\frac{x^{2+r}}{(2+r)!}$$

$$\left(e^{x}-1\right)^{3} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(3^{3+r}-3\cdot2^{3+r}+3\cdot1^{3+r}-0^{3+r}\right)\frac{x^{3+r}}{(3+r)!}$$

$$\vdots$$

$$\left(e^{x}-1\right)^{n} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_{n}C_{s}\,s^{n+r}\frac{x^{n+r}}{(n+r)!}$$

公式 2･2･1

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{1+r}C_1\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{2+r}C_2\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{x^{m+r+s+t+u}}{(m+r+s+t+u)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{3+r}C_3\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{n-1+r}C_{n-1}\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

公式 2･2･2

$$\frac{1x^1}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\cdots=e^x\cdot\frac{x^1}{1!}$$

$$\frac{1x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{6x^4}{4!}+\frac{10x^5}{5!}+\cdots=e^x\cdot\frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{1x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\frac{10x^5}{5!}+\frac{20x^6}{6!}+\cdots=e^x\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{n+r}C_n\,x^{n+r}}{(n+r)!}=e^x\cdot\frac{x^n}{n!}$$

公式2･2･3

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{1+r+s}}{(1+r+s)!}=e^x\cdot\frac{x^1}{1!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!}=e^x\cdot\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{x^{3+r+s+t+u}}{(3+r+s+t+u)!}=e^x\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=e^x\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

公式 2･2･4

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\qquad(n\geqq m)$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{-m}{r}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}-\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-m+s}{n}\frac{x^s}{s!}$$

例 **n=2, m=1, 2** の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{0+r+s+t}}{(0+r+s+t)!}=e^x\sum_{r=0}^{2}\binom{2}{r}\frac{x^{2-r}}{(2-r)!}=e^x\left(1\cdot\frac{x^2}{2!}+2\cdot\frac{x^1}{1!}+1\cdot\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{1+r+s+t}}{(1+r+s+t)!}=e^x\sum_{r=0}^{2}\binom{1}{r}\frac{x^{2-r}}{(2-r)!}=e^x\left(1\cdot\frac{x^2}{2!}+1\cdot\frac{x^1}{1!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!}=e^x\cdot\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!}=e^x\sum_{r=0}^{2}\binom{-1}{r}\frac{x^{2-r}}{(2-r)!}-\sum_{s=0}^{1-1}\binom{-1+s}{2}\frac{x^s}{s!}$$

$$=e^x\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)-\frac{x^0}{0!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{4+r+s+t}}{(4+r+s+t)!}=e^x\sum_{r=0}^{2}\binom{-2}{r}\frac{x^{2-r}}{(2-r)!}-\sum_{s=0}^{2-1}\binom{-2+s}{2}\frac{x^s}{s!}$$

$$=e^x\left(1\cdot\frac{x^2}{2!}-2\cdot\frac{x^1}{1!}+3\cdot\frac{x^0}{0!}\right)-\left(3\cdot\frac{x^0}{0!}+1\cdot\frac{x^1}{1!}\right)$$

公式 2･2･4’

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2+r+s}}{(2+r+s)!}=e^x\left(\frac{x^1}{1!}-\frac{x^0}{0!}\right)+1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!}=e^x\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)-1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{x^{4+r+s+t+u}}{(4+r+s+t+u)!}=e^x\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}-\frac{x^0}{0!}\right)+1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=e^x\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}+(-1)^n$$

公式 2･3･1

m を非負の整数とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{{}_{1+r}C_1\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{{}_{2+r}C_2\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t+u}\frac{x^{m+r+s+t+u}}{(m+r+s+t+u)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{{}_{3+r}C_3\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$\vdots$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{{}_{n-1+r}C_{n-1}\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

公式 2･3･2

$$\frac{1x^1}{1!}-\frac{2x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}-\frac{4x^4}{4!}+-\cdots = \frac{1}{e^x}\frac{x^1}{1!}$$

$$\frac{1x^2}{2!}-\frac{3x^3}{3!}+\frac{6x^4}{4!}-\frac{10x^5}{5!}+-\cdots = \frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{1x^3}{3!}-\frac{4x^4}{4!}+\frac{10x^5}{5!}-\frac{20x^6}{6!}+-\cdots = \frac{1}{e^x}\frac{x^3}{3!}$$

$\vdots$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{{}_{n+r}C_n\,x^{n+r}}{(n+r)!} = \frac{1}{e^x}\frac{x^n}{n!}$$

公式 2･3･3

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{x^{1+r+s}}{(1+r+s)!} = \frac{1}{e^x}\frac{x^1}{1!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!} = \frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t+u}\frac{x^{3+r+s+t+u}}{(3+r+s+t+u)!} = \frac{1}{e^x}\frac{x^3}{3!}$$

$\vdots$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{x^{n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!} = \frac{1}{e^x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

公式2･3･4

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n+1}r_k}\frac{x^{n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!} = \frac{(-1)^m}{e^x}\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{(-1)^r x^{n-r}}{(n-r)!}$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n+1}r_k}\frac{x^{n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!} = \frac{(-1)^m}{e^x}\sum_{r=0}^{n}\binom{-m}{r}\frac{(-1)^r x^{n-r}}{(n-r)!}$$

$$-(-1)^m\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-m+s}{n}\frac{(-1)^s x^s}{s!}$$

例　***n*=2, *m*=1** の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{1+r+s+t}}{(1+r+s+t)!}=\frac{(-1)^1}{e^x}\sum_{r=0}^{2}\binom{1}{r}\frac{(-1)^r x^{2-r}}{(2-r)!}=-\frac{1}{e^x}\left(1\cdot\frac{x^2}{2!}-1\cdot\frac{x^1}{1!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!}=\frac{(-1)^1}{e^x}\sum_{r=0}^{1}\binom{-1}{r}\frac{(-1)^r x^{2-r}}{(2-r)!}-(-1)^1\sum_{s=0}^{1-1}\binom{s-1}{2}\frac{(-1)^s x^s}{s!}$$

$$=-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)+\frac{x^0}{0!}$$

公式 2･3･4’

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{x^{2+r+s}}{(2+r+s)!}=1-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!}=1-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t+u}\frac{x^{4+r+s+t+u}}{(4+r+s+t+u)!}=1-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=1-\frac{1}{e^x}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}$$

公式 2･4･1

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1^r}{(1+r)!}x^{1+r}=\frac{1}{1!}\left(e^x-1\right)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1^r2^s}{(2+r+s)!}x^{2+r+s}=\frac{1}{2!}\left(e^x-1\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r2^s3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(e^x-1\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n$$

公式 2･4･2

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\,(n-r)^{m-1}e^{(n-r)x}$$

$$for\ n\ge m$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^m}e^{(n-s)x}$$

$$-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{x^r}{r!}$$

例 **n=3, m=1, 2** の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r2^s3^t}{(1+r+s+t)!}x^{1+r+s+t}=\frac{1}{(3-1)!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r{}_{3-1}C_r(3-r)^{2-1}e^{(3-r)x}$$

$$=\frac{1}{2!}\left(3^1e^{3x}-2\cdot2^1e^{2x}+1^1e^x\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r2^s3^t}{(2+r+s+t)!}x^{2+r+s+t}=\frac{1}{(3-1)!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r{}_{3-1}C_r(3-r)^{1-1}e^{(3-r)x}$$

$$=\frac{1}{2!}\left(e^{3x}-2e^{2x}+e^x\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r2^s3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(e^x-1\right)^3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r2^s3^t}{(4+r+s+t)!}x^{4+r+s+t}=\frac{1}{3!}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s{}_3C_s}{(3-s)^1}e^{(3-s)x}-\frac{1}{3!}\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s{}_3C_s}{(3-s)^{1-r}}\frac{x^r}{r!}$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3^1}e^{3x}-\frac{3}{2^1}e^{2x}+\frac{3}{1^1}e^x\right)$$

$$-\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{1}{3^1}-\frac{3}{2^1}+\frac{3}{1^1}\right)\frac{x^0}{0!}+\left(\frac{1}{3^0}-\frac{3}{2^0}+\frac{3}{1^0}\right)\frac{x^1}{1!}\right\}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r2^s3^t}{(5+r+s+t)!}x^{5+r+s+t}=\frac{1}{3!}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s{}_3C_s}{(3-s)^2}e^{(3-s)x}-\frac{1}{3!}\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s{}_3C_s}{(3-s)^{2-r}}\frac{x^r}{r!}$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3^2}e^{3x}-\frac{3}{2^2}e^{2x}+\frac{3}{1^2}e^x\right)$$

$$-\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{1}{3^2}-\frac{3}{2^2}+\frac{3}{1^2}\right)\frac{x^0}{0!}+\left(\frac{1}{3^1}-\frac{3}{2^1}+\frac{3}{1^1}\right)\frac{x^1}{1!}+\left(\frac{1}{3^0}-\frac{3}{2^0}+\frac{3}{1^0}\right)\frac{x^2}{2!}\right\}$$

公式2・4・3

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r(n-r)^{m-1}x^{(n-r)}$$

$$\text{for } n\ge m$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^m}x^{(n-s)}$$

$$-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{(\log x)^r}{r!}$$

公式 2・4・3'

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1^r}{(1+r)!}(\log x)^{1+r} = \frac{1}{1!}(x-1)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s}{(2+r+s)!}(\log x)^{2+r+s} = \frac{1}{2!}(x-1)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(3+r+s+t)!}(\log x)^{3+r+s+t} = \frac{1}{3!}(x-1)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k} = \frac{1}{n!}(x-1)^n$$

公式 2・5・1

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{(1+r)!}x^{1+r} = \frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r 2^s}{(2+r+s)!}x^{2+r+s} = \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r 2^s 3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t} = \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k} = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^n$$

公式2・5・2

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{\sum_{k=1}^{n}r_k} = \frac{(-1)^{n-m}}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\frac{(n-r)^{m-1}}{e^{(n-r)x}}$$

$$\text{for } n \geq m$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^m e^{(n-s)x}} - \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{r+s}{}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{x^r}{r!}\right\}$$

例 **n=3, m=1** の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r 2^s 3^t}{(2+r+s+t)!}x^{2+r+s+t} = \frac{(-1)^{3-1}}{(3-1)!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r{}_{3-1}C_r\frac{(3-r)^{1-1}}{e^{(3-r)x}}$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{e^{3x}}-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r 2^s 3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t}=\frac{(-1)^{3-0}}{3!}\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r 2^s 3^t}{(4+r+s+t)!}x^{4+r+s+t}$$

$$=\frac{(-1)^{3+1}}{3!}\left\{\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s {}_3C_s}{(3-s)^1 e^{(3-s)x}}-\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^{r+s}{}_3C_s}{(3-s)^{1-r}}\frac{x^r}{r!}\right\}$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3^1 e^{3x}}-\frac{3}{2^1 e^{2x}}+\frac{3}{1^1 e^x}\right)-\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{1}{3^1}-\frac{3}{2^1}+\frac{3}{1^1}\right)\frac{x^0}{0!}-\left(\frac{1}{3^0}-\frac{3}{2^0}+\frac{3}{1^0}\right)\frac{x^1}{1!}\right\}$$

公式2･5･3

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{(-1)^{n-m}}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\frac{(n-r)^{m-1}}{x^{(n-r)}}$$

$$for\ n\ge m$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{(-1)^{n+m}}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^m x^{(n-s)}}-\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{r+s}{}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{(\log x)^r}{r!}\right\}$$

公式 2･5･3’

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{(1+r)!}(\log x)^{1+r}=\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r 2^s}{(2+r+s)!}(\log x)^{2+r+s}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r 2^s 3^t}{(3+r+s+t)!}(\log x)^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^n$$

公式 2･6･1（オイラー･マスケロニの定数の2重級数表示）

γ をオイラー･マスケロニの定数 $\gamma=0.57721566\cdots$ とするとき、次式が成り立つ。

$$1-\gamma=\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{sr^s}=\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{1}{s(2+r-s)^s}=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\zeta(s)-1}{s}$$

$$\gamma=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s\,r^s}=\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{(-1)^s}{s(1+r-s)^s}=\sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s\frac{\zeta(s)}{s}$$

3　二項恒等式の高階微積分

公式 3･1･1（zakii）

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}{}_{n}C_{s}\,s^{k}=0 \qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}{}_{n}C_{s}\,s^{n}=(-1)^{n}n!$$

公式 3･2･1

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{s}}{s+1}{}_{n}C_{s}=\frac{0!}{n+1}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{s}}{s+2}{}_{n}C_{s}=\frac{1!}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{s}}{s+3}{}_{n}C_{s}=\frac{2!}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{s}}{s+m}{}_{n}C_{s}=\frac{(m-1)!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \qquad \{=B(1+n,m)\}$$

c.f.

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^{r}}{m+r}{}_{n-1}C_{r}=B(m,n)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{p+r}\binom{q-1}{r}=B(p,q)$$

副産物（部分分数分解）

$s\neq-1,-2,-3,\cdots$ について次式が成立する。

$$\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{s+t}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{t=1}^{n}\frac{(-1)^{t-1}}{s+t}\binom{n-1}{t-1}$$

4　オイラー・マクローリンの和公式

4・1　ベルヌイ数とベルヌイ多項式

ベルヌイ数

(1) 定義

ベルヌイ数 B_k $(k=1,2,3,\cdots)$ は次の等式の係数として定義される。

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$$

(2) 計算法

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r{}_kC_r\,r^n$$

による。具体的に展開すると

$$B_0=\frac{1}{1}{}_0C_0\,0^0$$

$$B_1=\frac{1}{1}{}_0C_0\,0^1+\frac{1}{2}\left({}_1C_0\,0^1-{}_1C_1\,1^1\right)$$

$$B_2=\frac{1}{1}{}_0C_0\,0^2+\frac{1}{2}\left({}_1C_0\,0^2-{}_1C_1\,1^2\right)+\frac{1}{3}\left({}_2C_0\,0^2-{}_2C_1\,1^2+{}_2C_2\,2^2\right)$$

$$\vdots$$

ベルヌイ多項式

(1) 定義

B_n をベルヌイ数とするとき、次の3式を満足する多項式 $B_n(x)$ をベルヌイ多項式という。

$$B_0(x)=1$$

$$\frac{d}{dx}B_n(x)=nB_{n-1}(x)\qquad(n\geqq 1)$$

$$\int_0^1 B_n(x)dx=0\qquad(n\geqq 1)$$

(2) 特性

$$B_n(x)=n\int_0^x B_{n-1}(t)dt+B_n\qquad(n\geqq 1)$$

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

$$B_n(0)=B_n$$

$$B_n(1)=B_n(0)\qquad(n\geqq 2)$$

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}\qquad(n\geqq 1)$$

$$B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)\qquad(n\geqq 1)$$

任意の自然数 m と区間 $[0,1]$ について

$$|B_{2m}(x)|\leq|B_{2m}|$$

$$|B_{2m+1}(x)|\leq(2m+1)|B_{2m}|$$

例

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}\ ,\qquad B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}\ ,\qquad B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\ ,$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}\ ,\qquad B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x\ ,$$

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}\ ,\qquad B_7(x)=x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{2}x^3+\frac{1}{6}x\ ,$$

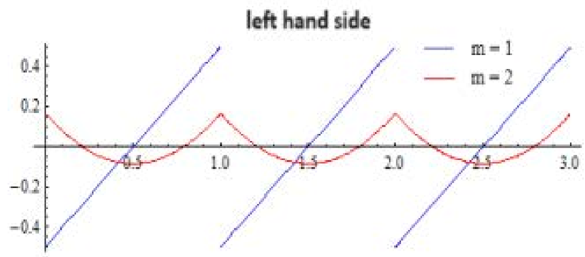
公式 4･1･5 (ベルヌイ多項式のフーリエ展開)

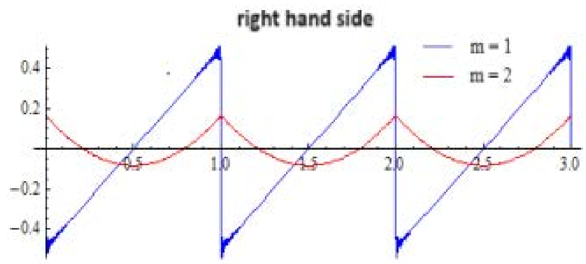
m を自然数、$\lfloor x\rfloor$ を床関数、 B_m をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$B_m(x-\lfloor x\rfloor) = -2m!\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^m}\cos\left(2\pi sx-\frac{m\pi}{2}\right) \qquad x \geqq 0$$

例

$m=1,2$ について左辺と右辺を図示すれば次のとおり。青が $m=1$ で赤が $m=2$ である。





4･2 オイラー･マクローリンの和公式

公式 4･2･1 ($\boldsymbol{k=a\sim b-1}$, $\boldsymbol{B_r}$)

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の C^m 級の関数、$\lfloor x\rfloor$ を床関数、B_r をベルヌイ数、$B_n(x)$ をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=a}^{b-1}f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{r=1}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\right\} + R_m$$

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_a^b B_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(m)}(x)dx$$

$$= (-1)^m 2\int_a^b\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^m}\cos\left(2\pi sx-\frac{m\pi}{2}\right)\right\}f^{(m)}(x)dx$$

$$\lim_{m\to\infty}|R_m| = \infty \text{ のとき、} m \text{ は偶数 } s.t.\ \frac{\left|f^{(m)}(x)\right|}{(2\pi)^m} = minimum \quad for\ x\in[a,b]$$

公式 4･2･2 ($\boldsymbol{k=a\sim b-1}$, $\boldsymbol{B_{2r}}$)

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の C^{2m} 級の関数、$\lfloor x\rfloor$ を床関数、B_r をベルヌイ数、$B_n(x)$ をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=a}^{b-1}f(k) = \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\} + \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left\{f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)\right\} + R_{2m}$$

$$R_{2m} = -\frac{1}{(2m)!}\int_a^b B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\,dx$$
$$= (-1)^m 2\int_a^b \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi sx)}{(2\pi s)^{2m}}\right\} f^{(2m)}(x)\,dx$$

$\lim_{m\to\infty}|R_{2m}| = \infty$ のとき、m は自然数 $s.t.$ $\dfrac{|f^{(2m)}(x)|}{(2\pi)^{2m}} = minimum \quad for\ x\in[a,b]$

公式 4･2･2'（ $\boldsymbol{k=a\sim b}$, $\boldsymbol{B_{2r}}$ ）

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の C^{2m} 級の関数、$\lfloor x\rfloor$ を床関数、B_r をベルヌイ数、$B_n(x)$ をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\} + \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left\{f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)\right\} + R_{2m}$$
$$R_{2m} = -\frac{1}{(2m)!}\int_a^b B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\,dx$$
$$= (-1)^m 2\int_a^b \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi sx)}{(2\pi s)^{2m}}\right\} f^{(2m)}(x)\,dx$$

$\lim_{m\to\infty}|R_{2m}| = \infty$ のとき、m は自然数 $s.t.$ $\dfrac{|f^{(2m)}(x)|}{(2\pi)^{2m}} = minimum \quad for\ x\in[a,b]$

4･3 初等数列の和

公式 4･3･1（等差数列の和）

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd) = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

公式 4･3･2（等比数列の和）

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = (r^n-1)\sum_{s=0}^{m}\frac{B_s}{s!}(\log r)^{s-1} + R_m$$
$$R_m = (-1)^{m+1}\frac{(\log r)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)\, r^x dx$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = (r^n-1)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s}{s!}(\log r)^{s-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$$

公式 4･3･3（ヤコブ･ベルヌーイ）

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r n^{m+1-r} = \frac{1}{m+1}\{B_{m+1}(n)-B_{m+1}(0)\}$$

例　$\boldsymbol{m=3}$, $\boldsymbol{n=101}$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{101-1} k^3 = 0^3+1^3+2^3+\cdots+100^3 \qquad = 25502500$$
$$\frac{1}{3+1}\{B_{3+1}(101)-B_{3+1}(0)\} = \frac{1}{4}\left(\frac{3060299999}{30}+\frac{1}{30}\right) = 25502500$$

公式 4･3･4（自然数の交代整べキ和）

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^m=\frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r\cdot\left(n^{m+1-r}-2^{m+1}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{m+1-r}\right)$$

$$=\frac{1}{m+1}\left\{B_{m+1}(n)-B_{m+1}-2^{m+1}\left\{B_{m+1}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)-B_{m+1}\right\}\right\}$$

例　$m=3$, $n=101$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{101-1}(-1)^{k-1}k^3=1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+99^3-100^3\qquad=-507500$$

$$\frac{1}{3+1}\left\{B_{3+1}(101)-B_{3+1}-2^{3+1}\left\{B_{3+1}\left(\left\lceil\frac{101}{2}\right\rceil\right)-B_{3+1}\right\}\right\}=-507500$$

公式 4･3･4'（自然数の交代2乗和）

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}k=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

例　$n=999$

$$\sum_{k=1}^{999}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2-4^2+-\cdots+999^2=499500$$

$$(-1)^{999-1}(1+2+3+\cdots+999)=\frac{999\cdot 1000}{2}=499500$$

公式 4･3･5s（正弦数列の和）

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin k=-\frac{\sin n}{2}-(\cos n-1)\left\{1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\}+R_{2m}$$

$$R_{2m}=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\sin x\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin k=-\frac{\sin n}{2}-(\cos n-1)\left(\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{n-1}{2}\sin\frac{n}{2}\Big/\sin\frac{1}{2}$$

公式 4･3･5c（余弦数列の和）

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k=\sin n\cdot\left\{1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\}-\frac{1}{2}(\cos n-1)+R_{2m}$$

$$R_{2m}=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\cos x\,dx$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k=\sin n\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos n-1)=\cos\frac{n-1}{2}\sin\frac{n}{2}\Big/\sin\frac{1}{2}$$

4･4　調和数列の和とオイラー･マスケロニの定数

公式 4･4･1（調和数列の和）

m を2以上の自然数、γ をオイラー･マスケロニの定数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\gamma+\log n-\frac{1}{2n}-\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r\cdot n^{2r}}+\int_n^\infty\frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx$$

例 $\sum_{k=1}^{100} 1/k$

$m=2$ まで計算すれば

$$\gamma + \log 101 - \frac{1}{2\cdot 101} - \left(\frac{B_2}{2\cdot 101^2} + \frac{B_4}{4\cdot 101^4} \right) = 5.18737751763962\cdots$$

この全桁(小数点以下14桁)が有効数字である。

オイラー・マスケロニの定数の逆算

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log n + \frac{1}{2n} + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{2r\cdot n^{2r}} - \int_n^\infty \frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx$$

但し、$m=n$ とする。このとき有効桁数は概ね $2n-?$ で与えられる。

例 $m=n=10$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{10-1} \frac{1}{k} - \log 10 + \frac{1}{2\cdot 10} + \sum_{r=1}^{10} \frac{B_{2r}}{2r\cdot 10^{2r}} = 0.57721566490153286 0\cdots$$

この全桁(小数点以下18桁)が有効数字である。

4・5 ゼータ数列の和とリーマン・ゼータ関数

公式 4・5・1 (ゼータ数列の和)

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p \ne 1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} = \zeta(p) + \frac{1}{1-p} \sum_{r=0}^{m} \binom{1-p}{r} B_r n^{1-p-r} + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{m B(m,p)} \int_n^\infty \frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx$$

但し m は偶数 $s.t.\ \lceil p\rceil \leqq m < \infty$

例 $\sum_{k=1}^{100} 1/k^{1.1}$

$m = 1.1\uparrow = 2$ まで計算すれば

$$\sum_{k=1}^{101-1} \frac{1}{k^{1.1}} \fallingdotseq \zeta(1.1) + \frac{1}{1-1.1} \sum_{r=0}^{2} \binom{1-1.1}{r} B_r n^{1-1.1-r} = 4.278024023\cdots$$

この全桁(小数点以下9桁)が有効数字である。

リーマン・ゼータ関数の逆算

$$\zeta(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{1-p} \sum_{r=0}^{m} \binom{1-p}{r} B_r n^{1-p-r} - \frac{1}{m B(m,p)} \int_n^\infty \frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx$$

但し、$m=n$ とする。このとき有効桁数は概ね $2n-?$ で与えられる。

例 $\zeta(1.3)$

$m=n=10$ として計算すると、

$$\sum_{k=1}^{10-1} \frac{1}{k^{1.3}} - \frac{1}{1-1.3} \sum_{r=0}^{10} \binom{1-1.3}{r} B_r 10^{1-1.3-r} = 3.9319492118095\cdots$$

この全桁(小数点以下13桁)が有効数字である。

4·6 自然数の実べキ和

公式 4·6·1

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p \neq -1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \zeta(-p) + \frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r n^{1+p-r} + \frac{1}{m\,B(m,-p)}\int_n^{\infty}\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx$$

但し m は偶数 s.t. $\lceil p\rceil \leqq m < \infty$ 。

例1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^{0.1}$

$m=2$ まで計算すれば

$$\sum_{k=1}^{101-1} k^{0.1} \fallingdotseq \zeta(-0.1) + \frac{1}{1+0.1}\sum_{r=0}^{2}\binom{1+0.1}{r}B_r 101^{1+0.1-r} = 144.456549944\cdots$$

この全桁(小数点以下9桁)が有効数字である。

4·7 交代実べキ和

公式 4·7·1 (自然数の交代正べキ和)

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p \neq -1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p = \left(1-2^{1+p}\right)\zeta(-p) + \frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\left(n^{1+p-r} - 2^{1+p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}\right) + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{m\,B(m,-p)}\left\{\int_n^{\infty}\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx - 2^{1+p}\int_{\lceil n/2\rceil}^{\infty}\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx\right\}$$

但し m は偶数 s.t. $\lceil p\rceil \leqq m < \infty$ 。

例 **p=0.6 , n=1001**

$$\texttt{fl}[p\_,\ n\_] := \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p$$

$$\texttt{fr}[p\_,\ n\_,\ m\_] := \left(1-2^{1+p}\right)\texttt{Zeta}[-p] + \frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\texttt{Binomial}[1+p,\ r]\ \texttt{BernoulliB}[r]\left(n^{1+p-r} - 2^{1+p}\ \texttt{Ceiling}\left[\frac{n}{2}\right]^{1+p-r}\right)$$

```
SetPrecision[{fl[0.6, 1001], fr[0.6, 1001, 4]}, 15]
{-31.2026520696209, -31.2026520696212}
```

この場合、m=4 が最良近似(小数点以下11桁)を与える。

公式 4·7·2 (イータ数列の和)

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$\eta(p)$ をディリクレ·イータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p \neq -1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^p} = \left(1-2^{1-p}\right)\zeta(p) + \frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r\left(n^{1-p-r} - 2^{1-p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1-p-r}\right) + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{m\,B(m,p)}\left\{\int_n^\infty \frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx - 2^{1-p}\int_{\lceil n/2\rceil}^\infty \frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx\right\}$$

但し m は偶数 $s.t.\ \lceil p\rceil \leqq m < \infty$ 。

特に $n\to\infty$ のとき、

$$\eta(p) = \left(1-2^{1-p}\right)\zeta(p)$$

例　p=1.7 , n=1001 , n=∞

```
fl[p_, n_] := Sum[(-1)^(k-1)/k^p, {k, 1, n-1}]

fr[p_, n_, m_] := (1 - 2^(1-p)) Zeta[p]
    + 1/(1 - p) Sum[Binomial[1 - p, r] BernoulliB[r] (n^(1-p-r) - 2^(1-p) Ceiling[n/2]^(1-p-r)), {r, 0, m}]

SetPrecision[{fl[1.7, 1001]       , fr[1.7, 1001, 4]}, 15]
{0.789721725383435                , 0.789721725383434  }

SetPrecision[{fl[1.7, ∞]          , fr[1.7, ∞, 4]}, 30]
{0.789725693648715920680558610911 , 0.789725693648715920680558610911 }
```

n=1001 の場合、右辺は m=4 まで計算しているが、小数点以下14桁が有効数字である。

5　一般ベルヌイ多項式と一般ベルヌイ数

p を実数とするとき、一般ベルヌイ多項式は次式で与えられる。

$$B_p(x) = -2\Gamma(1+p)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^p}\cos\left(2\pi sx-\frac{\pi p}{2}\right) \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

p を実数とするとき、一般ベルヌイ数は次式で与えられる。

$$B_p = \begin{cases} -\dfrac{2\Gamma(1+p)}{(2\pi)^p}\cos\dfrac{p\pi}{2}\cdot\zeta(p) & p \neq 1,-1,-2,-3,\cdots \\ -1/2 & p=1 \\ -p\,\zeta(1-p) & p=-1,-2,-3\cdots \end{cases}$$

公式 5·3·1（一般化されたベルヌーイの冪和公式）

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{r=0}^{p}\binom{p+1}{r}B_r n^{p+1-r} = \frac{1}{p+1}\left\{B_{p+1}(n)-B_{p+1}(0)\right\} \qquad p \neq -1$$

公式 5·3·2'

$p \neq 0,-1,-2,-3,\cdots$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^p \fallingdotseq \frac{1}{p+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{p+1}{r}B_r n^{p+1-r}+\zeta(-p)$$

ここで　$\lfloor p \rfloor\uparrow +1 \leqq m < \infty$

副産物

$$B_{p+1}(0) = -(p+1)\zeta(-p)$$

$$B_{p+1}(n) = \sum_{r=0}^{m}\binom{p+1}{r}B_r n^{p+1-r} + \frac{p+1}{m\,B(m,-p)}\int_n^{\infty}\frac{B_m(x-\lfloor x \rfloor)}{x^{-p+m}}dx$$

公式 5·4·1（一般ベルヌイ数とゼータ関数）

$\zeta(p), B_p$ をそれぞれリーマンゼータ関数および一般ベルヌイ数とするとき次式が成立する。

$$\zeta(p) = -\frac{B_{1-p}}{1-p} \qquad p \neq 1,0$$

$$\zeta(1-p) = -\frac{B_p}{p} \qquad p \neq 0,1$$

$$B_p = \frac{p}{1-p}\frac{2\Gamma(p)}{(2\pi)^p}\cos\frac{p\pi}{2}\cdot B_{1-p} \qquad p \neq 1,0,-1,-2,\cdots$$

$$B_{1-p} = \frac{1-p}{p}\frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}}\sin\frac{p\pi}{2}\cdot B_p \qquad p \neq 0,1,2,3,\cdots$$

$$\zeta(p) = \frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}}\sin\frac{p\pi}{2}\cdot\zeta(1-p) \qquad p \neq 0,1,2,3,\cdots$$

$$\zeta(1-p) = \frac{2\Gamma(p)}{(2\pi)^p}\cos\frac{p\pi}{2}\cdot\zeta(p) \qquad p \neq 1,0,-1,-2,\cdots$$

6　超楕円(ラメ曲線)

6･1　超楕円の方程式

超楕円(横長超楕円)は次の式で示される。

陰関数表示

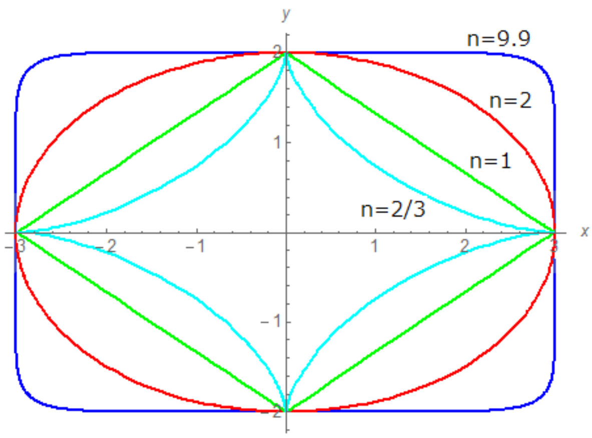
$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1 \qquad 0 < b \le a \quad , \ n > 0$$

陽関数表示

$$y = \pm b\left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad 0 < b \le a \quad , \ n > 0$$

$a=3, b=2$ のとき $n=9.9,\ 2,\ 1,\ 2/3$ について図示すれば次のようになる。

図1



6･2　超楕円の面積

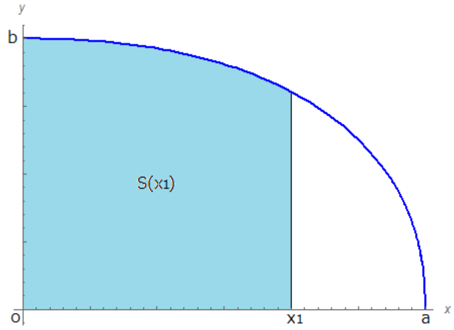
公式 6･2･1

$n, a, b\ (b \le a)$ を正数とし $\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、n 次楕円の面積 S は次式で与えられる。

$$S = 4ab\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2 \Big/ \Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right) = 4ab\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/n}{r}\frac{(-1)^r}{nr+1}$$

6･3　超楕円の一部の面積

本節では次図の水色部分の面積を求める。



公式 6･3･1

n,a,b $(b \leqq a)$ をそれぞれ正数とするとき、第1象限内の n 次楕円の 0 から x までの面積 $s(x)$ は

$$s(x)=b\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/n}{r}\frac{(-1)^r}{a^{nr}}\frac{x^{nr+1}}{nr+1}$$

副産物

$$S=4ab\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/n}{r}\frac{(-1)^r}{nr+1}$$

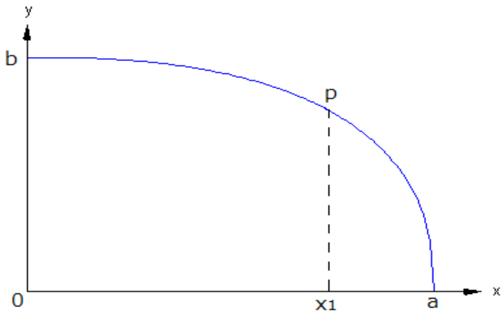
$$\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2/\,\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1/n}{r}\frac{(-1)^r}{nr+1}$$

6･4 超楕円の弧長

6･4･1 横長超楕円の弧長

本細節では次の横長超楕円の $\overset{\frown}{bP}$ の長さを求める。

$$y=b\left(1-\frac{x^n}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad 0<b\le a \quad , \ n>0 \tag{1.0}$$



公式 6･4･1

n,a,b $(b\le a)$ は正数、x は実数で $0<x\le a\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right\}^{-\frac{1}{n}}$ 、$(z)_s$ はポッホハマー記号とするとき、(1.0) の 0 から x までの弧長 $l(x)$ は次式で与えられる。

$$l(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}\binom{\frac{2(n-1)r}{n}-1+s}{\frac{2(n-1)r}{n}-1}\frac{b^{2r}}{a^{2nr+ns}}\frac{x^{2(n-1)r+ns+1}}{2(n-1)r+ns+1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}\left(\frac{2(n-1)r}{n}\right)_s\frac{1}{s!}\frac{b^{2r}}{a^{2nr+ns}}\frac{x^{2(n-1)r+ns+1}}{2(n-1)r+ns+1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{1/2}{r-s}\left(\frac{2(n-1)(r-s)}{n}\right)_s\frac{1}{s!}\frac{b^{2(r-s)}}{a^{2n(r-s)+ns}}\frac{x^{2(n-1)(r-s)+ns+1}}{2(n-1)(r-s)+ns+1}$$

6･4･2 縦長超楕円の弧長

公式 6･4･1 では横長超楕円の $\overset{\frown}{aP}$ の長さは計算できない。しかしこの問題は簡単に解決できる。即ち、(1.0) において x,y を入れ替えて

$$y=a\left(1-\frac{x^n}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad 0<b\le a \quad , \ n>0 \tag{2.0}$$

そして、次の公式により計算する。

公式 6･4･2

$n,a,b\ (b\le a)$ は正数、x は実数で $0<x\le b\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right\}^{-\frac{1}{n}}$ 、$(z)_s$ はポッホハマー記号とするとき、(2.0) の 0 から x までの弧長 $l(x)$ は次式で与えられる。

$$l(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}\binom{\frac{2(n-1)r}{n}-1+s}{\frac{2(n-1)r}{n}-1}\frac{a^{2r}}{b^{2nr+ns}}\frac{x^{2(n-1)r+ns+1}}{2(n-1)r+ns+1} \tag{2.1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}\left(\frac{2(n-1)r}{n}\right)_s\frac{1}{s!}\frac{a^{2r}}{b^{2nr+ns}}\frac{x^{2(n-1)r+ns+1}}{2(n-1)r+ns+1} \tag{2.1'}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{1/2}{r-s}\left(\frac{2(n-1)(r-s)}{n}\right)_s\frac{1}{s!}\frac{a^{2(r-s)}}{b^{2n(r-s)+ns}}\frac{x^{2(n-1)(r-s)+ns+1}}{2(n-1)(r-s)+ns+1} \tag{2.1''}$$

Note

縦長超楕円においては、2重級数 (2.1) (又は (2.1’)) の収束速度は遅い。それは対角対級数 (2.1″) の収束速度の 1/100 ぐらいである。

6･5 超楕円の周長

公式6･5･1

$n,a,b\ (b\le a)$ を正数とするとき、n 次楕円の周長 L は次式で与えられる。

$$L=4\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}\binom{\frac{2(n-1)r}{n}-1+s}{\frac{2(n-1)r}{n}-1}\frac{b^{2r}a^{1-2r}A^{-\frac{2(n-1)r+ns+1}{n}}+a^{2r}b^{1-2r}B^{-\frac{2(n-1)r+ns+1}{n}}}{2(n-1)r+ns+1}$$

$$=4\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{1/2}{r}\left(\frac{2(n-1)r}{n}\right)_s\frac{1}{s!}\frac{b^{2r}a^{1-2r}A^{-\frac{2(n-1)r+ns+1}{n}}+a^{2r}b^{1-2r}B^{-\frac{2(n-1)r+ns+1}{n}}}{2(n-1)r+ns+1}$$

$$=4\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{1/2}{r-s}\left(\frac{2(n-1)(r-s)}{n}\right)_s\frac{1}{s!}\frac{1}{2(n-1)(r-s)+ns+1}\times$$
$$\left\{b^{2(r-s)}a^{1-2(r-s)}A^{-\frac{2(n-1)(r-s)+ns+1}{n}}+a^{2(r-s)}b^{1-2(r-s)}B^{-\frac{2(n-1)(r-s)+ns+1}{n}}\right\} \tag{1.1''}$$

ここで $\quad A=1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad , \quad B=1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}$

例　***a*=3, *b*=2** の **2.5** 次楕円の周長

この周長を数値積分と上記公式とにより計算する。数値積分は正確に計算できないので、横長楕円と縦長楕円の積分値を加算して4倍する。公式は収束速度の観点から (1.1″) の一択である。Σ Σ を45

まで計算した結果、両者は小数点以下9桁まで一致した。

Numerical Integral

```
4 × (2.708999727549167452512418 + 1.413871105491204061256779)
16.49148333216148605507679
```

Diagonal Series

```
a = 3; b = 2; n = 2.5;
```

$A = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}};$ SetPrecision[A, 10]

1.508761886

$B = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}};$ SetPrecision[B, 10]

2.965556046

$$\text{Ld}[m\_] := 4 \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{r} \text{Binomial}\left[\frac{1}{2}, r-s\right] \text{Pochhammer}\left[\frac{2(n-1)(r-s)}{n}, s\right] \frac{1}{s!}$$
$$\times \frac{b^{2(r-s)} a^{1-2(r-s)} A^{-\frac{2(n-1)(r-s)+ns+1}{n}} + a^{2(r-s)} b^{1-2(r-s)} B^{-\frac{2(n-1)(r-s)+ns+1}{n}}}{2(n-1)(r-s)+ns+1}$$

```
SetPrecision[Ld[45], 12]
16.4914833320
```

7 冪乗和の新公式

7・3　冪乗の二項係数表示(その2)

公式 7・3・1

m,n を自然数とするとき、次式が成立する。

$$n^m = \sum_{r=0}^{m-1} {}_mD_{r+1}\,{}_{n+r}C_m$$

ここで ${}_mD_r\quad r=1,2,\cdots,m$ はオイラリアン数であり、次式で与えられる。

$${}_mD_r = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s\,{}_{m+1}C_s (r-s)^m \qquad m=1,2,3,\cdots$$

公式 7・3・2

m を自然数、x を正数、${}_mD_r\quad r=1,2,\cdots,m$ をオイラリアン数とするとき、次式が成立する。

$$x^m = \sum_{r=0}^{m-1} {}_mD_{r+1} \binom{x+r}{m}$$

7・4　冪乗和の新公式

公式 7・4・1

m を自然数、${}_mD_r\quad r=1,2,\cdots,m$ をオイラリアン数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{r=1}^{m} {}_mD_r\,{}_{n+r}C_{m+1}$$

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^5$

$${}_{101}C_6 + 26\,{}_{102}C_6 + 66\,{}_{103}C_6 + 26\,{}_{104}C_6 + {}_{105}C_6 = 171708332500$$

$$\frac{2\cdot 100^6 + 6\cdot 100^5 + 5\cdot 100^4 - 100^2}{12} = 171708332500$$

公式 7・4・2

m を自然数、x を正数、${}_mD_r\quad r=1,2,\cdots,m$ をオイラリアン数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{x} k^m = \sum_{r=1}^{m} {}_mD_r \binom{x+r}{m+1}$$

例 $\displaystyle\sum_{k=0}^{0.9} k^4$

$$\binom{1.9}{5} + 11\binom{2.9}{5} + 11\binom{3.9}{5} + \binom{4.9}{5} = 0.659148$$

$$\frac{6\cdot 0.9^5 + 15\cdot 0.9^4 + 10\cdot 0.9^3 - 0.9^1}{30} = 0.659148$$

7・5　実数の冪乗和の公式

公式 7・5・1

m,n を自然数、a,b を実数、${}_mD_r\quad r=1,2,\cdots,m$ をオイラリアン数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} (ak+b)^m = b^m\,{}_nC_1 + \sum_{r=1}^{m} {}_mC_r\, a^r b^{m-r} \sum_{s=1}^{r} {}_rD_s\,{}_{n+s}C_{r+1}$$

例1

$$\sum_{k=1}^{50}(\pi k-e)^4 = e^4{}_{50}C_1 - 4\pi e^3{}_{51}C_2$$
$$+ 6\pi^2e^2({}_{51}C_3 + {}_{52}C_3)$$
$$- 4\pi^3e({}_{51}C_4 + 4\,{}_{52}C_4 + {}_{53}C_4)$$
$$+ \pi^4({}_{51}C_5 + 11\,{}_{52}C_5 + 11\,{}_{53}C_5 + {}_{54}C_5)$$
$$= 50e^4 - 4\cdot 1275\pi e^3 + 6(20825 + 22100)\pi^2e^2$$
$$- 4(249900 + 4\cdot 270725 + 292825)\pi^3 e$$
$$+ (2349060 + 11\cdot 2598960 + 11\cdot 2869685 + 3162510)\pi^4$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{50}(\pi k-e)^4 = 50e^4 - 5100\pi e^3 + 257550\pi^2e^2 - 6502500\pi^3e + 65666665\pi^4$$

例2

$$\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{2}k+\sqrt{3})^3 = (\sqrt{3})^3{}_{100}C_1 \quad + 3\sqrt{2}(\sqrt{3})^2{}_{101}C_2$$
$$+ 3(\sqrt{2})^2\sqrt{3}({}_{101}C_3 + {}_{102}C_3)$$
$$+ (\sqrt{2})^3({}_{101}C_4 + 4\,{}_{102}C_4 + {}_{103}C_4)$$
$$= 100\cdot 3\sqrt{3} + 5050\cdot 9\sqrt{2} + (166650+171700)\cdot 6\sqrt{3}$$
$$+ (4082925 + 4\times 4249575 + 4421275)\cdot 2\sqrt{2}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{2}k+\sqrt{3})^3 = 51050450\sqrt{2} + 2030400\sqrt{3}$$

参考　オイラリアン数の逐次計算法

　オイラリアン数は次のような逐次計算法でも得ることができる。

先ず、2段目のオイラリアン数を 1　1 とする。3段目以下も両端の係数は全て 1 とする。
次にピラミッドの2段目に合計が4となる2数の順列 $(2,2)$ を乗加算して3段目の係数とする。
次にピラミッドの3段目に合計が5となる2数の順列 $(3,2),(2,3)$ を乗加算して4段目の係数とする。
以下、同じ手順を次図に示すように繰り返す。

		算　式
2	1　1	
	2,2	
3	1　4　1	4 = 1×2 + 1×2
	3,2　2,3	
4	1　11　11　1	11 = 1×3 + 4×2
	4,2　3,3　2,4	
5	1　26　66　26　1	26 = 1×4 +11×2 ,　66 = 11×3 + 11×3
	5,2　4,3　3,4　2,5	
6	1　57　302　302　57　1	57 = 1×5 +26×2 , 302 = 26×4 + 66×3
	⋮	⋮

8 テイラー級数とマクローリン級数

8·1 特異点が無い場合

定理 8·1·1

関数 $f(z)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、任意の $a \in D$ について次式が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{f^{(s)}(a)}{s\,!}(-1)^{s-r}{}_{s}C_{r}\,a^{s-r} = \frac{f^{(r)}(0)}{r\,!} \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

例1 $f(z)=\cos z$

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{(-1)^{s-r}}{s\,!}\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right){}_{s}C_{r}\,a^{s-r} = \frac{1}{r\,!}\cos\frac{r\pi}{2} \qquad for\ r=0,1,2,\cdots$$

特殊値

$r=0$ のとき

$$\frac{a^{0}\cos a}{0\,!}+\frac{a^{1}\sin a}{1\,!}-\frac{a^{2}\cos a}{2\,!}-\frac{a^{3}\sin a}{3\,!}++--\cdots = 1$$

e.g.

$$\frac{1}{0\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{0}+\frac{1}{1\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1}-\frac{1}{2\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}-\frac{1}{3\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}++--\cdots = \sqrt{2}$$

$r=1$ のとき

$$\frac{a^{1}\cos a}{1\,!}+\frac{a^{2}\sin a}{2\,!}-\frac{a^{3}\cos a}{3\,!}-\frac{a^{4}\sin a}{4\,!}++--\cdots = \sin a$$

e.g.

$$\frac{1}{1\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1}+\frac{1}{2\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}-\frac{1}{3\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}-\frac{1}{4\,!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4}++--\cdots = 1$$

例2 $f(z)=\sinh z$

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{e^{a}-(-1)^{-s}e^{-a}}{2}\,\frac{(-1)^{s-r}}{s\,!}{}_{s}C_{r}\,a^{s-r} = \frac{1-(-1)^{-r}}{2}\,\frac{1}{r\,!} \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

$r=0$ のとき

$$\frac{a^{0}\sinh a}{0\,!}-\frac{a^{1}\cosh a}{1\,!}+\frac{a^{2}\sinh a}{2\,!}-\frac{a^{3}\cosh a}{3\,!}+-\cdots = 0$$

$r=1$ のとき

$$\frac{a^{0}\cosh a}{0\,!}-\frac{a^{1}\sinh a}{1\,!}+\frac{a^{2}\cosh a}{2\,!}-\frac{a^{3}\sinh a}{3\,!}+-\cdots = 1$$

例3 $f(z)=(1+z)e^{z}$

$$e^{a}\sum_{s=r}^{\infty} \frac{s+1+a}{s\,!}(-1)^{s-r}{}_{s}C_{r}\,a^{s-r} = \frac{r+1}{r\,!} \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

$r=0$ のとき

$$\frac{(1-a)a^{0}}{0\,!}+\frac{(2-a)a^{1}}{1\,!}+\frac{(3-a)a^{2}}{2\,!}+\frac{(4-a)a^{3}}{3\,!}+\cdots = e^{a}$$

$r=1$ のとき

$$\frac{(2-a)a^0}{0!}+\frac{(3-a)a^1}{1!}+\frac{(4-a)a^2}{2!}+\frac{(5-a)a^3}{3!}+\cdots=2e^a$$

一般に

$$\frac{(b-a)a^0}{0!}+\frac{(b-a+1)a^1}{1!}+\frac{(b-a+2)a^2}{2!}+\frac{(b-a+3)a^3}{3!}+\cdots=be^a$$

8･2 特異点が有る場合

定理 8･2･1

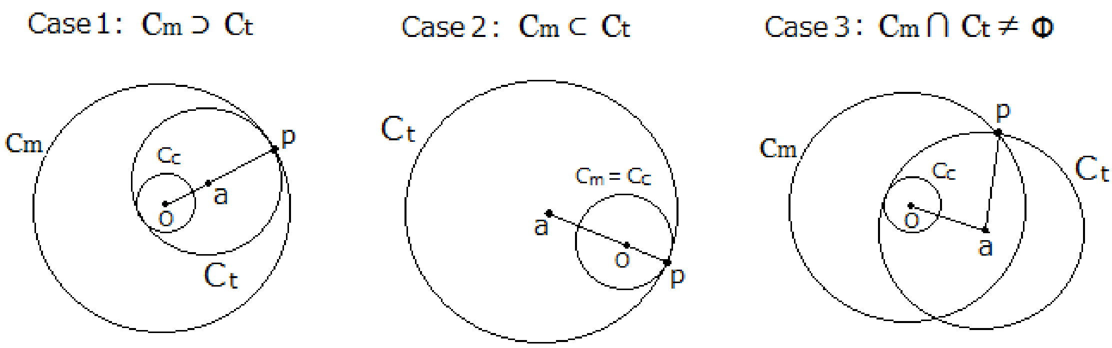
関数 $f(z)$ が開領域 D 内の特異点 p 以外で正則であるとき、$|a|<|p-a|$ なる a について次式が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{f^{(s)}(a)}{s!}(-1)^{s-r}{}_sC_r a^{s-r}=\frac{f^{(r)}(0)}{r!}\qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

但し、特異点 p は原点 O 及び点 a に最も近いものとする。

特異点が存在する3つのケース

開領域 D 内において、原点を O 、関数 $f(z)$ の特異点を p 、マクローリン級数の収束円を C_m そしてテイラー級数の収束円を C_t とする。すると次の3つのケースが存在する。



8･3 *Case* 1: $C_m\supset C_t$ の例

これはマクローリン級数の収束円 C_m がテイラー級数の収束円 C_t を含む場合である。例として次の関数を考える。

$$f(z)=tanh^{-1}z$$

すると次が成立しなければならない。

$$tanh^{-1}a+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s}\left\{\frac{1}{(1-a)^s}+\frac{(-1)^{s-1}}{(1+a)^s}\right\}a^s=tanh^{-1}0\qquad r=0$$

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{(-1)^{s-r}}{2s}\left\{\frac{1}{(1-a)^s}+\frac{(-1)^{s-1}}{(1+a)^s}\right\}{}_sC_r a^{s-r}=\frac{1+(-1)^{r-1}}{2r}\qquad r=1,2,3,\cdots$$

最初の式より次の公式を得る。

公式 8･3･1

$$tanh^{-1}a=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s}\left\{\left(\frac{a}{1+a}\right)^s-(-1)^s\left(\frac{a}{1-a}\right)^s\right\}\qquad |Re(a)|<\frac{1}{2}$$

例

$$tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^1}+1\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^2}-1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^3}+1\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3^4}-1\right)+\cdots$$

$$tanh^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^1}+\frac{1}{2^1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{2^4}\right)+\cdots$$

8･4 *Case*２: $C_m \subset C_t$ の例

これはマクローリン級数の収束円 C_m がテイラー級数の収束円 C_t に含まれる場合である。例として次の関数を考える。

$$f(z)= \frac{5}{5-z}$$

すると次が成立しなければならない。

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{5}{(5-a)^{s+1}}(-1)^{s-r}{}_sC_r\,a^{s-r} = \frac{1}{5^r} \qquad \begin{cases} Re(a)<5/2 \\ r=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

ここで、収束半径５ を１に変更し $a/(a-1)$ を $1/x$ に置換して次の公式を得る。

公式 8･4･1（係数付等比級数）

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{-r}\frac{{}_sC_r}{x^s} = -\left(\frac{1}{1-x}\right)^r\frac{x}{1-x} \qquad \begin{cases} |x|>1 \\ r=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

特に $r=1$ のとき

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s}{x^s} = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad |x|>1$$

例1

$$\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots = \frac{2}{1^2}$$

$$\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots = \frac{3}{2^2}$$

$\vdots$

例2

$$\frac{1}{2^1}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+-\cdots = \frac{2}{3^2}$$

$$\frac{1}{3^1}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+-\cdots = \frac{3}{4^2}$$

$\vdots$

例3

$$\frac{1}{1.3^1}+\frac{2}{1.3^2}+\frac{3}{1.3^3}+\frac{4}{1.3^4}+\cdots = \frac{1.3}{0.3^2}$$

$$\frac{1}{1.3^1}-\frac{2}{1.3^2}+\frac{3}{1.3^3}-\frac{4}{1.3^4}+-\cdots = \frac{1.3}{2.3^2}$$

$$\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{2}{(1+i)^2}+\frac{3}{(1+i)^3}+\frac{4}{(1+i)^4}+\cdots=\frac{1+i}{i^2}$$

$$\frac{1}{(1+i)^1}-\frac{2}{(1+i)^2}+\frac{3}{(1+i)^3}-\frac{4}{(1+i)^4}+-\cdots=\frac{1+i}{(2+i)^2}$$

8･5 *Case* 3 : $C_m \cap C_t \neq \phi$ の例

これはマクローリン級数の収束円 C_m とテイラー級数の収束円 C_t とが部分的に重なっている場合である。例として次の関数を考える。

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

すると次が成立しなければならない。

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^s\left(1+a^2\right)^{-\frac{s+1}{2}}\sin\left\{(s+1)\cot^{-1}a\right\}(-1)^{s-r}{}_sC_r\,a^{s-r}=(-1)^r\sin\frac{(r+1)\pi}{2}$$

$$r=0,1,2,\cdots$$

ここで、$a=1/\sqrt{3}$, $r=0,1$ とおいて次の公式を得る。

公式 8･5･1

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{10}}++--\cdots=\frac{4}{3}$$

$$\frac{0}{2^0}+\frac{1}{2^1}-\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\frac{6}{2^6}+\frac{7}{2^7}-\frac{9}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}++--\cdots=0$$

8･6 スチルチェス定数の和

定理 8･1･1 を用いて次の公式が証明出来る。

公式 8･6･1 (O. Marichev)

γ_s をスチルチェス定数とし、$\zeta^{(n)}(0)$ をリーマン･ゼータ関数の n 階微分係数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+n}}{s!}=(-1)^n\left\{n!+\zeta^{(n)}(0)\right\}\qquad n=0,1,2,\cdots$$

特殊値

リーマン･ゼータ関数について次の特殊値が知られている。

$$\zeta^{(0)}(0)=-\frac{1}{2}\ \left(=\zeta(0)\right)\quad,\quad \zeta^{(1)}(0)=-\frac{\log 2\pi}{2}\ \ (\textit{Glaisher-Kinkelin constant})$$

従って

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}=(-1)^0\left\{1!+\zeta^{(0)}(0)\right\}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}=(-1)^1\left\{1!+\zeta^{(1)}(0)\right\}=\frac{\log 2\pi}{2}-1=-0.0810614667\cdots$$

9 ガンマ関数の絶対値

9･1 いくつかの無限乗積

公式9･1･1

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r+x}\right)\left(1-\frac{y}{r-x}\right)=\frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r-x}\right)\left(1-\frac{y}{r+x}\right)=\frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r+x}\right)\left(1-\frac{y}{r+x}\right)=\frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1+x-y)}$$

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r-x}\right)\left(1-\frac{y}{r-x}\right)=\frac{\Gamma^2(1-x)}{\Gamma(1-x+y)\Gamma(1-x-y)}$$

公式 9･1･1'

$$\prod_{r=0}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r+x}\right)\left(1-\frac{y}{r-x}\right)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(-x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(-x-y)}$$

$$\prod_{r=0}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r-x}\right)\left(1-\frac{y}{r+x}\right)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(-x)}{\Gamma(x-y)\Gamma(-x+y)}$$

$$\prod_{r=0}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r+x}\right)\left(1-\frac{y}{r+x}\right)=\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}$$

$$\prod_{r=0}^{\infty}\left(1+\frac{y}{r-x}\right)\left(1-\frac{y}{r-x}\right)=\frac{\Gamma^2(-x)}{\Gamma(-x+y)\Gamma(-x-y)}$$

9･2 絶対値の2乗

公式 9･2･1

x,y を実数とし $\Gamma(x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とするとき、

$$|\Gamma(x+iy)|^2=\Gamma^2(x)\prod_{r=0}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{y}{r+x}\right)^2\right\}^{-1}$$

i.e.

$$|\Gamma(x+iy)|=|\Gamma(x)|\prod_{r=0}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{y}{r+x}\right)^2\right\}^{-1/2}$$

9･3 虚軸に関する偏導関数

公式 9･3･1

$\Gamma(z)$ $(z=x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とするとき、

$$\frac{\partial|\Gamma(z)|^2}{\partial y}=-2\Gamma^2(x)\left[\prod_{r=0}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{y}{r+x}\right)^2\right\}^{-1}\right]\sum_{s=0}^{\infty}\frac{y}{(s+x)^2+y^2}$$

定理 9･3･2

$\Gamma(z)$ $(z=x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とするとき、x の如何に関わらず、

$y>0$ ならば $|\Gamma(z)|^2$ は y に関して単調減少であり、

$y<0$ ならば $|\Gamma(z)|^2$ は y に関して単調増加である。

9·4　実軸に関する偏導関数

公式9·4·2

$\Gamma(z)$ $(z=x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とし $\psi(x)$ をディガンマ関数するとき、

$$\frac{\partial|\Gamma(z)|^2}{\partial x} = 2\Gamma^2(x)\left[\prod_{r=0}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{y}{r+x}\right)^2\right\}^{-1}\right]\cdot\left[\psi(x)+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s+x}\frac{y^2}{(s+x)^2+y^2}\right]$$

定理　9·4·3

$\Gamma(z)$ $(z=x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とするとき、y の如何に関わらず、

$x>1.461632144968\cdots$ ならば $|\Gamma(z)|^2$ は x に関して単調増加である。

定理9·4·3'

$\Gamma(z)$ $(z=x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とするとき、

$x\geqq 0$ かつ $|y|>1.047662675461731\cdots$ ならば、$|\Gamma(z)|^2$ は x に関して単調増加である。

10 二重関数項級数による収束加速と総和法

10・1　二重関数項級数と総和法

定理 10・1・3

$b(s)$ を実関数、D_1 , D_2 を小領域 、$f_1(z)$, $f_2(z)$ はそれぞれ次式で定義される関数項級数とする。

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} b_{rs} = 1 \qquad s=0,1,2,\cdots$$

$$f_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) \qquad z \in D_1$$

$$f_2(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z)$$

(1) $f_1(z)$ が絶対収束するとき、

i　$f_2(z)$ が D_1 において収束するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z) \qquad z \in D_1$$

ii　$f_2(z)$ が D_1 において発散するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = "\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z)" \qquad z \in D_1$$

但し $= "S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。(以下、同じ。)

(2) $f_2(z)$ が D_1 において絶対収束するとき、

i　$f_1(z)$ が収束するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z) \qquad z \in D_1$$

ii　$f_1(z)$ が発散するならば

$$"\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z) \qquad z \in D_1$$

(3) $f_2(z)$ が D_2 $(\neq D_1)$ において絶対収束するとき、

$$"\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z) \qquad z \in D_2$$

10・2　加速因子

前節では次なる等式が得られた。

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} b_{rs} a_s(z) \tag{2.1}$$

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} b_{rs} = 1 \qquad for\ s=0,1,2,\cdots \tag{b}$$

ここで (b) の収束速度が (2.1) の左辺のよりも速いとき、これを (2.1) の右辺のように変換することによって左辺の収束を加速することができる。この場合、我々は級数(b)を 加速因子(**accelerator**) と呼ぶ。
当然ながら加速因子はなるべく収束の速いものが良い。これには色々考えられるが、筆者は次を推奨する。

公式 10・2・1 (クノップの加速因子)

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \binom{r}{s} = 1 \qquad for \quad \begin{array}{l} s = 0,1,2,\cdots \\ q > 0 \end{array}$$

10・3 クノップ変換と二重関数項級数

クノップの加速因子を用いた級数の変換は**クノップ変換**と呼ばれる。

補題 10・3・1

q は正数、$f_1(z)=\sum_{s=0}^{\infty}a_s(z)$ は小領域 D_1 上の関数項級数とし、これのクノップ変換は

$$f_2(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}a_s(z)$$

すると、もし $f_1(z)$ が有界ならば、$f_2(z)$ は D_1 において絶対収束する。

定理 10・3・2 (クノップ変換)

q は正数、D_1, D_2 を小領域、$f_1(z), f_2(z)$ はそれぞれ次式で定義される関数項級数とする。

$$f_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty}a_s(z) \qquad z\in D_1$$

$$f_2(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}a_s(z)$$

(1) $f_1(z)$ が収束するとき、

$$\sum_{s=0}^{\infty}a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}a_s(z) \qquad z\in D_1$$

(2) $f_2(z)$ が D_1 において絶対収束するとき、$f_1(z)$ が発散するならば

$$"\sum_{s=0}^{\infty}a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}a_s(z) \qquad z\in D_1$$

但し $= "S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。(以下、同じ。)

(3) $f_2(z)$ が D_2 $(\neq D_1)$ において絶対収束するとき、

$$"\sum_{s=0}^{\infty}a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}a_s(z) \qquad z\in D_2$$

10・4 ベキ級数の加速

10・4・1 メルカトール級数の加速

$$log(z+1) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{z^s}{s} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^{s-1}\frac{z^s}{s} \qquad |z|\leq 1$$

この変換によって、収束円の周辺では著しい加速効果及び漸近効果が得られる。

10・4・2 マーダヴァ級数の加速

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^s}{2s+1}$$

特に $q=1$ のとき、

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{2^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^s}{2s+1} = \frac{1}{2^1}\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$$= \frac{1}{2^1}\frac{0!!}{1!!}+\frac{1}{2^2}\frac{2!!}{3!!}+\frac{1}{2^3}\frac{4!!}{5!!}+\frac{1}{2^4}\frac{6!!}{7!!}+\cdots = \frac{\pi}{4}$$

10･5 フーリエ級数の加速

$$-\log\left(2\sin\frac{z}{2}\right) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(sz)}{s} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{\cos(sz)}{s} \qquad \begin{array}{l}0<Re(z)<2\pi \\ Im(z)=0\end{array}$$

フーリエ級数は実数の区間でしか収束しないが、この変換により、収束域がこの両側の複素域にまで拡大される。

10･6 ディリクレ級数の加速

$$\eta(z) = "\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s^z}" = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{s^z} \qquad z \in C$$

この変換により収束軸付近で大きな加速効果が得られる。さらに、収束軸を超えた所では解析接続が生じる。その結果、z`$= -1 , -3$ とすれば

$$"1^1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 +- \cdots" = \frac{1}{4}$$

$$"1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 +- \cdots" = -\frac{1}{8}$$

10･7 発散級数への適用

10･7･1 振動級数への適用

$$\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} = "\sum_{s=1}^{\infty}\sin(sz)" = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\sin(sz) \qquad \begin{array}{l}0<Re(z)<2\pi \\ Im(z)=0\end{array}$$

このフーリエ級数は振動（発散）するが、この変換により総和法が適用される。
その結果、$z = \pi/4 , \pi/3 , \pi/2 , 1$ とすれば

$$"\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}-0 \;{+}{+}{+}{+}{-}{-}{-}{-} \cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$"\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-0 \;{+}{+}{+}{-}{-}{-} \cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$"1 + 0 - 1 - 0 \;{+}{+}{-}{-} \cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$"\sin 1+\sin 2+\sin 3+\sin 4+\cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}$$

10･7･2 発散交代級数への適用

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{(2s)!}{(2s-2)!} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^s\frac{(2s)!}{(2s-2)!} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s\frac{(2s)!}{(2s-3)!} = \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^s\frac{(2s)!}{(2s-3)!} = 0$$

これらの定義域は全自然数であるから、定理10･3･2 (2) により、次のように解釈されなければならない。

$$"1\cdot 2 - 3\cdot 4 + 5\cdot 6 - 7\cdot 8 +- \cdots" = -\frac{1}{2}$$

$$"2\cdot 3\cdot 4 - 4\cdot 5\cdot 6 + 6\cdot 7\cdot 8 - 8\cdot 9\cdot 10 +- \cdots" = 0$$

12 ガンマ関数とその逆数の級数展開

公式 12･1･0 (宇井の公式)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、次が成立する。

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \Gamma(z)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z))$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z))$$

公式 12･1･1 (テイラー展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$ なる a について次式が成立する。

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(a)}{n!}(z-a)^n$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{n-1}(a)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

例　2の周りでのテイラー展開

$$\Gamma(z) = 1 + \frac{\psi_0(2)}{1!}(z-2) + \frac{\psi_0(2)^2+\psi_1(2)}{2!}(z-2)^2 + \frac{\psi_0(2)^3+3\psi_0(2)\psi_1(2)+\psi_2(2)}{3!}(z-2)^3 + \cdots$$

公式 12･1･2 (テイラー展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$ なる a について次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(a)}{n!}(z-a)^n$$

但し

$$c_n(a) = \frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{n-1}(a))$$

例　2の周りでのテイラー展開

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = 1 - \frac{\psi_0(2)}{1!}(z-2) + \frac{\psi_0(2)^2-\psi_1(2)}{2!}(z-2)^2 - \frac{\psi_0(2)^3-3\psi_0(2)\psi_1(2)+\psi_2(2)}{3!}(z-2)^3 +- \cdots$$

公式 12･2･1 (ローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^{n-1}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \frac{\psi_0(1)}{1!} + \frac{\psi_0(1)^2+\psi_1(1)}{2!}z^1 + \frac{\psi_0(1)^3+3\psi_0(1)\psi_1(1)+\psi_2(1)}{3!}z^2 + \cdots$$

公式 12·2·2 (逆ローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^{n+1}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{n-1}(1)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z - \frac{\psi_0(1)}{1!} z^2 + \frac{\psi_0(1)^2 - \psi_1(1)}{2!} z^3 - \frac{\psi_0(1)^3 - 3\psi_0(1)\psi_1(1) + \psi_2(1)}{3!} z^4 + - \cdots$$

公式 12·3·1 (マクローリン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!} z^n$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!} z^n$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!} z^n$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{n-1}(1)\right) n=1,2,3,\cdots$$

公式 12·3·2 (マクローリン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,r}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!} z^n$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1-z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!} z^n$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \dots, \psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

公式 12·3·3 (マクローリン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!} z^n$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

公式 12·4·1（ 1 の周りのテイラー展開）

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(z-1)^n$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!}(z-1)^n$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -(z-1) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!}(z-1)^{n+1}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \quad n=1,2,3,\cdots$$

公式 12·4·2（ 1 の周りのテイラー展開）

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(z-1)^n$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(2), \psi_1(2), \ldots, \psi_{n-1}(2)) \quad n=1,2,3,\cdots$$

公式 12·5·1（ 1 の周りのテイラー展開）

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

公式 12·5·2（ 1 の周りのテイラー展開）

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1+z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

13 多重級数の収束加速

13·1 直列加速法

多重級数は、何らかの方法でこれを半多重級数(1重級数)に変換できたなら、これに加速法が適用できる。これは電気回路における直列回路と似ているので、**直列加速法** と呼ぶことにする。

公式 2·1·0 (再掲)

(0) 多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}$ が絶対収束するとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n}$$

(1) 多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}$ が絶対収束するとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{r_{n-1}} a_{1+r_1-r_2,1+r_2-r_3,\cdots,1+r_{n-1}-r_n,r_n}$$

多重級数から半多重級数への変換方法 (再掲)

多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n}$ に対して次の操作行う。。

r_{n-1} を $r_{n-1}-r_n$ に置換し、右から1番目の ∞ を r_{n-1} に置換する。

r_{n-2} を $r_{n-2}-r_{n-1}$ に置換し、右から2番目の ∞ を r_{n-2} に置換する。

⋮

r_1 を r_1-r_2 に置換し、右から $(n-1)$ 番目の ∞ を r_1 に置換する。

添字が1から始まる(即ち (1))場合は、$1+$ を付加するだけで良い。

例

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r}x^{2r+3}}{(2r-2s+1)(2s-2t+1)(2t+1)}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1r_2r_3r_4} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3}\frac{(-1)^{1+r_1}}{(1+r_1-r_2)(1+r_2-r_3)(1+r_3-r_4)r_4}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{1+r}}{\{(1+r-s)s\}^x}\cos\left(y\log\frac{s}{1+r-s}\right)$$

定理 13·1·2 (直列加速法)

(0) 多重関数項級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}\frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n}(z)$$

(1) 多重関数項級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{r_{n-1}}\frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1} a_{1+r_1-r_2,1+r_2-r_3,\cdots,1+r_{n-1}-r_n,r_n}(z)$$

例1

$$\left(\tan^{-1}x\right)^3=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{(-1)^r x^{2r+3}}{(2r-2s+1)(2s-2t+1)(2t+1)}$$

例2

$$(\log 2)^4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1 r_2 r_3 r_4}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3}\frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1}\frac{(-1)^{1+r_1}}{(1+r_1-r_2)(1+r_2-r_3)(1+r_3-r_4)r_4}$$

例3

$$|\eta(x,y)|^2=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{(-1)^{1+r}}{\{(1+r-s)s\}^x}\cos\left(y\log\frac{s}{1+r-s}\right)$$

13・2 並列加速法

本節では、多重級数を並べ替えずにそのまま加速する方法を提示する。これは電気回路における並列回路と似ているので、**並列加速法**と呼ぶことにする。

公式 13・2・1（並列加速因子）

$$b(r_1,r_2,\cdots,r_n)=\sum_{k=r_1+r_2+\cdots+r_n}^{\infty}\frac{q^{k-r_1-r_2-\cdots-r_n}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1+r_2+\cdots+r_n}=1 \quad \text{for} \quad \begin{array}{l} r_s=0,1,2,\cdots \\ s=1,2,\cdots,n \\ q>0 \end{array}$$

命題 13・2・2（並列加速法）

(0) 多重関数項級数 $\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty}a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、

任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{k}\cdots\sum_{r_n=0}^{k}\frac{q^{k-r_1-r_2-\cdots-r_n}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1+r_2+\cdots+r_n}a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$$

(1) 多重関数項級数 $\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=1}^{\infty}a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、

任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty}a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{k}\cdots\sum_{r_n=1}^{k}\frac{q^{k-r_1-r_2-\cdots-r_n}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1+r_2+\cdots+r_n}a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$$

例1

$$\left(\tan^{-1}x\right)^3=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}\frac{q^{k-r-s-t}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r+s+t}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)}$$

例2

$$(log\,2)^4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1\,r_2\,r_3\,r_4}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{k}\sum_{r_3=1}^{k}\sum_{r_4=1}^{k}\frac{q^{k-r_1-r_2-r_3-r_4}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1+r_2+r_3+r_4}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1\,r_2\,r_3\,r_4}$$

例3

$$|\eta(x,y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}cos\left(y\,log\frac{s}{r}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r+s}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}cos\left(y\,log\frac{s}{r}\right)$$

直列加速法と並列加速法の速度比較

n 重級数の Σ の上限 m が同数のとき、直列加速法は並列加速法よりも最大で $n!$ 倍速い。

4 重級数以上ならば、計算には直列加速法を用いて説明には並列加速法を用いるのが良いであろう。

3 重級数以下ならば、計算にも説明にも並列加速法を用いるのが良いであろう。

14 複素関数の実部虚部別テイラー展開

補題 14･1･0

$x\,,y$ は実数、r は非負の整数とするとき、次式が成立する。

$$(x+iy)^r = \sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}x^{r-2s}y^{2s} + i\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}x^{r-2s-1}y^{2s+1}$$

但し、$0^0=1$, $\lceil x\rceil$ は天井関数 , $\lfloor x\rfloor$ は床関数。

公式 14･1･1

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r\,!}(z-a)^r$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r\,!}\sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}(x-a)^{r-2s}y^{2s}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r\,!}\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}(x-a)^{r-2s-1}y^{2s+1}$$

但し、$0^0=1$, $\lceil x\rceil$ は天井関数 , $\lfloor x\rfloor$ は床関数。

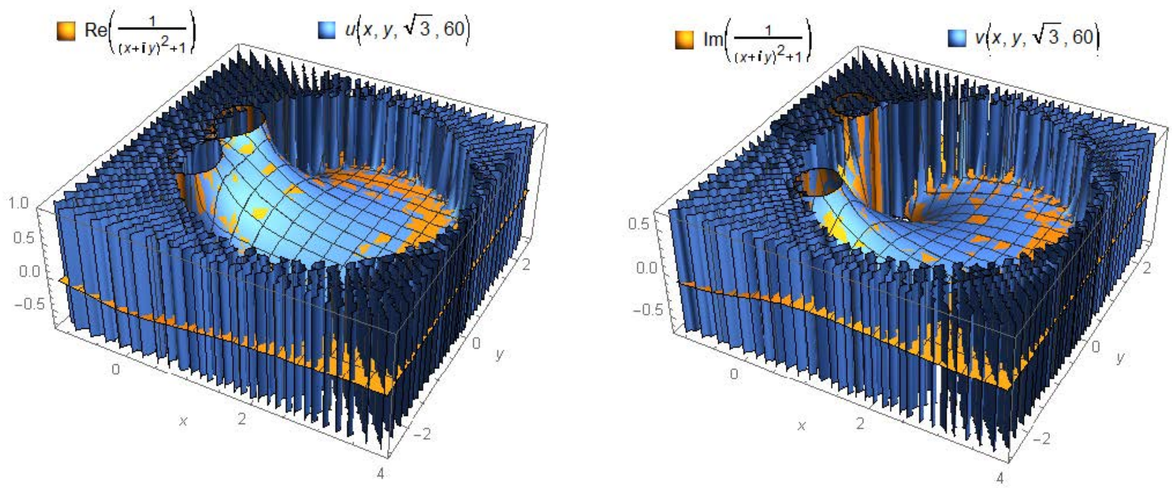
例

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r r\,!}{\left(a^2+1\right)^{(r+1)/2}}\sin\left\{(r+1)\cot^{-1}a\right\}\frac{(z-a)^r}{r\,!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\sin\left\{(r+1)\cot^{-1}a\right\}}{\left(a^2+1\right)^{(r+1)/2}}\sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}(x-a)^{r-2s}y^{2s}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\sin\left\{(r+1)\cot^{-1}a\right\}}{\left(a^2+1\right)^{(r+1)/2}}\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}(x-a)^{r-2s-1}y^{2s+1}$$

$a=\sqrt{3}$ としてこれらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。
両図において橙が左辺で青が右辺である。半径 2 の収束円が観察される。



公式 14･1･2

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

例

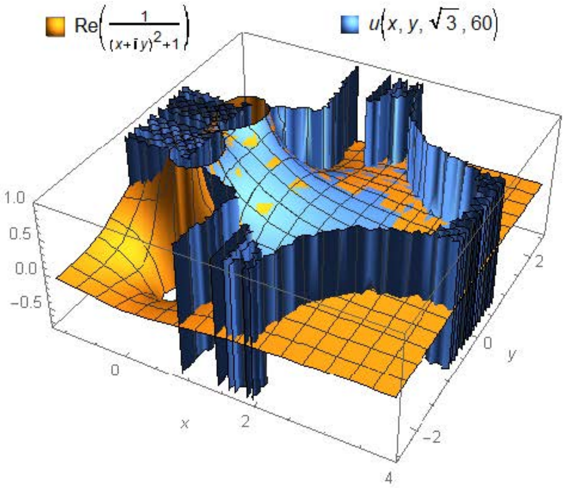
$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r r!}{\left(a^2+1\right)^{(r+1)/2}}\sin\left\{(r+1)\cot^{-1}a\right\}\frac{(z-a)^r}{r!}$$

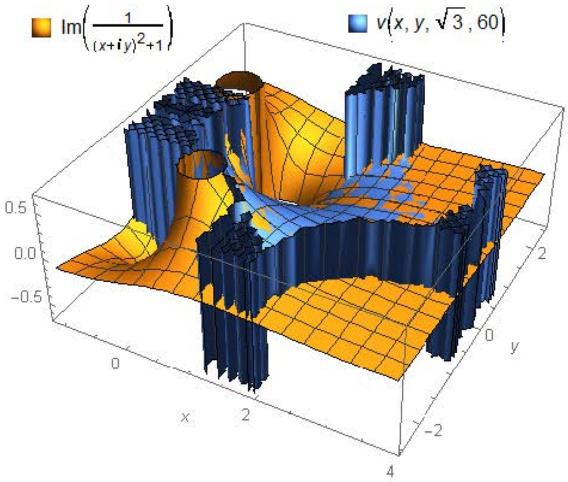
$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2r+s)!}{\left(a^2+1\right)^{(2r+s+1)/2}}\sin\left\{(2r+s+1)\cot^{-1}a\right\}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(2r+s+1)!}{\left(a^2+1\right)^{(2r+s+2)/2}}\sin\left\{(2r+s+2)\cot^{-1}a\right\}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

$a=\sqrt{3}$ としてこれらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





これらの収束域は半径 2 の収束円に内接する正方形である。そして両式は、正方形内では級数、その周辺では漸近展開である。

奇関数や偶関数の場合、公式 14･1･2 はそれぞれ次のようになる。

公式 14･1･2'（奇関数）

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が次のように実係数のマクローリン級数に展開されるとせよ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s+1)}(0)\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$

公式 14･1･2"（偶関数）

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が次のように実係数のマクローリン級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0 = 1$

15 初等関数の実部虚部別テイラー級数

初等関数について以下が成立する。但し $0^0=1$ である。

$1/(1-z)$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{s=0}^{\infty}s!\frac{z^s}{s!} \qquad |z|<1$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$1/(1+z)$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{s=0}^{\infty}s!\frac{(-1)^s z^s}{s!} \qquad |z|<1$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)!\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)!\frac{(-1)^s x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$z^p \quad (p,a \geqq 0)$

$$z^p=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-s)}a^{p-s}\frac{(z-a)^s}{s!} \qquad |z|<|a|$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(p-2r-s+1)}a^{p-2r-s}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(p-2r-s)}a^{p-2r-s-1}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$a^z \quad (a \geq 0)$

$$a^z=\sum_{s=0}^{\infty}\log^s a\frac{z^s}{s!} \qquad |z|<\infty$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\log^{2r+s}a\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\log^{2r+s+1}a\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

特に $a=e$ $(=2.71828\cdots)$ のとき、

$$e^z=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^s}{s!} \qquad |z|<\infty$$

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

log z $(a \geq 0)$

$$\log z = \log a - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)!}{a^s} \frac{(-1)^s (z-a)^s}{s!} \qquad |z-a| \leq a\ ,\ z \neq 0$$

$$u(x,y) = \log a - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)!}{a^s} \frac{(-1)^s (x-a)^s}{s!} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2r+s-1)!}{a^{2r+s}} \frac{(-1)^s (x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2r+s)!}{a^{2r+s+1}} \frac{(-1)^s (x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

***log*(1+*z*)**

$$\log(1+z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} z^s}{s} \qquad |z| \leq 1\ ,\ z \neq -1$$

$$u(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} x^s}{s} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s-1)! \frac{(-1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)! \frac{(-1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

***log*(1-*z*)**

$$\log(1-z) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{s} \qquad |z| \leq 1\ ,\ z \neq 1$$

$$u(x,y) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{s} - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s-1)! \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)! \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

sin z

$$\sin z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

cos z

$$\cos z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

tan z

$$\tan z = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{2^{2s+2}\left(2^{2s+2}-1\right)B_{2s+2}}{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

cot z

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{2^{2s+2}}{2s+2}B_{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

z cot z

$$z\cot z = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2s}B_{2s}\frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s 2^{2r+2s}B_{2r+2s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} 2^{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

sec z

$$\sec z = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s E_{2s}\frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s E_{2r+2s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} E_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

csc z

$$\csc z = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{2^{2s+2}-2}{2s+2}B_{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

z csc z

$$z\csc z = 1 - \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}\frac{x^{2s}}{(2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(2^{2r+2s}-2\right)B_{2r+2s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(2^{2r+2s+2}-2\right)B_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

sinh z

$$\sinh z = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

cosh z

$$\cosh z = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

tanh z

$$\tanh z = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2s+2}\left(2^{2s+2}-1\right)B_{2s+2}}{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

coth z

$$\coth z = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2s+2}}{2s+2}B_{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

z coth z

$$z\,coth\,z = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{2s} B_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} 2^{2r+2s} B_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} 2^{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

sech z

$$sech\,z = \sum_{s=0}^{\infty} E_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} E_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} E_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

csch z

$$csch\,z = \frac{1}{z} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2s+2}-2}{2s+2} B_{2s+2} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

z csch z

$$z\,csch\,z = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (2^{2s}-2) B_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (2^{2s}-2) B_{2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2^{2r+2s}-2) B_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2^{2r+2s+2}-2) B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

sin⁻¹z

$$sin^{-1} z = \sum_{s=0}^{\infty} \{(2s-1)!!\}^2 \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

cos*$^{-1}$*z

$$cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sum_{s=0}^{\infty}\{(2s-1)!!\}^2\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z|\le 1$$

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\{(2r+2s-1)!!\}^2\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\{(2r+2s-1)!!\}^2\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

tan*$^{-1}$*z

$$tan^{-1}x = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z|\le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

cot*$^{-1}$*z

$$cot^{-1}z = sign\{Re(z)\}\frac{\pi}{2} - \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z|\le 1$$

$$u(x,y) = sign(x)\frac{\pi}{2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

sinh*$^{-1}$*z

$$sinh^{-1}z = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\{(2s-1)!!\}^2\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z|\le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\{(2r+2s-1)!!\}^2\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\{(2r+2s-1)!!\}^2\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

tanh*$^{-1}$*z

$$tanh^{-1}z = \sum_{s=0}^{\infty}(2s)!\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z|\le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+2s)!\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

16 ベキ級数の分割

公式 16･2･1 (n 分割)

関数 $f(z)$ が領域 D 上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

そしてこれの n 分割級数 $f(k,n,z)$ $k=0,1,2,\cdots,n-1$ をそれぞれ次のように定める。

$$f(0,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+0} z^{nr+0} = a_0 z^0 + a_n z^n + a_{2n} z^{2n} + a_{3n} z^{3n} + \cdots$$

$$f(1,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+1} z^{nr+1} = a_1 z^1 + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + a_{3n+1} z^{3n+1} + \cdots$$

$$f(2,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+2} z^{nr+2} = a_2 z^2 + a_{n+2} z^{n+2} + a_{2n+2} z^{2n+2} + a_{3n+2} z^{3n+2} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f(n-1,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+n-1} z^{nr+n-1} = a_{n-1} z^{n-1} + a_{2n-1} z^{2n-1} + a_{3n-1} z^{3n-1} + a_{4n-1} z^{4n-1} + \cdots$$

すると、$n = 2,3,4,\cdots$, $k = 0,1,2,\cdots,n-1$ について次式が成立する。

$$f(k,n,z) = \frac{f(z) - \lambda_n (-1)^k f(-z)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^{-\frac{2sk}{n}} f\left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} z \right\} + (-1)^{\frac{2sk}{n}} f\left\{ (-1)^{-\frac{2s}{n}} z \right\} \right]$$

但し、$\lambda_n = \{1+(-1)^n\}/2$, $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

公式 16･2･2 (交代 n 分割)

関数 $f(z)$ が領域 D 上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

そしてこれの交代 n 分割級数 $\underline{f}(k,n,z)$ $k=0,1,2,\cdots,n-1$ をそれぞれ次のように定める。

$$\underline{f}(0,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+0} z^{nr+0} = a_0 z^0 - a_n z^n + a_{2n} z^{2n} - a_{3n} z^{3n} + - \cdots$$

$$\underline{f}(1,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+1} z^{nr+1} = a_1 z^1 - a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} - a_{3n+1} z^{3n+1} + - \cdots$$

$$\underline{f}(2,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+2} z^{nr+2} = a_2 z^2 - a_{n+2} z^{n+2} + a_{2n+2} z^{2n+2} - a_{3n+2} z^{3n+2} + - \cdots$$

$$\vdots$$

$$\underline{f}(n-1,n,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+n-1} z^{nr+n-1} = a_{n-1} z^{n-1} - a_{2n-1} z^{2n-1} + a_{3n-1} z^{3n-1} - a_{4n-1} z^{4n-1} + - \cdots$$

すると、$n = 2,3,4,\cdots$, $k = 0,1,2,\cdots,n-1$ について次式が成立する。

$$\underline{f}(k,n,z) = \underline{\lambda}_n \frac{(-1)^k f(-z)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^{-\frac{(2s-1)k}{n}} f\left\{ (-1)^{\frac{2s-1}{n}} z \right\} + (-1)^{\frac{(2s-1)k}{n}} f\left\{ (-1)^{-\frac{2s-1}{n}} z \right\} \right]$$

但し、$\underline{\lambda}_n = \{1-(-1)^n\}/2$, $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

16·3 ベキ級数の2分割

例1 指数級数の2分割

$$f(z) = 1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots = e^z \qquad (\text{被分割級数})$$

$$f(0,2,z) = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}+\cdots = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = cosh\, z$$

$$f(1,2,z) = \frac{z^1}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{11}}{11!}+\cdots = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = sinh\, z$$

例2 ベルヌーイ数の母関数の2分割

$$f(z) = 1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}-\frac{z^4}{720}+\frac{z^6}{30240}-\frac{z^8}{1209600}+-\cdots = \frac{z}{e^z-1} \qquad (\text{被分割級数})$$

$$f(0,2,z) = 1+\frac{z^2}{12}-\frac{z^4}{720}+\frac{z^6}{30240}-\frac{z^8}{1209600}+-\cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^z-1}+\frac{-z}{e^{-z}-1}\right) = \frac{z}{2}coth\frac{z}{2}$$

$$f(1,2,z) = -\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^z-1}-\frac{-z}{e^{-z}-1}\right) = -\frac{z}{2}$$

例$\underline{1}$ 指数級数の交代2分割

$$f(z) = 1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots = e^z \qquad (\text{被分割級数})$$

$$\underline{f}(0,2,z) = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\frac{z^{10}}{10!}+-\cdots = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = cos\, z$$

$$\underline{f}(1,2,z) = \frac{z^1}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+-\cdots = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = sin\, z$$

例$\underline{2}$ ベルヌーイ数の母関数の交代2分割

$$f(z) = 1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}-\frac{z^4}{720}+\frac{z^6}{30240}-\frac{z^8}{1209600}+-\cdots = \frac{z}{e^z-1} \qquad (\text{被分割級数})$$

$$\underline{f}(0,2,z) = 1-\frac{z^2}{12}-\frac{z^4}{720}-\frac{z^6}{30240}-\frac{z^8}{1209600}-\cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{iz}{e^{iz}-1}+\frac{-iz}{e^{-iz}-1}\right) = \frac{z}{2}cot\frac{z}{2}$$

$$\underline{f}(1,2,z) = -\frac{z}{2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{iz}{e^{iz}-1}-\frac{-iz}{e^{-iz}-1}\right) = -\frac{z}{2}$$

16·3·3 偶関数、奇関数の2分割

　$f(z)$ が偶関数または奇関数のとき、それは 16·3·1 によっては2分割できない。
このような場合には次の公式によって2分割できる。

(1) $\boldsymbol{f(z)}$ が偶関数のとき

$$f(0,2,z) = \frac{f(z)+f(iz)}{2} \quad , \quad f(1,2,z) = \frac{f(z)-f(iz)}{2}$$

(2) $\boldsymbol{f(z)}$ が奇関数のとき

$$f(0,2,z) = \frac{f(z)+i^{-1}f(iz)}{2} , \quad f(1,2,z) = \frac{f(z)-i^{-1}f(iz)}{2}$$

例1　$f(z) = \cosh z$

$$1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}+\cdots = \cosh z \qquad (\text{被分割級数})$$

$$1+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{12}}{12!}+\frac{z^{16}}{16!}+\frac{z^{20}}{20!}+\cdots = \frac{\cosh z + \cos z}{2}$$

$$\frac{z^2}{2!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^{10}}{10!}+\frac{z^{14}}{14!}+\frac{z^{18}}{18!}+\cdots = \frac{\cosh z - \cos z}{2}$$

特に$z=1$のとき

$$1+\frac{1}{4!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{16!}+\frac{1}{20!}+\cdots = \frac{\cosh 1 + \cos 1}{2} = 1.04169147\cdots$$

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{14!}+\frac{1}{18!}+\cdots = \frac{\cosh 1 - \cos 1}{2} = 0.50138916\cdots$$

例2　$f(z) = \sinh z$

$$\frac{z^1}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{11}}{11!}+\cdots = \sinh z \qquad (\text{被分割級数})$$

$$\frac{z^1}{1!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{13}}{13!}+\frac{z^{17}}{17!}+\cdots = \frac{\sinh z + \sin z}{2}$$

$$\frac{z^3}{3!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^{11}}{11!}+\frac{z^{15}}{15!}+\frac{z^{19}}{19!}+\cdots = \frac{\sinh z - \sin z}{2}$$

特に$z=1$のとき

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{13!}+\frac{1}{17!}+\cdots = \frac{\sinh 1 + \sin 1}{2} = 1.00833608\cdots$$

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{15!}+\frac{1}{19!}+\cdots = \frac{\sinh 1 - \sin 1}{2} = 0.16686510\cdots$$

16･4 ベキ級数の3分割

例1 指数級数の3分割

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots = e^z \qquad (\text{被分割級数})$$

$$1+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{12}}{12!}+\frac{z^{15}}{15!}+\cdots = \frac{e^z}{3}+\frac{e^{(-1)^{2/3}z}+e^{(-1)^{-2/3}z}}{3} = \frac{e^z}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e^z}}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

$$\frac{z^1}{1!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^{10}}{10!}+\frac{z^{13}}{13!}+\frac{z^{16}}{16!}+\cdots = \frac{e^z}{3}+\frac{(-1)^{-2/3}e^{(-1)^{2/3}z}+(-1)^{2/3}e^{(-1)^{-2/3}z}}{3}$$

$$= \frac{e^z}{3}-\frac{1}{3\sqrt{e^z}}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}+\frac{1}{\sqrt{3e^z}}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

$$\frac{z^2}{2!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{11}}{11!}+\frac{z^{14}}{14!}+\frac{z^{17}}{17!}+\cdots = \frac{e^z}{3}+\frac{(-1)^{-4/3}e^{(-1)^{2/3}z}+(-1)^{4/3}e^{(-1)^{-2/3}z}}{3}$$

$$= \frac{e^z}{3}-\frac{1}{3\sqrt{e^z}}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}-\frac{1}{\sqrt{3e^z}}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

特に$z=1$のとき

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{15!}+\cdots = \frac{e}{3}+\frac{2\cos\left(\sqrt{3}/2\right)}{3\sqrt{e}} = 1.16805831\cdots$$

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{13!}+\frac{z^{16}}{16!}+\cdots = \frac{e}{3}-\frac{\cos(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}}+\frac{\sin(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} = 1.04186535\cdots$$

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{14!}+\frac{1}{17!}+\cdots = \frac{e}{3}-\frac{\cos(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}}-\frac{\sin(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} = 0.50835816\cdots$$

例2 対数級数の3分割（ $|z|<1,\ z\neq 1$）

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\cdots = -\log(1-z)$$ （被分割級数）

$$\frac{z^3}{3}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{12}}{12}+\frac{z^{15}}{15}+\frac{z^{18}}{18}+\cdots = -\frac{\log(1-z)}{3} - \frac{\log\{1-(-1)^{2/3}z\}+\log\{1-(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^{10}}{10}+\frac{z^{13}}{13}+\frac{z^{16}}{16}+\cdots = -\frac{\log(1-z)}{3} - \frac{(-1)^{-2/3}\log\{1-(-1)^{2/3}z\}+(-1)^{2/3}\log\{1-(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$$\frac{z^2}{2}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^{11}}{11}+\frac{z^{14}}{14}+\frac{z^{17}}{17}+\cdots = -\frac{\log(1-z)}{3} - \frac{(-1)^{-4/3}\log\{1-(-1)^{2/3}z\}+(-1)^{4/3}\log\{1-(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$z=1/3$ のとき

$$\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{6\cdot 3^6}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{12\cdot 3^{12}}+\frac{1}{15\cdot 3^{15}}+\frac{1}{18\cdot 3^{18}}+\cdots = \frac{1}{3}\log\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\log\frac{13}{9} = 0.01258010\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{10\cdot 3^{10}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\frac{1}{16\cdot 3^{16}}+\cdots = \frac{1}{3}\log\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\log\frac{13}{9}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{7} = 0.33648681\cdots$$

$$\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{8\cdot 3^8}+\frac{1}{11\cdot 3^{10}}+\frac{1}{14\cdot 3^{14}}+\frac{1}{17\cdot 3^{17}}+\cdots = \frac{1}{3}\log\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\log\frac{13}{9}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{7} = 0.05639818\cdots$$

例1 指数級数の交代3分割

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots = e^z$$ （被分割級数）

$$1-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{12}}{12!}-\frac{z^{15}}{15!}+\cdots = \frac{(-1)^0e^{-z}}{3}+\frac{e^{(-1)^{1/3}z}+e^{(-1)^{-1/3}z}}{3} = \frac{1}{3e^z}+\frac{2\sqrt{e^z}}{3}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

$$\frac{z^1}{1!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^{10}}{10!}+\frac{z^{13}}{13!}-\frac{z^{16}}{16!}+\cdots = \frac{(-1)^1e^{-z}}{3}+\frac{(-1)^{-1/3}e^{(-1)^{1/3}z}+(-1)^{1/3}e^{(-1)^{-1/3}z}}{3} = -\frac{1}{3e^z}+\frac{\sqrt{e^z}}{3}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}+\sqrt{\frac{e^z}{3}}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

$$\frac{z^2}{2!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^8}{8!}-\frac{z^{11}}{11!}+\frac{z^{14}}{14!}-\frac{z^{17}}{17!}+\cdots = \frac{(-1)^2e^{-z}}{3}+\frac{(-1)^{-2/3}e^{(-1)^{1/3}z}+(-1)^{2/3}e^{(-1)^{-1/3}z}}{3}$$

$$= \frac{1}{3e^z} - \frac{\sqrt{e^z}}{3} \cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2} + \sqrt{\frac{e^z}{3}} \sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

特にz=1のとき

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{12!} - \frac{1}{15!} + - \cdots = \frac{1}{3e} + \frac{2}{3}\sqrt{e}\cos\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.83471946\cdots$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{10!} + \frac{1}{13!} - \frac{1}{16!} + - \cdots = \frac{1}{3e} + \frac{1}{3}\sqrt{e}\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{e}{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 0.95853147\cdots$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{14!} - \frac{1}{17!} + - \cdots = \frac{1}{3e} - \frac{1}{3}\sqrt{e}\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{e}{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 0.49169144\cdots$$

例2 対数級数の交代3分割（ $|z| \le 1$ ）

$$\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \cdots = -log(1-z) \qquad （被分割級数）$$

$$-\frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{6} - \frac{z^9}{9} + \frac{z^{12}}{12} - \frac{z^{15}}{15} + \frac{z^{18}}{18} - + \cdots = -\frac{log(1+z)}{3}$$
$$- \frac{log\{1-(-1)^{1/3}z\} + log\{1-(-1)^{-1/3}z\}}{3}$$

$$\frac{z^1}{1} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{16}}{16} + - \cdots = -\frac{(-1)^1 log(1+z)}{3}$$
$$- \frac{(-1)^{-1/3} log\{1-(-1)^{1/3}z\} + (-1)^{1/3} log\{1-(-1)^{-1/3}z\}}{3}$$

$$\frac{z^2}{2} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^8}{8} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{14}}{14} - \frac{z^{17}}{17} + - \cdots = -\frac{(-1)^2 log(1+z)}{3}$$
$$- \frac{(-1)^{-2/3} log\{1-(-1)^{1/3}z\} + (-1)^{2/3} log\{1-(-1)^{-1/3}z\}}{3}$$

特にz=1のとき

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - + \cdots = -\frac{log\,2}{3} = -0.23104906\cdots$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + - \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + log\,2\right) = 0.83564884\cdots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + - \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - log\,2\right) = 0.37355072\cdots$$

16・5 ベキ級数の4分割

例1 対数級数の交代4分割（ $|z| \le 1$ ）

$$\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \cdots = -log(1-z) \qquad （被分割級数）$$

これを4分割し、z=1を代入すれば

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{20} + \frac{1}{24} - + \cdots = -\frac{log\,2}{4} = -0.17328679\cdots$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + - \cdots = \frac{\pi + 2arccoth\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 0.86697298\cdots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}+-\cdots=\frac{\pi}{8}\qquad=0.39269908\cdots$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+-\cdots=\frac{\pi-2arccoth\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\quad=0.24374774\cdots$$

例2 指数級数の交代4分割

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots=e^z\qquad(\text{被分割級数})$$

$$1-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^8}{8!}-\frac{z^{12}}{12!}+\frac{z^{16}}{16!}-\frac{z^{20}}{20!}+-\cdots=\frac{e^{(-1)^{1/4}z}+e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}+\frac{e^{(-1)^{3/4}z}+e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$=cosh\frac{z}{\sqrt{2}}\cdot cos\frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{z^1}{1!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{13}}{13!}+\frac{z^{17}}{17!}+\frac{z^{21}}{21!}+-\cdots=\frac{(-1)^{-1/4}e^{(-1)^{1/4}z}+(-1)^{1/4}e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}$$

$$+\frac{(-1)^{-3/4}e^{(-1)^{3/4}z}+(-1)^{3/4}e^{(-1)^{-3/4}z}}{5}$$

$$=\frac{e^{z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{z}{\sqrt{2}}+sin\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-\frac{e^{-z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{z}{\sqrt{2}}-sin\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{z^2}{2!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^{10}}{10!}-\frac{z^{14}}{14!}+\frac{z^{18}}{18!}-\frac{z^{22}}{22!}+-\cdots=\frac{(-1)^{-2/4}e^{(-1)^{1/4}z}+(-1)^{2/4}e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}$$

$$+\frac{(-1)^{-6/4}e^{(-1)^{3/4}z}+(-1)^{6/4}e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$=sinh\frac{z}{\sqrt{2}}\cdot sin\frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{z^3}{3!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^{11}}{11!}-\frac{z^{15}}{15!}+\frac{z^{19}}{19}-\frac{z^{23}}{23!}+-\cdots=\frac{(-1)^{-3/4}e^{(-1)^{1/4}z}+(-1)^{3/4}e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}$$

$$+\frac{(-1)^{-9/4}e^{(-1)^{3/4}z}+(-1)^{9/4}e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$=-\frac{e^{z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{z}{\sqrt{2}}-sin\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\frac{e^{-z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{z}{\sqrt{2}}+sin\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

特に$z=1$のとき

$$1-\frac{1}{4!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{12!}+\frac{1}{16!}-\frac{1}{20!}+-\cdots=cos\frac{1}{\sqrt{2}}cosh\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad=0.95835813\cdots$$

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{13!}+\frac{1}{17!}-\frac{1}{21!}+-\cdots=\frac{1-i}{2\sqrt{2}}\left(sin\frac{1+i}{\sqrt{2}}+sinh\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=0.99166942\cdots$$

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{10!}-\frac{1}{14!}+\frac{1}{18!}-\frac{1}{22!}+-\cdots=sin\frac{1}{\sqrt{2}}sinh\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad=0.49861138\cdots$$

$$\frac{1}{3!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{11!}-\frac{1}{15!}+\frac{1}{19}-\frac{1}{23!}+-\cdots=\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\left(sin\frac{1+i}{\sqrt{2}}-sinh\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=0.16646827\cdots$$

16・6 ベキ級数の5分割

例2 対数級数の5分割（$|z|<1,\ z\neq 1$）

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\cdots \quad = -\log(1-z) \qquad \text{(被分割級数)}$$

$z=1/2$ を代入すれば

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots \quad =\log 2 \qquad = 0.69314718\cdots$$

これを5分割すれば

$$\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{10\cdot 2^{10}}+\frac{1}{15\cdot 2^{15}}+\frac{1}{20\cdot 2^{20}}+\frac{1}{25\cdot 2^{25}}+\frac{1}{30\cdot 2^{30}}+\cdots =\log 2-\frac{\log 31}{5} = 0.00634973\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\frac{1}{16\cdot 2^{16}}+\frac{1}{21\cdot 2^{21}}+\frac{1}{26\cdot 2^{26}}+\cdots = 0.50264953\cdots$$

$$\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{12\cdot 2^{12}}+\frac{1}{17\cdot 2^{17}}+\frac{1}{22\cdot 2^{22}}+\frac{1}{27\cdot 2^{27}}+\cdots = 0.12613687\cdots$$

$$\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{8\cdot 2^8}+\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\frac{1}{18\cdot 2^{18}}+\frac{1}{23\cdot 2^{23}}+\frac{1}{28\cdot 2^{28}}+\cdots = 0.04216455\cdots$$

$$\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{14\cdot 2^{14}}+\frac{1}{19\cdot 2^{19}}+\frac{1}{24\cdot 2^{24}}+\frac{1}{29\cdot 2^{29}}+\cdots = 0.01584647\cdots$$

例2 対数級数の交代5分割 ($|z| \le 1$)

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\cdots \quad = -\log(1-z) \qquad \text{(被分割級数)}$$

これを交代5分割し、$z=1$ を代入すれば

$$-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{20}-\frac{1}{25}+\frac{1}{30}-+\cdots = -0.13862943\cdots = -\frac{\log 2}{5}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{21}-\frac{1}{26}+-\cdots = 0.88831357\cdots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}+\frac{1}{22}-\frac{1}{27}+-\cdots = 0.40690163\cdots$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{13}-\frac{1}{18}+\frac{1}{23}-\frac{1}{28}+-\cdots = 0.25375156\cdots$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}+\frac{1}{24}-\frac{1}{29}+-\cdots = 0.18064575\cdots$$

Note

公式中の $(-1)^{m/n}$ ($m,n = 1,2,3,\cdots$) を初等超越関数や根号で表すことは可能である。
しかし、5分割以上の場合、それらは非常にややこしいものになる。

17 実係数多項式の実部虚部別表現

公式 17･1･1

a は実数で $f_n(z)$ $(z=x+iy)$ は次のような実係数の多項式とする。

$$f_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r!}(z-a)^r$$

するとこの実部 $u_n(x,y)$ と虚部 $v_n(x,y)$ について次式が成立する。

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\lceil \frac{r-1}{2} \rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s}$$

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

但し、$0^0=1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

公式 17･1･2

a は実数で $f_n(z)$ $(z=x+iy)$ は次のような実係数の多項式とする。

$$f_n(z) = \sum_{s=0}^{n} f_n^{(s)}(a) \frac{(z-a)^s}{s!}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \sum_{s=0}^{n-2r} f_n^{(2r+s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{n-2r-1} f_n^{(2r+s+1)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

公式 17･1･2’ (奇多項式)

複素関数 f_{2n+1} $(z=x+iy)$ が次のように実係数の多項式で表されるとせよ。

$$f_{2n+1}(z) = \sum_{s=0}^{n} f_{2n+1}^{(2s+1)}(0) \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

するとこの実部 $u_{2n+1}(x,y)$ と虚部 $v_{2n+1}(x,y)$ について次式が成立する。(但し、$0^0=1$。)

$$u_{2n+1}(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} f_{2n+1}^{(2r+2s+1)}(0) \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_{2n+1}(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} f_{2n+1}^{(2r+2s+1)}(0) \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

公式 17･1･2” (偶多項式)

複素関数 f_{2n} $(z=x+iy)$ が次のように実係数の多項式で表されるとせよ。

$$f_{2n}(z) = \sum_{s=0}^{n} f_{2n}^{(2s)}(0) \frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

するとこの実部 $u_{2n}(x,y)$ と虚部 $v_{2n}(x,y)$ について次式が成立する。(但し、$0^0=1$。)

$$u_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} f_{2n}^{(2r+2s)}(0) \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1-r} f_{2n}^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

例1：円分方程式

$$C_n(z) = \sum_{s=0}^{n} s!\frac{z^s}{s!} \qquad \left(= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \right)$$

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\sum_{s=0}^{n-2r} (2r+s)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\sum_{s=0}^{n-2r-1} (2r+s+1)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$n=5$ のとき、

$$u_5(x,y) = \sum_{r=0}^{\lceil \frac{5-1}{2} \rceil}\sum_{s=0}^{5-2r} (2r+s)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$= \left(0!\frac{x^0}{0!} + 1!\frac{x^1}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^4}{4!} + 5!\frac{x^5}{5!} \right)\frac{y^0}{0!}$$

$$- \left(2!\frac{x^0}{0!} + 3!\frac{x^1}{1!} + 4!\frac{x^2}{2!} + 5!\frac{x^3}{3!} \right)\frac{y^2}{2!} + \left(4!\frac{x^0}{0!} + 5!\frac{x^1}{1!} \right)\frac{y^4}{4!}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - y^2 - 3\,x\,y^2 - 6\,x^2\,y^2 - 10\,x^3\,y^2 + y^4 + 5\,x\,y^4$$

$$v_5(x,y) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{5-1}{2} \rfloor}\sum_{s=0}^{5-2r-1} (2r+s+1)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$= \left(1!\frac{x^0}{0!} + 2!\frac{x^1}{1!} + 3!\frac{x^2}{2!} + 4!\frac{x^3}{3!} + 5!\frac{x^4}{4!} \right)\frac{y^1}{1!}$$

$$- \left(3!\frac{x^0}{0!} + 4!\frac{x^1}{1!} + 5!\frac{x^2}{2!} \right)\frac{y^3}{3!} + \left(5!\frac{x^0}{0!} \right)\frac{y^5}{5!}$$

$$= y + 2\,x\,y + 3\,x^2\,y + 4\,x^3\,y + 5\,x^4\,y - y^3 - 4\,x\,y^3 - 10\,x^2\,y^3 + y^5$$

例2：ベルヌーイ多項式

$$B_n(z) = n!\sum_{s=0}^{n}\frac{B_{n-s}}{(n-s)!}\frac{z^s}{s!} \qquad \left(= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} B_{n-s} z^s \right)$$

$$u_n(x,y) = n!\sum_{r=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\sum_{s=0}^{n-2r}\frac{B_{n-2r-s}}{(n-2r-s)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v_n(x,y) = n!\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\sum_{s=0}^{n-2r-1}\frac{B_{n-2r-s-1}}{(n-2r-s-1)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$n=6$ のとき、

$$u_6(x,y) = 6!\sum_{r=0}^{\lceil \frac{6-1}{2} \rceil}\sum_{s=0}^{6-2r}\frac{B_{6-2r-s}}{(6-2r-s)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$= 6!\left(\frac{B_6}{6!}\frac{x^0}{0!} + \frac{B_5}{5!}\frac{x^1}{1!} + \frac{B_4}{4!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_3}{3!}\frac{x^3}{3!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^4}{4!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^5}{5!} + \frac{B_0}{0!}\frac{x^6}{6!} \right)\frac{y^0}{0!}$$

$$- 6!\left(\frac{B_4}{4!}\frac{x^0}{0!} + \frac{B_3}{3!}\frac{x^1}{1!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^3}{3!} + \frac{B_0}{0!}\frac{x^4}{4!} \right)\frac{y^2}{2!}$$

$$+\,6!\left(\frac{B_2}{2!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^2}{2!}\right)\frac{y^4}{4!}-6!\left(\frac{B_0}{0}\frac{x^0}{0}\right)\frac{y^6}{6!}$$

$$=720\left(\frac{1}{30240}-\frac{x^2}{1440}+\frac{x^4}{288}-\frac{x^5}{240}+\frac{x^6}{720}\right.$$

$$\left.+\frac{y^2}{1440}-\frac{x^2y^2}{48}+\frac{x^3y^2}{24}-\frac{x^4y^2}{48}+\frac{y^4}{288}-\frac{xy^4}{48}+\frac{x^2y^4}{48}-\frac{y^6}{720}\right)$$

$$v_6(x,y)=6!\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{6-1}{2}\rfloor}\sum_{s=0}^{6-2r-1}\frac{B_{6-2r-s-1}}{(6-2r-s-1)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$=\ 6!\left(\frac{B_5}{5!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_4}{4!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_3}{3!}\frac{x^2}{2!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^3}{3!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^4}{4!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^5}{5!}\right)\frac{y^1}{1!}$$

$$-\,6!\left(\frac{B_3}{3!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^2}{2!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^3}{3!}\right)\frac{y^3}{3!}+6!\left(\frac{B_1}{1!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^1}{1!}\right)\frac{y^5}{5!}$$

$$=720\left(-\frac{xy}{720}+\frac{x^3y}{72}-\frac{x^4y}{48}+\frac{x^5y}{120}-\frac{xy^3}{72}+\frac{x^2y^3}{24}-\frac{x^3y^3}{36}-\frac{y^5}{240}+\frac{xy^5}{120}\right)$$

18 項の符号を等差的に反転したベキ級数

公式 18・1・1

整数 $n=2,3,4,\cdots$, $k=0,1,2,\cdots$ について、級数 $f(z)$ 及びその分割級数 $f(k,n,z)$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

$$f(k,n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{nr+k} z^{nr+k} = a_k z^k + a_{n+k} z^{n+k} + a_{2n+k} z^{2n+k} + a_{3n+k} z^{3n+k} + \cdots$$

すると、$f(z)$ の項 $a_{nr+k}\,z^{nr+k}$ $r=0,1,2,\cdots$ の符号を反転させた級数 $g(k,n,z)$ は次式で与えられる。

$$g(k,n,z)=\frac{n-2}{n}f(z)+\frac{2}{n}\left\{\lambda_n(-1)^k f(-z)\right\}$$
$$-\frac{2}{n}\sum_{s=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left[(-1)^{-\frac{2sk}{n}} f\left\{(-1)^{\frac{2s}{n}}z\right\}+(-1)^{\frac{2sk}{n}} f\left\{(-1)^{-\frac{2s}{n}}z\right\}\right]$$

但し、$\lambda_n=\left\{1+(-1)^n\right\}/2$, $\lfloor x\rfloor$ は床関数。

18・2 3次間隔での符号反転

例1 指数級数の3次間隔での符号反転

元の級数

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots = e^z$$

符号が反転された級数

$$-1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}++-\cdots = \frac{e^z}{3}-\frac{2}{3}\left\{e^{(-1)^{2/3}z}+e^{(-1)^{-2/3}z}\right\}$$
$$=\frac{e^z}{3}-\frac{4}{3\sqrt{e^z}}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

$$1-\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-++\cdots = \frac{e^z}{3}-\frac{2}{3}\left\{(-1)^{-2/3}e^{(-1)^{2/3}z}+(-1)^{2/3}e^{(-1)^{-2/3}z}\right\}$$
$$=\frac{e^z}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e^z}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}\right)$$

$$1+\frac{z^1}{1!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+-+\cdots = \frac{e^z}{3}-\frac{2}{3}\left\{(-1)^{-4/3}e^{(-1)^{2/3}z}+(-1)^{4/3}e^{(-1)^{-2/3}z}\right\}$$
$$=\frac{e^z}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e^z}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}\right)$$

$z=1$ のとき

$$-1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}++-\cdots = \frac{e}{3}-\frac{4\cos\left(\sqrt{3}/2\right)}{3\sqrt{e}} = 0.38216520\cdots$$

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-++\cdots = \frac{e}{3}+\frac{2\cos\left(\sqrt{3}/2\right)}{3\sqrt{e}}-\frac{2\sin\left(\sqrt{3}/2\right)}{\sqrt{3e}}$$
$$= 0.63455111\cdots$$

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+-+\cdots = \frac{e}{3}+\frac{2\cos\left(\sqrt{3}/2\right)}{3\sqrt{e}}+\frac{2\sin\left(\sqrt{3}/2\right)}{\sqrt{3e}}$$
$$= 1.70156550\cdots$$

例2 対数級数の3次間隔での符号反転 ($|z|<1,\ z\neq 1$)

元の級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\cdots = -\log(1-z)$$

符号が反転された級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+-+\cdots = -\frac{1}{3}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{3}\left[\log\left\{1-(-1)^{2/3}z\right\}+\log\left\{1-(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$$-\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}-\frac{z^7}{7}++-\cdots = -\frac{1}{3}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{3}\left[(-1)^{-2/3}\log\left\{1-(-1)^{2/3}z\right\}+(-1)^{2/3}\log\left\{1-(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$$\frac{z^1}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}-++\cdots = -\frac{1}{3}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{3}\left[(-1)^{-4/3}\log\left\{1-(-1)^{2/3}z\right\}+(-1)^{4/3}\log\left\{1-(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$z=1/2$ のとき

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot2^2}-\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}+\frac{1}{5\cdot2^5}-\frac{1}{6\cdot2^6}+\frac{1}{7\cdot2^7}+-+\cdots = \frac{1}{3}\log\frac{49}{8} = 0.60412625\cdots$$

$$-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}-\frac{1}{4\cdot2^4}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{6\cdot2^6}-\frac{1}{7\cdot2^7}++-\cdots = \frac{1}{3}\left(\log\frac{8}{7}-2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$
$$= -0.34055118\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}-\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{6\cdot2^6}+\frac{1}{7\cdot2^7}-++\cdots = \frac{1}{3}\left(\log\frac{8}{7}+2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$
$$= 0.42957211\cdots$$

18・3 4次間隔での符号反転

例1 二項級数の4次間隔での符号反転 ($|z|<1,\ z\neq 1$)

元の級数

$$1+\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3+\frac{7!!}{8!!}z^4+\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7+\cdots = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

符号が反転された級数

$$-1+\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3-\frac{7!!}{8!!}z^4+\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7-+++\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)$$

$$1-\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3+\frac{7!!}{8!!}z^4-\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7+-++\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-2/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{(-1)^{2/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{(-1)^{4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)$$

$$1+\frac{1!!}{2!!}z^1-\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3+\frac{7!!}{8!!}z^4+\frac{9!!}{10!!}z^5-\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7++-+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{(-1)^{4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-8/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{(-1)^{8/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)$$

$$1+\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2-\frac{5!!}{6!!}z^3+\frac{7!!}{8!!}z^4+\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6-\frac{13!!}{14!!}z^7+++-\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{(-1)^{6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{(-1)^{12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)$$

$z=1/2$ のとき

$$-1+\frac{1!!}{2^1 2!!}+\frac{3!!}{2^2 4!!}+\frac{5!!}{2^3 6!!}-\frac{7!!}{2^4 8!!}+\frac{9!!}{2^5 10!!}+\frac{11!!}{2^6 12!!}+\frac{13!!}{2^7 14!!}-+++\cdots=-0.62158357$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{5}}$$

$$1-\frac{1!!}{2^1 2!!}+\frac{3!!}{2^2 4!!}+\frac{5!!}{2^3 6!!}+\frac{7!!}{2^4 8!!}-\frac{9!!}{2^5 10!!}+\frac{11!!}{2^6 12!!}+\frac{13!!}{2^7 14!!}+-++\cdots=0.89806817$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{5}}$$

$$1+\frac{1!!}{2^1 2!!}-\frac{3!!}{2^2 4!!}+\frac{5!!}{2^3 6!!}+\frac{7!!}{2^4 8!!}+\frac{9!!}{2^5 10!!}-\frac{11!!}{2^6 12!!}+\frac{13!!}{2^7 14!!}++-+\cdots=1.21930055$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{5}}$$

$$1+\frac{1!!}{2^1 2!!}+\frac{3!!}{2^2 4!!}-\frac{5!!}{2^3 6!!}+\frac{7!!}{2^4 8!!}+\frac{9!!}{2^5 10!!}+\frac{11!!}{2^6 12!!}-\frac{13!!}{2^7 14!!}+++-\cdots=1.33264196$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{5}}$$

例2 対数級数の4次間隔での符号反転（ $|z|<1,\ z\neq 1$ ）

元の級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+\cdots=-\log(1-z)$$

符号が反転された級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^8}{8}+++-\cdots=\arctan z+\frac{\log(1-iz)+\log(1+iz)}{2}$$
$$-\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}-+++\cdots=-\arctan z-\frac{\log(1-z)+\log(1+z)}{2}$$
$$\frac{z^1}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+-++\cdots=\arctan z-\frac{\log(1-iz)+\log(1+iz)}{2}$$
$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}++-+\cdots=\arctan z-\frac{\log(1-z)+\log(1+z)}{2}$$

$z=1/2$ のとき

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}-\frac{1}{8\cdot 2^8}+++-\cdots=\frac{1}{2}\log\frac{15}{4}=0.66087792\cdots$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}-+++\cdots=-\operatorname{arccot}2+\log 2-\frac{\log 3}{2}$$
$$=-0.31980657\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}+-++\cdots=\frac{1}{2}\log\frac{12}{5}=0.43773436\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}++-+\cdots=\operatorname{arccot}2+\log 2-\frac{\log 3}{2}$$
$$=0.60748864\cdots$$

例3 指数級数の4次間隔での符号反転

元の級数

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\cdots=e^z$$

符号が反転された級数

$$-1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^8}{8!}+++-\cdots=e^z-\cosh z-\cos z$$

$$1-\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}-+++\cdots=e^z-\sinh z-\sin z$$

$$1+\frac{z^1}{1!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+-++\cdots=e^z-\cosh z+\cos z$$

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}++-+\cdots=e^z-\sinh z+\sin z$$

$z=1$ のとき

$$-1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}+++-\cdots=e-\cosh 1-\cos 1=0.63489888\cdots$$

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-+++\cdots=e-\sinh 1-\sin 1=0.70160965\cdots$$

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+-++\cdots=e-\cosh 1+\cos 1=1.71550350\cdots$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}++-+\cdots=e-\sinh 1+\sin 1=2.38455162\cdots$$

18・4 5次間隔での符号反転

元の級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{10}}{10}+\cdots=-\log(1-z)$$

符号が反転された級数 ($z=1/2$)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\frac{1}{10\cdot 2^{10}}++++-\cdots=\frac{2}{5}\log 31-\log 2$$
$$=0.68044770\cdots$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{10\cdot 2^{10}}-++++\cdots=-0.31215188\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{10\cdot 2^{10}}+-+++\cdots = 0.44087342\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}-\frac{1}{8\cdot 2^8}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{10\cdot 2^{10}}++-++\cdots = 0.60881807\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}-\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{10\cdot 2^{10}}+++-+\cdots = 0.66145422\cdots$$

Note

公式中の $(-1)^{m/n}$ （$m,n = 1,2,3,\cdots$）を初等超越関数と根号で表すことは可能である。しかし、5次以上の場合、それらは非常にややこしいものになる。

19 三角関数の合成公式

19･1 基本式とその応用

2変数の逆正接関数

2つの変数を持つ逆正接関数は次のように定義される。

$$ArcTan[a,b] = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{b}{a} & if\ a>0 \\ \tan^{-1}\dfrac{b}{a}+\pi & if\ a<0\ and\ b\geq 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{b}{a}-\pi & if\ a<0\ and\ b<0 \\ +\dfrac{\pi}{2} & if\ a=0\ and\ b>0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & if\ a=0\ and\ b<0 \\ undefined & if\ a=0\ and\ b=0 \end{cases}$$

この2変数の逆正接関数を用いれば、三角関数の合成公式は次のように簡明に記述できる。

公式 19･1･1'

(1) 余弦表示

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\Phi)$$

(2) 正弦表示

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\Phi)$$

但し、$\Phi = ArcTan[a,b]$

特殊値

$$\cos\theta \pm \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta \mp \frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad \sin\theta \pm \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

公式 19･1･2（余弦と正弦の和積公式）

(1) 余弦表示

$$\cos(A+B) + \sin(A-B) = 2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(A+B) - \cos(A-B) = -2\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$$

(2) 正弦表示

$$\cos(A+B) + \sin(A-B) = -2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos(A+B) - \sin(A-B) = -2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(A+B)+\cos(A-B) = 2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(A+B)-\cos(A-B) = -2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$$

19・2 漸化式

公式 19・2・2

$$a_1\cos(\theta+\phi_1)+a_2\cos(\theta+\phi_2) = A_2\cos\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\}$$

$$a_1\sin(\theta+\phi_1)+a_2\sin(\theta+\phi_2) = A_2\sin\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\}$$

但し

$$A_2 = \sqrt{a_2^2+a_1^2+2a_2a_1\cos(\phi_1-\phi_2)}$$

$$\Phi_2 = ArcTan[a_2+a_1\cos(\phi_1-\phi_2),\ a_1\sin(\phi_1-\phi_2)]$$

公式 19・2・3

$$a_1\cos(\theta+\phi_1)+a_2\cos(\theta+\phi_2)+a_3\cos(\theta+\phi_3) = A_3\cos\{(\theta+\phi_3)+\Phi_3\}$$

$$a_1\sin(\theta+\phi_1)+a_2\sin(\theta+\phi_2)+a_3\sin(\theta+\phi_3) = A_3\sin\{(\theta+\phi_3)+\Phi_3\}$$

但し

$$A_1 = a_1$$

$$\Phi_1 = 0$$

$$A_3 = \sqrt{a_3^2+A_2^2+2a_3A_2\cos(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)}$$

$$\Phi_3 = ArcTan[a_3+A_2\cos(\phi_2-\phi_3+\Phi_2),\ A_2\sin(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)]$$

公式 19・2・n

$$\sum_{r=1}^{n} a_r\cos(\theta+\phi_r) = A_n\cos\{(\theta+\phi_n)+\Phi_n\}$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r\sin(\theta+\phi_r) = A_n\sin\{(\theta+\phi_n)+\Phi_n\}$$

但し

$$A_1 = a_1$$

$$\Phi_1 = 0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2+A_{n-1}^2+2a_nA_{n-1}\cos(\phi_{n-1}-\phi_n+\Phi_{n-1})}$$

$$\Phi_n = ArcTan[a_n+A_{n-1}\cos(\phi_{n-1}-\phi_n+\Phi_{n-1}),\ A_{n-1}\sin(\phi_{n-1}-\phi_n+\Phi_{n-1})]$$

例 $\boldsymbol{\theta = 0\ ,\ a_r(x) = (-1)^{r-1}r^{-x},\ \phi_r(y) = y\log r \quad (r = 1, 2, \cdots, 6)}$

$$\sum_{r=1}^{6}(-1)^{r-1}r^{-x}\cos(y\log r) = A_6(x,y)\cos(y\log 6+\Phi_6(x,y)) \tag{6c}$$

$$\sum_{r=1}^{6}(-1)^{r-1}r^{-x}\sin(y\log r) = A_6(x,y)\sin(y\log 6+\Phi_6(x,y)) \tag{6s}$$

(6c) の両辺の3D図を描くための数式処理ソフト *Mathematica* によるソース・コードとその結果を示す。

a_r & ϕ_r

```
a_r_[x_] := (-1)^(r-1) r^-x        ϕ_r_[y_] := y Log[r]
```

u & v (Left hand side)

```
u[x_, y_, n_] := Sum[a_r[x] Cos[φ_r[y]], {r, 1, n}]      v[x_, y_, n_] := Sum[a_r[x] Sin[φ_r[y]], {r, 1, n}]
```

$$u[x\_,y\_,n\_]:=\sum_{r=1}^{n}a_r[x]\,\mathrm{Cos}[\phi_r[y]]\qquad v[x\_,y\_,n\_]:=\sum_{r=1}^{n}a_r[x]\,\mathrm{Sin}[\phi_r[y]]$$

A_n & Φ_n (Recurrence formula)

$$A_{n\_}[x\_,y\_]:=$$
$$\mathrm{If}\left[n==1,\ a_1[x],\ \sqrt{a_n[x]^2+A_{n-1}[x,y]^2+2\,a_n[x]\,A_{n-1}[x,y]\,\mathrm{Cos}[\phi_{n-1}[y]-\phi_n[y]+\Phi_{n-1}[x,y]]}\right]$$

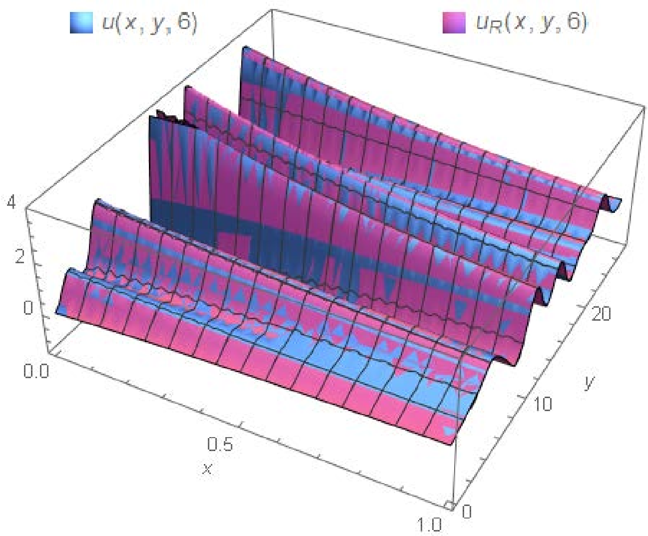
$$\Phi_{n\_}[x\_,y\_]:=\mathrm{If}[n==1,\ 0,\ \mathrm{ArcTan}[a_n[x]+A_{n-1}[x,y]\,\mathrm{Cos}[\phi_{n-1}[y]-\phi_n[y]+\Phi_{n-1}[x,y]],$$
$$A_{n-1}[x,y]\,\mathrm{Sin}[\phi_{n-1}[y]-\phi_n[y]+\Phi_{n-1}[x,y]]]]$$

u_R & v_R (Right hand side)

$$u_R[x\_,y\_,n\_]:=A_n[x,y]\,\mathrm{Cos}[\phi_n[y]+\Phi_n[x,y]]$$
$$v_R[x\_,y\_,n\_]:=A_n[x,y]\,\mathrm{Sin}[\phi_n[y]+\Phi_n[x,y]]$$

n = 6 (drawing)

```
dummy[x_, y_] := -10
Plot3D[{dummy[x, y], u[x, y, 6], uR[x, y, 6]}, {x, 0, 1}, {y, 0, 27.3},
 AxesLabel → Automatic, PlotLegends → "Expressions", ClippingStyle → None,
 PlotStyle → {, , ColorData[96, 4]}, PlotRange → {-1.5, 4}]
```



左右はぴったり重なっていて斑に見えている。

19·3 陽表式

公式 19·3·2（三角多項式）

$$c(\theta)=\sum_{r=1}^{n}a_r\cos(\theta+\phi_r)=A\cos(\theta+\Phi)$$
$$s(\theta)=\sum_{r=1}^{n}a_r\sin(\theta+\phi_r)=A\sin(\theta+\Phi)$$

但し

$$A=\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\right)^2+\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right)^2}\qquad\left(=\sqrt{c^2(0)+s^2(0)}\right)$$

$$\Phi=ArcTan\left[\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\,,\ \sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right]\qquad\left(=ArcTan[c(0),s(0)]\right)$$

公式 19・3・3 (三角級数)

$$c(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos(\theta+\phi_r) = A\cos(\theta+\Phi)$$

$$s(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin(\theta+\phi_r) = A\sin(\theta+\Phi)$$

但し

$$A = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos\phi_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin\phi_r\right)^2} \qquad \left(= \sqrt{c^2(0)+s^2(0)} \right)$$

$$\Phi = ArcTan\left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos\phi_r \,,\ \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin\phi_r\right] \qquad \left(= ArcTan[c(0), s(0)] \right)$$

例 $a_r(x) = (-1)^{r-1} r^{-x}$, $\phi_r(y) = y\log r$, $r = 1 \sim \infty$

$$c(\theta,x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^x} \cos(\theta+y\log r) = A(x,y)\cos\{\theta+\Phi(x,y)\} \quad \{= cr(\theta,x,y)\}$$

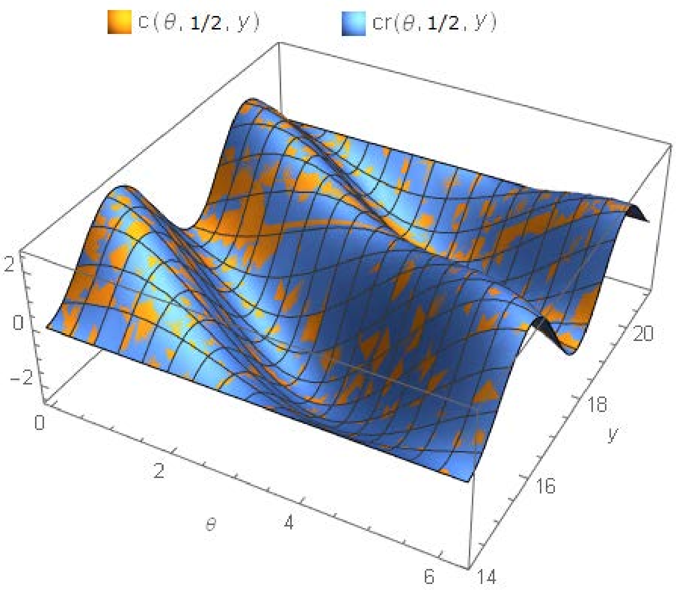
$$s(\theta,x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^x} \sin(\theta+y\log r) = A(x,y)\sin\{\theta+\Phi(x,y)\} \quad \{= sr(\theta,x,y)\}$$

但し、

$$A(x,y) = \sqrt{\{c(0,x,y)\}^2+\{s(0,x,y)\}^2}$$

$$\Phi(x,y) = ArcTan[c(0,x,y), s(0,x,y)]$$

$x = 1/2$ のとき $c(\theta,x,y)$, $cr(\theta,x,y)$ を3D図に描くと次頁のようになる。橙が左辺で青が右辺である。斑模様は両者が重なっていることを示している。



20 ガンマ関数の実部虚部別級数展開

20･1 ガンマ関数とその逆数の実部虚部別テイラー展開

公式 20･1･1 ($\Gamma(z)$ のテイラー展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数 ($z=x+iy$)、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1,f_2,\dots)$ を Bell 多項式、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$ 収束半径は a から直近の特異点までの距離。

$$u(x,y) = \Gamma(a) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a)\frac{(x-a)^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(a),\psi_1(a),\dots,\psi_{n-1}(a)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

公式 20･1･2 ($1/\Gamma(z)$ のテイラー展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数 ($z=x+iy$)、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1,f_2,\dots)$ を Bell 多項式、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $1/\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a)\frac{(z-a)^s}{s!} \qquad |z-a| < \infty$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a)\frac{(x-a)^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n(a) = \frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}(\psi_0(a),\psi_1(a),\dots,\psi_{n-1}(a)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

20･2 ガンマ関数とその逆数の実部虚部別ローラン展開

公式 20･2･1 ($\Gamma(z)$ のローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数 ($z=x+iy$)、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1,f_2,\dots)$ を Bell 多項式、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{s+1}}{s+1}\frac{z^s}{s!} \qquad |z| < 1$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{2r+s+1}}{2r+s+1}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{2r+s+2}}{2r+s+2}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

公式 20·2·2 (**1/Γ(z)** のローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数 $(z=x+iy)$、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $1/\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \sum_{s=2}^{\infty} s c_{s-1} \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = x + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)\, c_{2r+s-1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = y + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s+1)\, c_{2r+s} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

公式 20·3·1 (**Γ(1+z)** のマクローリン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数 $(z=x+iy)$、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $\Gamma(1+z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\Gamma(1+z) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < 1$$

$$u(x,y) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{x^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

公式 20·3·2 (**1/Γ(1+z)** のマクローリン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数 $(z=x+iy)$、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $1/\Gamma(1+z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{x^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$0^0 = 1$

例（数値計算）

公式に従い $1/\Gamma(1+z)$ をマクローリン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。$0.4+0.3i$ での実部･虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は10項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
```

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$c[n\_] := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, \mathrm{BellY}[n, k, \mathrm{Tbl}\psi[n, 1]]$$

$$g[z\_, m\_] := 1 + \sum_{s=1}^{m} c[s] \frac{z^s}{s!}$$

$$u[x\_, y\_, m\_] := 1 + \sum_{s=1}^{m} c[s] \frac{x^s}{s!} + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=0}^{m} c[2r+s] \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v[x\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} c[2r+s+1] \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{Gamma}[1+0.4+0.3\,i]}\right], u[0.4, 0.3, 10]\right\}\right]$$

{1.17946, 1.17946}

$$N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{Gamma}[1+0.4+0.3\,i]}\right], v[0.4, 0.3, 10]\right\}\right]$$

{0.0165836, 0.0165836}

実部虚部とも、関数値と級数値は完全に一致している。

21 複素数の周りの実部虚部別テイラー展開

21・1 複素数の周りの実部虚部別テイラー展開

定理 21・1・1（複素数の周りのテイラー展開）

$f(z)$ $(z=x+iy)$ を複素関数、$u(x,y)$, $v(x,y)$ をその実部及び虚部とする。また Re , Im は実部及び虚部を表す記号とする。すると、$f(z)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、任意の点 $(a,b)\in D$ について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a+ib)\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} - Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} + Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

定理 21・1・2（垂直線上のテイラー展開）

$f(z)$ $(z=x+iy)$ を複素関数、$u(x,y)$, $v(x,y)$ をその実部及び虚部とする。また Re , Im は実部及び虚部を表す記号とする。すると、$f(z)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、任意の点 $(a,b)\in D$ について次式が成立する。

$$f(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(s)}(a+ib)}{s!}\{(a-a)+i(y-b)\}^s$$

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Re\left[\frac{f^{(2r)}(a+ib)}{(2r)!}\right](y-b)^{2r} - Im\left[\frac{f^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Im\left[\frac{f^{(2r)}(a+ib)}{(2r)!}\right](y-b)^{2r} + Re\left[\frac{f^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

21・2 例1: 正弦関数

$a+ib$ の周りの展開

$$\sin z = \sum_{s=0}^{\infty}\sin\left(a+ib+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s!}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!} + \sinh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty}\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s!}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!} + \cosh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

垂直線 $x=a$ 上の b の周りの展開

$$sin(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty} sin\left(a+ib+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{\{(a-a)+i(y-b)\}^s}{s!}$$

$$u(a,y) = sin\,a\sum_{r=0}^{\infty}\left\{cosh\,b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+sinh\,b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(a,y) = cos\,a\sum_{r=0}^{\infty}\left\{sinh\,b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+cosh\,b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

21・4 例3：ディリクレ・イータ関数

本節ではディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ を取り上げる。これは次の級数で定義される関数である。

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-z\log s} = \frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+-\cdots$$

この関数は複素平面上の任意の点の周りでテイラー展開ができるが、特に興味深いのは臨界線 $x=1/2$ 上および臨界領域の境界 $x=1$ 上での展開である。

$a+ib$ の周りの展開

$$\eta(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\eta^{(s)}(a+ib)\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[\eta^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.-Im\left[\eta^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[\eta^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.+Re\left[\eta^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$\eta^{(s)}(z) = \dfrac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)}+(-1)^{-s}\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{t=2}^{k}\frac{(-1)^{t-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{t}\frac{\log^s t}{t^z}$,　$0^0=1$。

垂直線 $x=a$ 上の b の周りの展開

$$\eta(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\eta^{(s)}(a+ib)}{s!}\{(a-a)+i(y-b)\}^s$$

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Re\left[\frac{\eta^{(2r)}(a+ib)}{(2r)!}\right](y-b)^{2r}-Im\left[\frac{\eta^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Im\left[\frac{\eta^{(2r)}(a+ib)}{(2r)!}\right](y-b)^{2r}+Re\left[\frac{\eta^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

例　臨界線 $a=1/2$ 上の 10000 の周りの展開

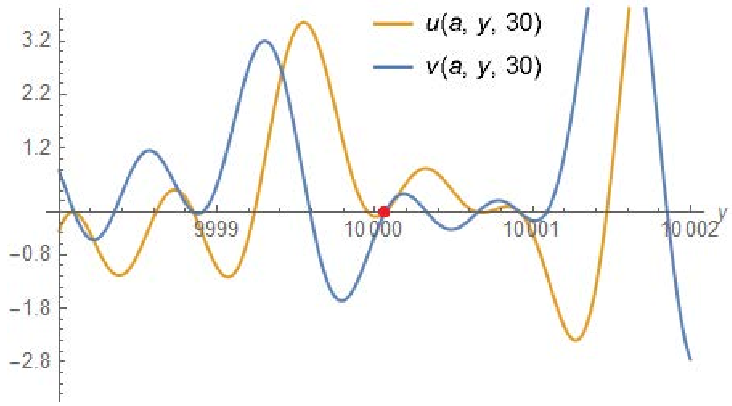
```
Array[c_ab, 101];
Clear[a, b]; a = 1 / 2; b = 10 000;
```

```
N[Series[DirichletEta[z], {z, a + ⅈ b, 100}]];
Table[c_ab[n] = SeriesCoefficient[%, n], {n, 0, 100}];
```

$$u[a\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\mathrm{Re}[c_{ab}[2r]]\ (y-b)^{2r} - \mathrm{Im}[c_{ab}[2r+1]]\ (y-b)^{2r+1}\right)$$

$$v[a\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\mathrm{Im}[c_{ab}[2r]]\ (y-b)^{2r} + \mathrm{Re}[c_{ab}[2r+1]]\ (y-b)^{2r+1}\right)$$

```
Plot[{u[a, y, 30], v[a, y, 30]}, {y, 9998, 10002},
 AxesLabel → Automatic, PlotLegends → "Expressions", ClippingStyle → None,
 PlotRange → {-3.8, 3.8}, PlotStyle → {ColorData[97, 2], ColorData[97, 1]}]
```



この区間には 5 個の非自明な零点が観察されるが、$y = 10000$ 付近の零点を求めると

```
SetPrecision[FindRoot[u[a, y, 5], {y, 10000.1}], 15]
{y → 10000.0653454145}
SetPrecision[FindRoot[v[a, y, 5], {y, 10000.1}], 15]
{y → 10000.0653454145}
SetPrecision[Im[ZetaZero[10143]], 14]
10000.0653454145
```

僅か 5 項までの計算で 10143 番目の非自明な零点が得られている。

2024.03.08

河野 和

広島市

宇宙人の数学