1　一般化されたテイラーの定理

1･1　反復部分積分とその応用

1･1･1　反復部分積分の公式

公式 1･1･1

$f(x)$ は $[a\ ,\ b]$ で n 回連続微分可能、$g^{<n>}(x)$ は

$$g^{<n>}(x)=\int g^{<n-1>}(x)dx+c_n \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad c_n \text{ は任意定数}$$

とするとき、次式が成立する。

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[g^{<r>}(x)f^{(r-1)}(x)\right]_a^b$$
$$+(-1)^n\int_a^b g^{<n>}(x)f^{(n)}(x)dx \tag{1.1}$$

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=\sum_{r=1}^{n}\left[g^{<2r-1>}(x)f^{(2r-2)}(x)\right]_a^b-\sum_{r=1}^{n}\left[g^{<2r>}(x)f^{(2r-1)}(x)\right]_a^b$$
$$+\int_a^b g^{<2n>}(x)f^{(2n)}(x)dx \tag{1.1'}$$

証明

$$\int_a^b g^{<0>}(x)f^{(0)}(x)dx$$
$$=\left[g^{<1>}(x)f^{(0)}(x)\right]_a^b-\int_a^b g^{<1>}(x)f^{(1)}(x)dx$$
$$=\left[g^{<1>}(x)f(x)\right]_a^b-\left[g^{<2>}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b+\int_a^b g^{<2>}(x)f^{(2)}(x)dx$$
$$=\left[g^{<1>}(x)f(x)\right]_a^b-\left[g^{<2>}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b+\left[g^{<3>}(x)f^{(2)}(x)\right]_a^b$$
$$-\int_a^b g^{<3>}(x)f^{(3)}(x)dx$$
$$\vdots$$
$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[g^{<r>}(x)f^{(r-1)}(x)\right]_a^b+(-1)^n\int_a^b g^{<n>}(x)f^{(n)}(x)dx$$

よって (1.1) を得る。(1.1') は (1.1) 中の $\sum_{r=1}^{n}$ を $\sum_{r=1}^{2n}$ に書き換えただけである。

別証

超微積分編 16･1･2 の定理16･1･2

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r}f^{<n+r>}g^{(r)}$$
$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s}f_a^{<n-r+s>}g_a^{(s)}\frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1}{}_tC_s\cdot{}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\,f_a^{\langle m+n-r+s\rangle}g_a^{(m+s)}\frac{(x-a)^r}{r!}$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_r}{m+r}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{<m+r>}g^{(m+r)}dx^n$$

において $n=1$ と置けば

$$\int_a^x f^{<0>}g^{(0)}dx=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\left(f^{<1+r>}g^{(r)}-f_a^{<1+r>}g_a^{(r)}\right)+(-1)^m\int_a^x f^{<m>}g^{(m)}dx$$

となり、ここで x , m を b , n に置換し f と g を入れ替えれば (1.1) を得る。

1･1･2 指数積分の級数展開

公式 1･1･2

$\Gamma(z)$, $\psi(z)$, H_n , γ をそれぞれガンマ関数、ディガンマ関数、調和数、オイラー･マスケロニの定数とするとき、指数積分 $Ei(x)=\int_{-\infty}^x\frac{e^x}{x}dx$ について次式が成立する。

(1) $x>1$ に対して

$$Ei(x)=\frac{e^x}{x}\left\{1+\frac{1!}{x^1}+\frac{2!}{x^2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}\right\}+n!\int_{-\infty}^x\frac{e^x}{x^{n+1}}dx \tag{2.1}$$

(2) $x\neq0$ に対して

$$Ei(x)=\frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log|x|-\psi(r)-\gamma}{\Gamma(r)}x^r+\gamma \tag{2.2}$$

$$=\log|x|+\frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\psi(r)}{\Gamma(r)}x^r \tag{2.3}$$

$$=\log|x|+\gamma-e^x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{H_r}{r!}x^r \tag{2.4}$$

証明

(1) $g(x)=e^x$ とするとき

$$f(x)=\frac{1}{x}\ ,\qquad f^{(r-1)}(x)=(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^r}$$

であるからこれらを 公式1･1･1 の (1.1) に代入すると

$$\int_{-\infty}^x\frac{e^x}{x}dx=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[e^x(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^r}\right]_{-\infty}^x+\int_{-\infty}^x\left\{e^x\frac{n!}{x^{n+1}}\right\}dx$$

$$=\frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{n}\frac{(r-1)!}{x^{r-1}}+n!\int_{-\infty}^x\frac{e^x}{x^{n+1}}dx \tag{2.1}$$

(2) $f(x)=e^x$, $\quad\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $\quad\psi(z)=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)$ とするとき

$$g(x)=\frac{1}{x}$$

$$g^{<1>}(x) = log|x|$$

$$g^{<2>}(x) = (log\,x)^{<1>} = \frac{log|x| - \psi(1+1) - \gamma}{\Gamma(1+1)} x^1$$

$$\vdots$$

$$g^{<r>}(x) = (log\,x)^{<r-1>} = \frac{log|x| - \psi(r) - \gamma}{\Gamma(r)} x^{r-1}$$

これらを (1.1) に代入すれば

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x} dx = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \left[\frac{log|x| - \psi(r) - \gamma}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^x \right]_{-\infty}^{x}$$

$$+ (-1)^n \int_{-\infty}^{x} \frac{log|x| - \psi(n) - \gamma}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^x dx$$

$$= \frac{e^x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{log|x| - \psi(r) - \gamma}{\Gamma(r)} x^r + (-1)^n \int_{-\infty}^{x} \frac{log|x| - \psi(n) - \gamma}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^x dx$$

$\psi(n)+\gamma$ を $\displaystyle\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s}$ で置換すれば

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x} dx = \frac{e^x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{log|x| - \psi(r) - \gamma}{\Gamma(r)} x^r + R_{n+1} \tag{w1}$$

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{x} log|x|\, x^{n-1} e^x dx + \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{x} x^{n-1} e^x dx \tag{wr}$$

「16 2関数の積の高階積分」(超微積分編)の公式16・5・1'によれば

$$\int_{-\infty}^{x} e^x x^m dx = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \qquad m=0,1,2,\cdots$$

であったから

$$\int_{-\infty}^{x} x^{n-1} e^x dx = e^x \sum_{r=0}^{n-1} \binom{-1}{r} \frac{\Gamma(1+n-1)}{\Gamma(1+n-1-r)} x^{n-1-r}$$

$$= e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} x^{n-1-r}$$

$$= (-1)^{n-1} (n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!}$$

よって (wr) の第2項は

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{x} x^{n-1} e^x dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \cdot (-1)^{n-1} (n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!}$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \cdot e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!}$$

$n \to \infty$ とするとき

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{x} x^{n-1} e^x dx = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \cdot e^x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r}{r!} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \tag{wr1}$$

次に

$$\int_{-\infty}^{x} e^x x^{n-1} log|x|dx = \left[\left(e^x x^{n-1}\right)^{<1>} log|x| \right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \left(e^x x^{n-1}\right)^{<1>} \frac{1}{|x|} dx$$

$$= \left(e^x x^{n-1}\right)^{<1>} log|x| - \int_{-\infty}^{x} \left(e^x x^{n-1}\right)^{<1>} \frac{1}{|x|} dx$$

ここで

$$\left(e^x x^{n-1}\right)^{<1>} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!}$$

を代入すると

$$\int_{-\infty}^{x} e^x x^{n-1} log|x|dx = \left\{ (-1)^{n-1}(n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!} \right\} log|x|$$

$$- \int_{-\infty}^{x} \left\{ (-1)^{n-1}(n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!} \right\} \frac{1}{|x|} dx$$

両辺に $(-1)^n/\Gamma(n)$ を乗じて

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{x} e^x x^{n-1} log|x|dx = \left\{ \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} (-1)^{n-1}(n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!} \right\} log|x|$$

$$- \int_{-\infty}^{x} \left\{ \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} (-1)^{n-1}(n-1)!\, e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!} \right\} \frac{1}{|x|} dx$$

よって (wr) の第1項は

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{x} e^x x^{n-1} log|x|dx = -e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!} log|x| + \int_{-\infty}^{x} e^x \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{x^r}{r!} \frac{1}{|x|} dx$$

$n \rightarrow \infty$ とするとき

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{x} e^x x^{n-1} log|x|dx = -e^x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r}{r!} log|x| + \int_{-\infty}^{x} e^x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r}{r!} \frac{1}{|x|} dx$$

$$= -log|x| + \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{|x|} dx = -log|x| + \left[log|x| \right]_{-\infty}^{x}$$

i.e.

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{x} e^x x^{n-1} log|x|dx = -log\,\infty \tag{wr2}$$

(wr1), (wr2), (wr) より

$$\lim_{n\rightarrow\infty} R_{n+1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} - log\,\infty = \gamma$$

これと (w1) より

$$Ei(x) = \frac{e^x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{log|x| - \psi(r) - \gamma}{\Gamma(r)} x^r + \gamma \tag{2.2}$$

さらに

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{x^r}{\Gamma(r)} = xe^{-x}$$

これを用いて

$$Ei(x) = \log|x| + \frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\psi(r)}{\Gamma(r)}x^r \tag{2.3}$$

さらに、1･3 cf.（超微積分編）より

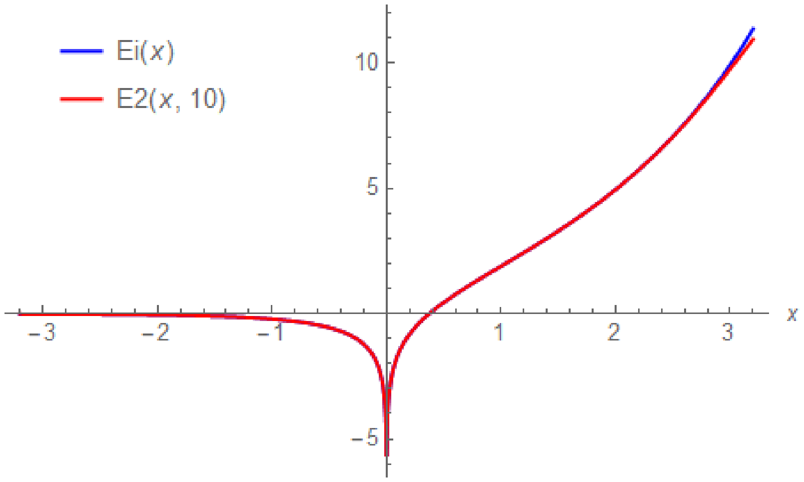
$$\frac{\psi(n)}{\Gamma(n)} = \frac{H_{n-1} - \gamma}{(n-1)!} \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad \left(H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

これを用いれば

$$Ei(x) = \log|x| + \gamma + \frac{e^x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{H_{r-1}}{(r-1)!}x^r \tag{2.4}$$

Q.E.D.

(2.1) は漸近展開であり x が大きいところでの一致性が良い。(2.2) ～ (2.4) は級数展開であり x が小さいところでの一致性が良い。(2.4) の $\sum$ を10項まで計算し $Ei(x)$ と共に図示すると次のようになる。(青が $Ei(x)$ 赤が級数。)



1･1･3　正弦積分の級数展開

公式 1･1･3

$\Gamma(z)$, $\psi(z)$, H_n , γ をそれぞれガンマ関数、ディガンマ関数、調和数、オイラー･マスケロニの定数とするとき、正弦積分 $Si(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_\infty^x \frac{\sin x}{x}dx + \frac{\pi}{2}$ について次式が成立する。

(1) $x>1$ に対して

$$Si(x)=\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{(2r-2)!}{x^{2r-2}} + \frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{(2r-1)!}{x^{2r-1}} + \frac{\pi}{2} + R_{2n+1} \tag{3.1}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n(2n)!\int_\infty^x \frac{\sin x}{x^{2n+1}}dx \tag{3.1r}$$

(2)

$$Si(x) = \frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\log|x| - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1}$$

$$-\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\log|x|-\psi(2r)-\gamma}{\Gamma(2r)}x^{2r}+R_{2n+1} \tag{3.2}$$

$$R_{2n+1}=(-1)^{n}\int_{0}^{x}\frac{\log|x|-\psi(2n)-\gamma}{\Gamma(2n)}x^{2n-1}\sin x\,dx \tag{3.2r}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_{2n+1}=0$$

$$Si(x)=\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\psi(2r-1)}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1}-\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\psi(2r)}{\Gamma(2r)}x^{2r} \tag{3.3}$$

$$=-\sin x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{H_{2r}}{(2r)!}x^{2r}+\cos x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{H_{2r+1}}{(2r+1)!}x^{2r+1} \tag{3.4}$$

証明

(1) $g(x)=\sin x$とするとき

$$g^{<2r>}(x)=(-1)^{r}\sin x$$

$$g^{<2r-1>}(x)=(-1)^{r}\cos x$$

$$f(x)=\frac{1}{x},\qquad f^{(r)}(x)=(-1)^{r}\frac{r!}{x^{r+1}}$$

$$f^{(2r-1)}(x)=(-1)^{2r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r}},\qquad f^{(2r-2)}(x)=(-1)^{2r-2}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-1}}$$

であるから、これらを (1.1') に代入すると

$$\int_{\infty}^{x}\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{r}\cos x\cdot(-1)^{2r-2}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-1}}\right]_{\infty}^{x}$$

$$-\sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{r}\sin x\cdot(-1)^{2r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r}}\right]_{\infty}^{x}$$

$$+\int_{0}^{x}(-1)^{n}\sin x\,(-1)^{2n}\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}dx$$

$$=\cos x\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-1}}-\sin x\sum_{r=1}^{n}(-1)^{3r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r}}$$

$$+(-1)^{n}(2n)!\int_{0}^{x}\frac{\sin x}{x^{2n+1}}dx$$

$$\therefore\ Si(x)=\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-2}}+\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}\frac{(2r-1)!}{x^{2r-1}}+\frac{\pi}{2}+R_{2n+1} \tag{3.1}$$

$$R_{2n+1}=(-1)^{n}(2n)!\int_{\infty}^{x}\frac{\sin x}{x^{2n+1}}dx \tag{3.1r}$$

(2) $f(x)=\sin x$とするとき

$$f^{(2r-2)}(x)=(-1)^{r-1}\sin x,\qquad f^{(2r-1)}(x)=(-1)^{r-1}\cos x$$

$$f^{(2r)}(x) \quad = (-1)^r \sin x$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$g^{<2r-1>}(x) = (\log x)^{<2r-2>} = \frac{\log|x| - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-2}$$

$$g^{<2r>}(x) = (\log x)^{<2r-1>} = \frac{\log|x| - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r-1}$$

であるからこれらを (1.1') に代入すると、

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = & \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\log|x| - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-2} \cdot (-1)^{r-1} \sin x \right]_0^x \\
& - \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\log|x| - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r-1} \cdot (-1)^{r-1} \cos x \right]_0^x \\
& + \int_0^x \frac{\log|x| - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \cdot (-1)^n \sin x \, dx \\
= & \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log|x| - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1} \\
& - \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log|x| - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r} \\
& + (-1)^n \int_0^x \frac{\log|x| - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \sin x \, dx
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
Si(x) = & \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log|x| - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1} \\
& - \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log|x| - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r} + R_{2n+1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{\log|x| - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \sin x \, dx \tag{3.2r}$$

そして

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|x| - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2n)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$$

であるから

$$\begin{aligned}
Si(x) = & \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\log|x| - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1} \\
& - \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\log|x| - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r}
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{x^{2r-1}}{\Gamma(2r-1)} = x\cos x \quad , \qquad \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{x^{2r}}{\Gamma(2r)} = x \sin x$$

これらを上に代入すれば

$$Si(x) == \frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\psi(2r-1)}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1} - \frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\psi(2r)}{\Gamma(2r)}x^{2r} \tag{3.3}$$

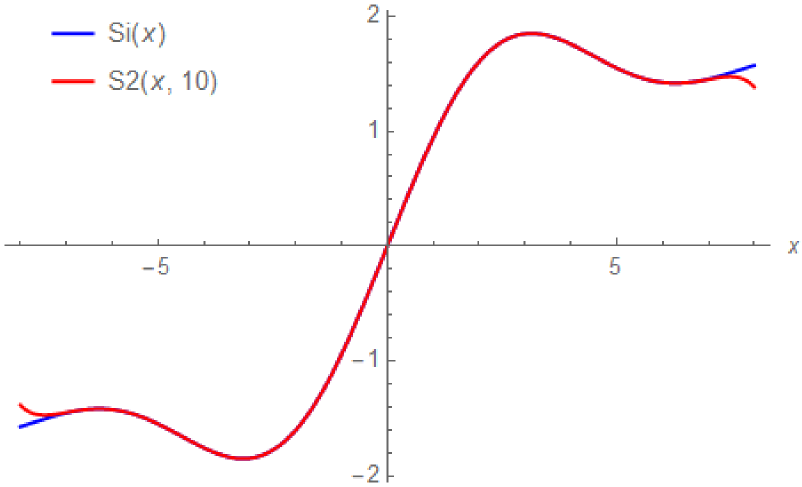
さらに

$$\frac{\psi(n)}{\Gamma(n)} = \frac{H_{n-1}-\gamma}{(n-1)!} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

これを用いれば

$$Si(x) = -\sin x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{H_{2r}}{(2r)!}x^{2r} + \cos x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{H_{2r+1}}{(2r+1)!}x^{2r+1} \tag{3.4}$$

(3.1) は漸近展開であり x が大きいところでの一致性が良い。(3.2) ～ (3.4) は級数展開であり x が小さいところでの一致性が良い。(3.4) の $\sum$ を10項まで計算し $Si(x)$ と共に図示すると次のようになる。(青が $Si(x)$ 赤が級数。)



1・1・4 余弦積分の級数展開

公式 1・1・4

$\Gamma(z)$, $\psi(z)$, H_n , γ をそれぞれガンマ関数、ディガンマ関数、調和数、オイラー・マスケロニの定数とするとき、余弦積分 $Ci(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{\cos x}{x}dx = \gamma+\log x - \int_{0}^{x}\frac{1-\cos x}{x}dx$ について次式が成立する。

(1) $x>1$ に対して

$$Ci(x) = \frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-2}} - \frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r-1}} + R_{2n+1} \tag{4.1}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n(2n)!\int_{\infty}^{x}\frac{\cos x}{x^{2n+1}}dx \tag{4.1r}$$

(2) $x>0$ に対して

$$Ci(x) = \gamma + \frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\log x-\psi(2r-1)-\gamma}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1}$$

$$+\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\log x-\psi(2r)-\gamma}{\Gamma(2r)}x^{2r}+R_{2n+1} \tag{4.2}$$

$$R_{2n+1}=(-1)^{n}\int_{0}^{x}\frac{\log x-\psi(2n)-\gamma}{\Gamma(2n)}x^{2n-1}\cos x\,dx \tag{4.2r}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_{2n+1}=0$$

$$Ci(x)=\log x+\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\psi(2r-1)}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1}+\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\psi(2r)}{\Gamma(2r)}x^{2r} \tag{4.3}$$

$$=\log x+\gamma-\cos x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{H_{2r}}{(2r)!}x^{2r}-\sin x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{H_{2r+1}}{(2r+1)!}x^{2r+1} \tag{4.4}$$

証明

(1) $g(x)=\cos x$とするとき

$$g^{<2r>}(x)=(-1)^{r}\cos x$$

$$g^{<2r-1>}(x)=(-1)^{r-1}\sin x$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\ ,\qquad f^{(r)}(x)=(-1)^{r}\frac{r!}{x^{r+1}}$$

$$f^{(2r-1)}(x)=(-1)^{2r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r}}\ ,\qquad f^{(2r-2)}(x)=(-1)^{2r-2}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-1}}$$

であるから、これらを (1.1') に代入すると

$$\int_{\infty}^{x}\frac{\cos x}{x}dx=\sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{r-1}\sin x\cdot(-1)^{2r-2}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-1}}\right]_{\infty}^{x}$$

$$-\sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{r}\cos x\cdot(-1)^{2r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r}}\right]_{\infty}^{x}$$

$$+\int_{\infty}^{x}(-1)^{n}\cos x\cdot(-1)^{2n}\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}dx$$

$$=\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(2r-2)!}{x^{2r-2}}-\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r-1}}$$

$$+(-1)^{n}(2n)!\int_{\infty}^{x}\frac{\cos x}{x^{2n+1}}dx \tag{4.1}$$

(2) $f(x)=1-\cos x$とするとき

$$f^{(2r-2)}(x)=(-1)^{r}\cos x\ ,\qquad f^{(2r-1)}(x)=(-1)^{r-1}\sin x$$

$$f^{(2r)}(x)=(-1)^{r-1}\cos x$$

$$g(x)=\frac{1}{x}$$

$$g^{<2r-1>}(x) = (\log x)^{<2r-2>} = \frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-2}$$

$$g^{<2r>}(x) = (\log x)^{<2r-1>} = \frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r-1}$$

であるからこれらを (1.1’) に代入すると、

$$\int_0^x \frac{1-\cos x}{x} dx = \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-2} \cdot (-1)^r \cos x \right]_0^x$$

$$- \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r-1} \cdot (-1)^{r-1} \sin x \right]_0^x$$

$$+ \int_0^x \frac{\log x - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cos x \, dx$$

$$= \cos x \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-2} - \cos 0 \cdot (-1)^1 \frac{\log x - \psi(1) - \gamma}{\Gamma(1)} 0^0$$

$$- \sin x \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r-1}$$

$$+ (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{\log x - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \cos x \, dx$$

$$= -\frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1} + \log x$$

$$- \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r}$$

$$- (-1)^n \int_0^x \frac{\log x - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \cos x \, dx$$

よって

$$Ci(x) = \gamma + \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1}$$

$$+ \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r} + R_{2n+1} \tag{4.2}$$

$$R_{2n+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{\log x - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \cos x \, dx \tag{4.2r}$$

そして

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log x - \psi(2n) - \gamma}{\Gamma(2n)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$$

であるから

$$Ci(x) = \gamma + \frac{\cos x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r-1) - \gamma}{\Gamma(2r-1)} x^{2r-1}$$

$$+ \frac{\sin x}{x} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\log x - \psi(2r) - \gamma}{\Gamma(2r)} x^{2r}$$

ここで

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{x^{2r-1}}{\Gamma(2r-1)}=x\cos x \quad , \qquad \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{x^{2r}}{\Gamma(2r)}=x\sin x$$

これらを上に代入すれば

$$Ci(x)=\log x+\frac{\cos x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\psi(2r-1)}{\Gamma(2r-1)}x^{2r-1}+\frac{\sin x}{x}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{\psi(2r)}{\Gamma(2r)}x^{2r} \tag{4.3}$$

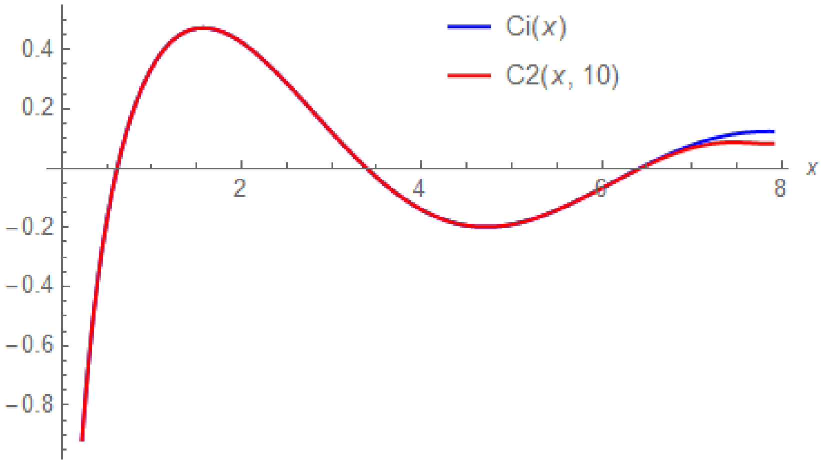
さらに

$$\frac{\psi(n)}{\Gamma(n)}=\frac{H_{n-1}-\gamma}{(n-1)!} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

これを用いれば

$$Ci(x)=\log x+\gamma-\cos x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{H_{2r}}{(2r)!}x^{2r}-\sin x\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{H_{2r+1}}{(2r+1)!}x^{2r+1} \tag{4.4}$$

(4.1) は漸近展開であり x が大きいところでの一致性が良い。(4.2) ～ (4.4) は級数展開であり x が小さいところでの一致性が良い。(4.4) の $\sum$ を10項まで計算し $Ci(x)$ と共に図示すると次のようになる。(青が $Ci(x)$ 赤が級数。)



1・2　一般化されたテイラーの定理

1・2・1　ラグランジュ型剰余項

***Lemma* 1.2.1**

$f(x)$ は $[a\ ,b]$ で $n+1$ 回連続微分可能、$g^{<n>}(x)$ は

$$g^{<n>}(x)=\int g^{<n-1>}(x)dx+c_n \quad n=1,2,3,\cdots \quad g^{<0>}(x)=1 \quad c_n \text{ は任意定数}$$

とするとき、次式が成立する。

$$f(b)-f(a)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[g^{<r>}(x)\,f^{(r)}(x)\right]_a^b+R_{n+1} \tag{1.1}$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\int_a^b g^{<n>}(x)f^{(n+1)}(x)dx \tag{1.1s}$$

$$=(-1)^n\left[g^{<n+1>}(x)\right]_a^b f^{(n+1)}(\xi) \qquad a<\xi<b \tag{1.1r}$$

証明

公式 1・1・1

$$\int_a^b g(x)f(x)dx=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[g^{<r>}(x)f^{(r-1)}(x)\right]_a^b+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\int_a^b g^{<n>}(x)f^{(n)}(x)dx$$

において $f(x)$ を $f^{(1)}(x)$ に置換し $g^{<0>}(x)=1$ を代入すれば、

$$\int_a^b f^{(1)}(x)dx=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[g^{<r>}(x)f^{(r)}(x)\right]_a^b+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\int_a^b g^{<n>}(x)f^{(n+1)}(x)dx$$

と、直ちに (1.1), (1.1s) を得る。

次に (1.1r) の証明を行う。

$$\int_a^b f^{(1)}(x)dx=f(b)-f(a)=\left[g^{<1>}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b+\left[g^{<2>}(x)\right]_a^b K$$

とし、$f(a)$ を移項して

$$f(b)=f(a)+\left[g^{<1>}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b+\left[g^{<2>}(x)\right]_a^b K$$

とする。そして関数 $F(x)$ を

$$F(x)=-f(b)+f(x)+g^{<1>}(b)f^{(1)}(b)-g^{<1>}(x)f^{(1)}(x)+\left\{g^{<2>}(b)-g^{<2>}(x)\right\}K$$

と定義する。すると

$$F(b)=-f(b)+f(b)+g^{<1>}(b)f^{(1)}(b)-g^{<1>}(b)f^{(1)}(b)+\left\{g^{<2>}(b)-g^{<2>}(b)\right\}K=0$$

$$F(a)=-f(b)+f(a)+g^{<1>}(b)f^{(1)}(b)-g^{<1>}(a)f^{(1)}(a)+\left\{g^{<2>}(b)-g^{<2>}(a)\right\}K$$

$$
\begin{aligned}
&= -f(b)+f(a)+\left[g^{\langle 1\rangle}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b + \left[g^{\langle 2\rangle}(x)\right]_a^b K \\
&= -f(b)+f(b) = 0
\end{aligned}
$$

すなわち$F(a) = F(b)$である。よって Rolle の定理から

$$F^{'}(\xi) = f^{(1)}(\xi) - g^{\langle 0\rangle}(\xi)f^{(1)}(\xi) - g^{\langle 1\rangle}(\xi)f^{(2)}(\xi) - g^{\langle 1\rangle}(\xi)K = 0$$

となるような　$a<\xi<b$ が少なくとも1個存在する。この式より

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{g^{\langle 1\rangle}(\xi)}\left\{f^{(1)}(\xi) - g^{\langle 0\rangle}(\xi)f^{(1)}(\xi) - g^{\langle 1\rangle}(\xi)f^{(2)}(\xi)\right\} \\
&= -f^{(2)}(\xi) \qquad \left(\because \quad g^{\langle 0\rangle}(\xi)=1\right)
\end{aligned}
$$

を得る。よって

$$f(b) = f(a)+\left[g^{\langle 1\rangle}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b - \left[g^{\langle 2\rangle}(x)\right]_a^b f^{(2)}(\xi)$$

次に、

$$f(b) = f(a)+\left[g^{\langle 1\rangle}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b - \left[g^{\langle 2\rangle}(x)f^{(2)}(x)\right]_a^b + \left[g^{\langle 3\rangle}(x)\right]_a^b K$$

となるようなKを求める。

関数$F(x)$を

$$
\begin{aligned}
F(x) = -f(b)+f(x) &+ g^{\langle 1\rangle}(b)f^{(1)}(b) - g^{\langle 1\rangle}(x)f^{(1)}(x) \\
&- g^{\langle 2\rangle}(b)f^{(2)}(b) + g^{\langle 2\rangle}(x)f^{(2)}(x) + \left\{g^{\langle 3\rangle}(b) - g^{\langle 3\rangle}(x)\right\}K
\end{aligned}
$$

と定義すると

$$
\begin{aligned}
F(b) &= 0 \\
F(a) &= -f(b)+f(a) + g^{\langle 1\rangle}(b)f^{(1)}(b) - g^{\langle 1\rangle}(a)f^{(1)}(a) \\
&\qquad - g^{\langle 2\rangle}(b)f^{(2)}(b) + g^{\langle 2\rangle}(a)f^{(2)}(a) + \left\{g^{\langle 3\rangle}(b) - g^{\langle 3\rangle}(a)\right\}K \\
&= -f(b)+f(b) = 0
\end{aligned}
$$

すなわち$F(a) = F(b)$である。よって Rolle の定理から

$$F^{'}(\xi) = f^{(1)}(\xi) - g^{\langle 0\rangle}(\xi)f^{(1)}(\xi) + g^{\langle 2\rangle}(\xi)f^{(3)}(\xi) - g^{\langle 2\rangle}(\xi)K = 0$$

となるような　$a<\xi<b$ が少なくとも1個存在する。この式より

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{g^{\langle 2\rangle}(\xi)}\left\{f^{(1)}(\xi) - g^{\langle 0\rangle}(\xi)f^{(1)}(\xi) + g^{\langle 2\rangle}(\xi)f^{(3)}(\xi)\right\} \\
&= f^{(3)}(\xi) \qquad \left(\because \quad g^{\langle 0\rangle}(\xi)=1\right)
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$f(b) = f(a)+\left[g^{\langle 1\rangle}(x)f^{(1)}(x)\right]_a^b - \left[g^{\langle 2\rangle}(x)f^{(2)}(x)\right]_a^b + \left[g^{\langle 3\rangle}(x)\right]_a^b f^{(3)}(\xi)$$

となる。以下、帰納法により (1.1r) を得る。

1･2･2　一般化されたテイラーの定理

定理 1･2･2

$f(x)$ は $[a\ ,\ b]$ で $n+1$ 回連続微分可能であるとき、$a<\xi<b$ なる ξ が存在して次式が成立する。

$$f(b)-f(a)=\sum_{r=1}^{n}\frac{(b-a)^r}{r\,!}f^{(r)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.1}$$

$$f(b)-f(a)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(b-a)^r}{r\,!}f^{(r)}(b)+(-1)^n\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.2}$$

証明

Lemma 1.2.1 において $g^{<r>}(x)$ を

$$g^{<r>}(x)=\int_b^x\cdots\int_b^x 1dx^r \quad =\frac{(x-b)^r}{r\,!}\quad r=0,1,2,\cdots n+1$$

とすれば

$$f(b)-f(a)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[\frac{(x-b)^r}{r\,!}f^{(r)}(x)\right]_a^b+(-1)^n\left[\frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b f^{(n+1)}(\xi)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left\{-\frac{(a-b)^r}{r\,!}f^{(r)}(a)\right\}-(-1)^n\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{(b-a)^r}{r\,!}f^{(r)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.1}$$

反対に、

$$g^{<r>}(x)=\int_a^x\cdots\int_a^x 1dx^r \quad =\frac{(x-a)^r}{r\,!}\quad r=0,1,2,\cdots n+1$$

とすれば

$$f(b)-f(a)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\left[\frac{(x-a)^r}{r\,!}f^{(r)}(x)\right]_a^b+(-1)^n\left[\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b f^{(n+1)}(\xi)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(b-a)^r}{r\,!}f^{(r)}(b)+(-1)^n\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \tag{2.2}$$

Note

(2.1) はベキ級数であり、(2.2) は関数項級数である。即ち、一般化されたテイラーの定理はベキ級数と関数項級数から成る。

1･2･3　対数関数のテイラー展開

公式 1･2･3

$$\log x=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r}(x-1)^r+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}\qquad 1<\xi<x \tag{3.1}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r}(x-1)^r\qquad 0<x\leqq 2 \tag{3.1'}$$

$$\log x=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{x-1}{x}\right)^r+\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}\qquad 1<\xi<x \tag{3.2}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{x-1}{x}\right)^r \qquad x \geqq \frac{1}{2} \qquad (3.2')$$

証明

$$f(x) = \log x$$

$$(\log x)^{(r)} = (-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{x^r}$$

とすれば、定理1･2･2 の (2.1) より

$$\log b - \log a = \sum_{r=1}^{n} \frac{(b-a)^r}{r!}(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{a^r} + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\left(\frac{b-a}{a}\right)^r + (-1)^n\frac{1}{n+1}\left(\frac{b-a}{\xi}\right)^{n+1} \quad a<\xi<b$$

$b=x$, $a=1$ と置けば

$$\log x = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r}(x-1)^r + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1} \qquad 1<\xi<x \qquad (3.1)$$

この右辺第1項は $n\to\infty$ のとき $0<x\leqq 2$ に対して収束するから (3.1') を得る。

次に、定理1･2･2 の (2.2) より

$$\log b - \log a = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{2(r-1)}\frac{(b-a)^r}{r!}\frac{(r-1)!}{b^r} + (-1)^{2n}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\xi^{n+1}}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{b-a}{b}\right)^r + \frac{1}{n+1}\left(\frac{b-a}{\xi}\right)^{n+1} \quad a<\xi<b$$

$b=x$, $a=1$ と置けば

$$\log x = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{x-1}{x}\right)^r + \frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1} \qquad 1<\xi<x \qquad (3.2)$$

この右辺第1項は $n\to\infty$ のとき $x\geqq 1/2$ に対して収束するから (3.2') を得る。

Note

(3.2') は (3.1') において x を $1/x$ と置換して得ることもできる。また、次のように簡単に求めることもできる。

$$\log\frac{1}{1-y} = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots \quad |y|<1 \qquad \text{であるから、}$$

$$\log x = \log\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \log\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)}\right\} = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots$$

例

$$\log 3 = \frac{1}{1}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots$$

1·2·4　一般二項定理

定理 1·2·4

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{n}\binom{\alpha}{r}x^{r}+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}\qquad 0<\xi<x \tag{4.1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^{r}\qquad |x|<1 \tag{4.1'}$$

$$=x^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{x^{r}}\qquad \left\{=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}x^{\alpha-r}\right\}\qquad |x|>1 \tag{4.2'}$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\binom{-\alpha}{r}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{r}\qquad x>-\frac{1}{2} \tag{4.3'}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha-1+r}{\alpha-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{r}\qquad x>-\frac{1}{2} \tag{4.3''}$$

証明

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}\qquad (\alpha \text{ は実数})$$

$$\left\{(1+x)^{\alpha}\right\}^{(r)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}(1+x)^{\alpha-r}$$

とすれば、定理 1·2·2 の (2.1) より

$$(1+b)^{\alpha}-(1+a)^{\alpha}=\sum_{r=1}^{n}\frac{(b-a)^{r}}{r!}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}(1+a)^{\alpha-r}$$

$$+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\{1+\alpha-(n+1)\}}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\binom{\alpha}{r}(b-a)^{r}(1+a)^{\alpha-r}+\binom{\alpha}{n+1}(b-a)^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}$$

$b=x$, $a=0$ と置けば

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{n}\binom{\alpha}{r}x^{r}+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}\qquad 0<\xi<x \tag{4.1}$$

を得る。そしてこの式の収束半径は 1 であるから、

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}x^{r}\qquad |x|<1 \tag{4.1'}$$

x を $1/x$ に置換すれば

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{x^{r}}\qquad \frac{1}{|x|}<1$$

この両辺に x^{α} を乗じれば

$$(1+x)^{\alpha}=x^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{x^{r}}\qquad \left\{=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\alpha-r}x^{\alpha-r}\right\}\qquad |x|>1 \tag{4.2'}$$

次に、定理 1･2･2 の (2.2) より

$$(1+b)^{\alpha}-(1+a)^{\alpha}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{(b-a)^r}{r\,!}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}(1+b)^{\alpha-r}$$

$$+(-1)^n\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\{1+\alpha-(n+1)\}}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}$$

$$=(1+b)^{\alpha}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{\alpha}{r}\left(\frac{b-a}{1+b}\right)^r$$

$$+(-1)^n\binom{\alpha}{n+1}(b-a)^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}\qquad a<\xi<b$$

$b=x\,,\,a=0$ と置けば

$$(1+x)^{\alpha}=1+(1+x)^{\alpha}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{\alpha}{r}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r+(-1)^n\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-(n+1)}$$

右辺のΣの一般項を a_n と置けば

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(-1)^n\binom{\alpha}{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}}{(-1)^{n-1}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n}}\right|=\left|\frac{-(n+1)x}{(\alpha-n+1)(1+x)}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{\left(\frac{\alpha}{n}-1+\frac{1}{n}\right)(1+x)}\right|=\left|\frac{x}{1+x}\right|$$

$x>-\dfrac{1}{2}$ のとき、 $-1<\dfrac{x}{1+x}<1$, $\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

よって右辺のΣは収束し、

$$(1+x)^{\alpha}=1+(1+x)^{\alpha}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\binom{\alpha}{r}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r\qquad x>-\frac{1}{2}$$

$(1+x)^{\alpha}$ について解くと

$$(1+x)^{\alpha}=\frac{1}{1-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\binom{\alpha}{r}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r}\qquad x>-\frac{1}{2}$$

さらに α を $-\alpha$ に置換すれば

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-\alpha}{r}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r\qquad x>-\frac{1}{2}\qquad(4.3')$$

or

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha-1+r}{\alpha-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r\qquad x>-\frac{1}{2}\qquad(4.3'')$$

例

$$(1+x)^{\pi} = 1 + \binom{\pi}{1}x^1 + \binom{\pi}{2}x^2 + \binom{\pi}{3}x^3 + \cdots \qquad |x|<1$$

$$= x^{\pi}\left\{1 + \binom{\pi}{1}\frac{1}{x^1} + \binom{\pi}{2}\frac{1}{x^2} + \binom{\pi}{3}\frac{1}{x^3} + \cdots\right\} \qquad x>1$$

$$= 1 + \binom{-\pi}{1}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^1 + \binom{-\pi}{2}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots \qquad x>-\frac{1}{2}$$

Note

(4.1')は通常の二項級数である。(4.2')はその逆方向の級数である。(超微積分編 3･2･2 参照)
(4.3') は関数項級数である。

1･2･5 ベキ関数のテイラー展開

(4.1'),(4.2'),(4.3') においてxを$x-1$に置換することにより直ちに次式が従う。

$$x^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(x-1)^r \qquad 0<x<2 \tag{5.1}$$

$$x^{\alpha} = (x-1)^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{(x-1)^r} \qquad x>2 \tag{5.2}$$

$$x^{\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{r}\left(\frac{1}{x}-1\right)^r \qquad x>\frac{1}{2} \tag{5.3}$$

例

$$x^e = 1 + \binom{e}{1}(x-1)^1 + \binom{e}{2}(x-1)^2 + \binom{e}{3}(x-1)^3 + \cdots \qquad 0<x<2$$

$$= (x-1)^e\left\{1 + \binom{e}{1}\frac{1}{(x-1)^1} + \binom{e}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \binom{e}{3}\frac{1}{(x-1)^3} + \cdots\right\} \qquad x>2$$

$$= 1 + \binom{-e}{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^1 + \binom{-e}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + \binom{-e}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^3 + \cdots \qquad x>\frac{1}{2}$$

(5.3) の特殊ケースとして、ナンセンスだが面白い次式が得られる。

x のテイラー展開

$$x = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^r \qquad x>\frac{1}{2} \tag{5.4}$$

$$x = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^r \qquad x>-\frac{1}{2} \tag{5.5}$$

導出

(5.3) において$\alpha=1$と置いて (5.4) が従う。そしてxを$x+1$に置換して (5.5) が従う。
なお、(5.4) は次のように簡単に求めることもできる。

$$x=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=1+\frac{x-1}{x}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\cdots \qquad x>\frac{1}{2}$$

例

$$2=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots \qquad \left(=\frac{1}{1-1/2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots \qquad \left(=\frac{2}{3}\frac{1}{1-2/3}\right)$$

$$3=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots \qquad \left(=\frac{1}{1-2/3}\right)$$

$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots \qquad \left(=\frac{3}{4}\frac{1}{1-3/4}\right)$$

1·2·6 分数関数のテイラー展開

(5.1) , (5.3) において α を $-\alpha$ に置換して直ちに次式を得る。

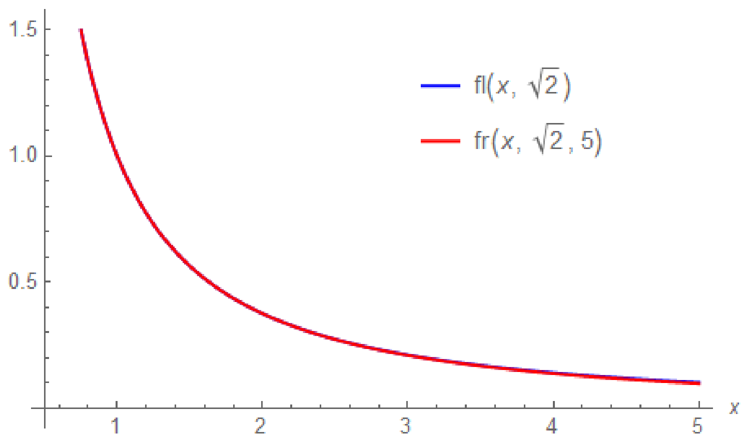
$$\frac{1}{x^{\alpha}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{r}(x-1)^r \qquad 0<x<2 \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{x^{\alpha}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\left(\frac{1}{x}-1\right)^r \qquad x>\frac{1}{2} \tag{6.2}$$

例

$$\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}=1+\binom{\sqrt{2}}{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)^1+\binom{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\binom{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{x}-1\right)^3+\cdots \qquad x>\frac{1}{2}$$

右辺を5項まで採り左辺と共に数式ソフトで図示すると次のようになる。左辺は隠れて見えない。



2011.06.15
2024.03.11 Updated Sec.1

河野 和
広島市

宇宙人の数学