2　多重級数と指数関数

2･1　多重級数と半多重級数

公式2･1･0

多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}$ が絶対収束するとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s,s} \tag{0.2}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} a_{r,s,t} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s,s-t,t} \tag{0.3}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n} \tag{0.n}$$

証明

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} &= a_{0,0} + a_{0,1} + a_{0,2} + \cdots \\ &\quad + a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots \\ &\quad + a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots \\ &\quad \vdots \\ &= a_{0,0} + \left(a_{1,0} + a_{0,1}\right) + \left(a_{2,0} + a_{1,1} + a_{0,2} +\right) \quad \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} a_{r-s,s}\end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} a_{r,s,t} &= a_{0,0,0} + a_{0,0,1} + a_{0,0,2} + \cdots \qquad + a_{1,0,0} + a_{1,0,1} + \cdots \qquad + a_{2,0,0} + \cdots \\ &\quad + a_{0,1,0} + a_{0,1,1} + a_{0,1,2} + \cdots \qquad + a_{1,1,0} + a_{1,1,1} + \cdots \qquad \vdots \\ &\quad + a_{0,2,0} + a_{0,2,1} + a_{0,2,2} + \cdots \qquad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &= a_{0,0,0} \\ &\quad + a_{1,0,0} + \left(a_{0,1,0} + a_{0,0,1}\right) \\ &\quad + a_{2,0,0} + \left(a_{1,1,0} + a_{1,0,1}\right) + \left(a_{0,2,0} + a_{0,1,1} + a_{0,0,2}\right) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} a_{r-s,s-t,t}\end{aligned}$$

以下、同次項を括って行けば帰納法により (0.n) を得る。

Note

要するに、多重級数 $\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}a_{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n}$ に対して次の操作をすれば良い。

r_{n-1} を $r_{n-1}-r_n$ に置換し、右から1番目の ∞ を r_{n-1} に置換する。

r_{n-2} を $r_{n-2}-r_{n-1}$ に置換し、右から2番目の ∞ を r_{n-2} に置換する。

⋮

r_1 を r_1-r_2 に置換し、右から $(n-1)$ 番目の ∞ を r_1 に置換する。

公式2･1･1

m を非負の整数とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}a^r b^s\frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}a^{r-s}b^s\frac{x^{m+r}}{(m+r)!} \tag{1.2}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}a^r b^s c^t\frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}a^{r-s}b^{s-t}c^t\frac{x^{m+r}}{(m+r)!} \tag{1.3}$$

⋮

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k^{r_k}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}a_1^{r_1-r_2}a_2^{r_2-r_3}\cdots a_n^{r_n}\frac{x^{m+r_1}}{(m+r_1)!} \tag{1.n}$$

証明

(1.2) の左辺に上記 *Note* の操作を行うと直ちに右辺を得る。

(1.3) の左辺に上記 *Note* の操作を順次行うと

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}a^r b^s c^t\frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{s}a^r b^{s-t}c^t\frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}a^{r-s}b^{s-t}c^t\frac{x^{m+r}}{(m+r)!}$$

以下同様にして (1.n) を得る。

公式2･1･2

$$\sum_{s=0}^{r}2^s=\frac{2^{1+r}-1}{2-1} \tag{2.2}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}2^{s-t}3^t=3\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1}-2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1} \tag{2.3}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t}2^{s-t}3^{t-u}4^u=8\cdot\frac{4^{1+r}-1}{4-1}-9\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1}+2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1} \tag{2.4}$$

$\vdots$

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} 2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s \frac{{}_nC_s\,(n-s)^{n-1}(n-s-1)}{n\,!}\,\frac{(n-s)^{1+r_1}-1}{n-s-1} \tag{2.n}$$

証明

$$\sum_{s=0}^{r} 2^s = \frac{2^{1+r}-1}{2-1} = \frac{{}_2C_0\,2^1(2-1)}{2!}\,\frac{2^{1+r}-1}{2-1} \tag{2.2}$$

次に

$$\sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}3^t = 2^s\sum_{t=0}^{s}\left(\frac{3}{2}\right)^t = 2^s\cdot\frac{(3/2)^{1+s}-1}{3/2\,-\,1} = 3^{1+s}-2^{1+s}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}3^t = \sum_{s=0}^{r}\left(3^{1+s}-2^{1+s}\right) = 3\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1} - 2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$= \frac{{}_3C_0\,3^2(3-1)}{3!}\,\frac{3^{1+r}-1}{3-1} - \frac{{}_3C_1\,2^2(2-1)}{3!}\,\frac{2^{1+r}-1}{2-1} \tag{2.3}$$

次に

$$\sum_{u=0}^{t} 3^{t-u}4^u = 3^t\sum_{u=0}^{t}\left(\frac{4}{3}\right)^u = 3^t\cdot\frac{(4/3)^{1+t}-1}{4/3\,-\,1} = 4^{1+t}-3^{1+t}$$

$$\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} 2^{s-t}3^{t-u}4^u = \sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}\left(4^{1+t}-3^{1+t}\right) = 4\cdot 2^s\sum_{t=0}^{s}\left(\frac{4}{2}\right)^t - 3\cdot 2^s\sum_{t=0}^{s}\left(\frac{3}{2}\right)^t$$

$$= 4\cdot 2^s\frac{(4/2)^{1+s}-1}{4/2\,-\,1} - 3\cdot 2^s\frac{(3/2)^{1+s}-1}{3/2\,-\,1}$$

$$= 4\cdot\frac{4^{1+s}-2^{1+s}}{4\,-\,2} - 3\cdot\frac{3^{1+s}-2^{1+s}}{3\,-\,2} = 2\cdot 4^{1+s}-3\cdot 3^{1+s}+2^{1+s}$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} 2^{s-t}3^{t-u}4^u = \sum_{s=0}^{r}\left(2\cdot 4^{1+s}-3\cdot 3^{1+s}+2^{1+s}\right) = 8\sum_{s=0}^{r}4^s-9\sum_{s=0}^{r}3^s+2\sum_{s=0}^{r}2^s$$

$$= 8\cdot\frac{4^{1+r}-1}{4-1}-9\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1}+2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$= \frac{{}_4C_0\,4^3(4-1)}{4!}\,\frac{4^{1+r}-1}{4-1} - \frac{{}_4C_1\,3^3(3-1)}{4!}\,\frac{3^{1+r}-1}{3-1} + \frac{{}_4C_2\,2^3(2-1)}{4!}\,\frac{2^{1+r}-1}{2-1} \tag{2.4}$$

以下帰納法により (2.n) を得る。

例

$$\sum_{s=0}^{7}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} 2^{s-t}3^{t-u}4^u = 8\cdot\frac{4^{1+7}-1}{4-1} - 9\cdot\frac{3^{1+7}-1}{3-1} + 2\cdot\frac{2^{1+7}-1}{2-1} = 145750$$

公式2・1・3

$$\sum_{s=0}^{r} 2^s = \frac{2^{2+r} - 2\cdot 1^{2+r} + 0^{2+r}}{2!} \quad (3.2)$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}3^t = \frac{3^{3+r} - 3\cdot 2^{3+r} + 3\cdot 1^{3+r} - 0^{3+r}}{3!} \quad (3.3)$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} 2^{s-t}3^{t-u}4^u = \frac{4^{4+r} - 4\cdot 3^{4+r} + 6\cdot 2^{4+r} - 4\cdot 1^{4+r} + 0^{4+r}}{4!} \quad (3.4)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} 2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s {}_nC_s (n-s)^{n+r_1} \quad (3.n)$$

証明

公式2・1・2を用いて、

$$\sum_{s=0}^{r} 2^s = \frac{2^{1+r} - 1}{2-1} = \frac{2^{2+r} - 2\cdot 1^{2+r} + 0^{2+r}}{2!} \quad (3.2)$$

次に

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}3^t = 3\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1} - 2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$= \frac{3^{2+r}-3}{2} - \frac{2^{2+r}-2}{1} = \frac{3^{2+r}}{2} - \frac{3}{2} - 2^{2+r} + 2$$

$$= \frac{3^{3+r} - 3\cdot 2^{3+r} + 3\cdot 1^{3+r} - 0^{3+r}}{3!} \quad (3.3)$$

次に

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\sum_{u=0}^{t} 2^{s-t}3^{t-u}4^u = 8\cdot\frac{4^{1+r}-1}{4-1} - 9\cdot\frac{3^{1+r}-1}{3-1} + 2\cdot\frac{2^{1+r}-1}{2-1}$$

$$= \frac{8}{3}4^{1+r} - \frac{9}{2}3^{1+r} + 2\cdot 2^{1+r} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{64\cdot 4^{1+r} - 108\cdot 3^{1+r} + 48\cdot 2^{1+r} + 4\cdot 1^{1+r}}{4!}$$

$$= \frac{4^{4+r} - 4\cdot 3^{4+r} + 6\cdot 2^{4+r} + 4\cdot 1^{4+r} - 0^{3+r}}{4!} \quad (3.4)$$

以下帰納法により (3.n) を得る。

例

$$\sum_{s=0}^{4}\sum_{t=0}^{s} 2^{s-t}3^t = 2^0 3^0 + \left(2^1 3^0 + 2^0 3^1\right) + \left(2^2 3^0 + 2^1 3^1 + 2^0 3^2\right) + \left(2^3 3^0 + 2^2 3^1 + 2^1 3^2 + 2^0 3^3\right)$$

$$= \frac{2}{3!}\left(3^{3+4} - 3\cdot 2^{3+4} + 3\cdot 1^{3+4} - 0^{3+4}\right) = 301$$

公式2・1・4

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s(n-s)^{n-1} = 0 \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (4.n-1)$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s(n-s)^{n} = n! \qquad n=0,1,2,\cdots \qquad (4.n)$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s(n-s)^{n+1} = {}_{n+1}C_2\, n! \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (4.n+1)$$

証明

公式2・1・3 より

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s(n-s)^{n+r_1}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2}\frac{(-1)^s}{n!}{}_nC_s(n-s)^{n+r_1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}{}_nC_{n-1}$$

一方、公式2・1・2 より

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n-1}(n-s-1)}{n!}\frac{(n-s)^{1+r_1}-1}{n-s-1}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n+r_1}}{n!} - \sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n-1}}{n!}$$

両者より

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n!}{}_nC_{n-1} = -\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n-1}}{n!}$$

とならねばならないが、この右辺は

$$\sum_{s=0}^{n-2}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n-1}}{n!} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n-1}}{n!} - (-1)^{n-1}\frac{{}_nC_{n-1}1^{n-1}}{n!}$$

であるから、

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n!}{}_nC_{n-1} = -\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{{}_nC_s(n-s)^{n-1}}{n!} + (-1)^{n-1}\frac{{}_nC_{n-1}}{n!}$$

これより (4.n−1) を得る。

次に　公式2・1・3 において $r_1=0$ と置けば

$$\sum_{r_2=0}^{0}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s(n-s)^{n}$$

この左辺は

$$\sum_{r_2=0}^{0}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = 2^0 3^0\cdots n^0 = 1$$

よって (4.n) を得る。

最後に　公式2・1・3 において $r_1=1$ と置けば

$$\sum_{r_2=0}^{1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s(n-s)^{n+1}$$

この左辺は

$$\sum_{r_2=0}^{1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = 2^0 3^0\cdots n^0 + \sum_{r_3=0}^{1}\sum_{r_4=0}^{r_3}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{1-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n}$$

$$= 2^0 3^0\cdots n^0 + 2^1 3^0\cdots n^0 + \sum_{r_4=0}^{1}\sum_{r_5=0}^{r_4}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{1-1}3^{1-r_4}\cdots n^{r_n}$$

$$= 2^0 3^0\cdots n^0 + 2^1 3^0\cdots n^0 + 2^0 3^1 4^0\cdots n^0 + \sum_{r_5=0}^{1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^0 3^0 4^{1-r_5}\cdots n^{r_n}$$

$$\vdots$$

$$= 2^0 3^0\cdots n^0 + 2^1 3^0\cdots n^0 + 2^0 3^1 4^0\cdots n^0 + \cdots + 2^0 3^0 4^0\cdots n^1$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$$

$$= {}_{n+1}C_2$$

かくして (4.n+1) を得る。

例　n=2

$$\sum_{s=0}^{2}(-1)^s {}_2C_s(2-s)^{2-1} = {}_2C_0\,2^1 - {}_2C_1\,1^1 + {}_2C_2\,0^1 = 0$$

$$\sum_{s=0}^{2}(-1)^s {}_2C_s(2-s)^{2} = {}_2C_0\,2^2 - {}_2C_1\,1^2 + {}_2C_2\,0^2 = 2!$$

$$\sum_{s=0}^{2}(-1)^s {}_2C_s(2-s)^{2+1} = {}_2C_0\,2^3 - {}_2C_1\,1^3 + {}_2C_2\,0^3 = {}_3C_2\,2!$$

公式2・1・5

$$\left(e^x-1\right)^1 = \sum_{r=0}^{\infty}\left(1^{1+r}-0^{1+r}\right)\frac{x^{1+r}}{(1+r)!}$$

$$\left(e^x-1\right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}\left(2^{2+r}-2\cdot 1^{2+r}+0^{2+r}\right)\frac{x^{2+r}}{(2+r)!}$$

$$\left(e^x-1\right)^3 = \sum_{r=0}^{\infty}\left(3^{3+r}-3\cdot 2^{3+r}+3\cdot 1^{3+r}-0^{3+r}\right)\frac{x^{3+r}}{(3+r)!}$$

$$\vdots$$

$$\left(e^x-1\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_nC_s\, s^{n+r}\frac{x^{n+r}}{(n+r)!} \qquad (5.n)$$

証明

$$\left(e^x-1\right)^n = \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\left(e^x\right)^s(-1)^{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_nC_s\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(sx)^r}{r!}$$

ここで

$$\left(e^x-1\right)^n = \left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^n = \left(\frac{1}{1!}\right)^n x^n + \cdots$$

であるからxの $(n-1)$ 次 〜 0次 の項は存在せず、従って上式右辺中のこれらの項は相殺して0にならねばならない。よって

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_nC_s\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(sx)^r}{r!} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_nC_s\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(sx)^{n+r}}{(n+r)!}$$

となり (5.n) を得る。

2・2　多重級数と指数関数(その1)

前節の公式2・1・1において $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ と置くことにより以下の公式を得る。

公式2・2・1

m を非負の整数とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{1+r}C_1\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{2+r}C_2\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{x^{m+r+s+t+u}}{(m+r+s+t+u)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{3+r}C_3\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{n-1+r}C_{n-1}\,x^{m+r}}{(m+r)!} \qquad (1.n)$$

証明

前節の公式2・1・1

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k^{r_k}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}a_1^{r_1-r_2}a_2^{r_2-r_3}\cdots a_n^{r_n}\frac{x^{m+r_1}}{(m+r_1)!}$$

において $a_k=1\quad,\quad k=1,2,\cdots,n$ と置けば

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}\frac{x^{m+r_1}}{(m+r_1)!}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\frac{x^{m+r_1}}{(m+r_1)!}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}1$$

ここで

$$\sum_{s=0}^{r}1=\frac{1+r}{1!}={}_{1+r}C_1$$

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}1=\sum_{s=0}^{r}\frac{1+r}{1!}=\sum_{s=1}^{1+r}s=\frac{(1+s)(2+s)}{2!}={}_{2+r}C_2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}1=\frac{(1+r_1)(2+r_1)\cdots(n-1+r_1)}{(n-1)!}={}_{n-1+r_1}C_{n-1}$$

であるからこれらを代入すれば与式を得る。

公式2･2･2

$$\frac{1x^1}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\cdots = e^x\cdot\frac{x^1}{1!}$$

$$\frac{1x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{6x^4}{4!}+\frac{10x^5}{5!}+\cdots = e^x\cdot\frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{1x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\frac{10x^5}{5!}+\frac{20x^6}{6!}+\cdots = e^x\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{n+r}C_n\,x^{n+r}}{(n+r)!} = e^x\cdot\frac{x^n}{n!} \tag{2.n}$$

証明

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{{}_{n+r}C_n\,x^{n+r}}{(n+r)!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+r)!}{n!\,r!}\,\frac{x^{n+r}}{(n+r)!}=\frac{x^n}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}=e^x\cdot\frac{x^n}{n!}$$

公式2･2･1 と公式2･2･2より、直ちに次の公式を得る。

公式2･2･3

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{1+r+s}}{(1+r+s)!} = e^x\cdot\frac{x^1}{1!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!} = e^x\cdot\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{x^{3+r+s+t+u}}{(3+r+s+t+u)!} = e^x\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n-1+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!} = e^x\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{3.n}$$

公式2･2･3はこの両辺を高階微積分することにより、さらに一般的な公式となる。

公式2･2･4

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!} = e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \qquad (n\geqq m) \tag{4.d}$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{-m}{r}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}-\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-m+s}{n}\frac{x^s}{s!} \tag{4.s}$$

証明

公式2･2･3 より

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}=e^x\cdot\frac{x^n}{n!} \tag{4.n+1}$$

この両辺を m 回（$m\leqq n$）微分すると、先ず左辺は

$$\frac{d^m}{dx^m}\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}$$

右辺は超微積分編 18 の公式18･4･1

$$\left(e^x x^n\right)^{(m)}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}x^{n-r}$$

を用いて

$$\frac{d^m}{dx^m}e^x\cdot\frac{x^n}{n!}=\frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}x^{n-r}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}$$

両者より

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \tag{4.d}$$

次に、(4.n+1) の両辺を0から x まで m 回 積分すると、先ず左辺は

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}dx^m=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}\frac{x^{n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n+1}r_k\right)!}$$

右辺は超微積分編 16 の公式16･5･1'

$$\int_{-\infty}^x\!\!\cdots\!\int_{-\infty}^x e^x x^n dx^m=e^x\sum_{r=0}^{n}\binom{-m}{r}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}x^{n-r}$$

を用いて、

$$\int_0^x e^x\cdot\frac{x^n}{n!}dx=\frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{-1}{r}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}x^{n-r}-\frac{e^0}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{-1}{r}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}0^{n-r}$$

$$= e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{-1}{r} \frac{x^{n-r}}{\Gamma(1+n-r)} - e^0 \sum_{r=0}^{n} \binom{-1}{r} \frac{0^{n-r}}{\Gamma(1+n-r)}$$

$$= e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{-1}{r} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} - \binom{-1}{n} \frac{x^0}{0!}$$

$$\int_0^x \int_0^x e^x \cdot \frac{x^n}{n!} dx^2 = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{-2}{r} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} - \binom{-2}{n} \frac{x^0}{0!} - \binom{-1}{n} \frac{x^1}{1!}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x e^x \cdot \frac{x^n}{n!} dx^m = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{-m}{r} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} - \sum_{s=0}^{m-1} \binom{-m+s}{n} \frac{x^s}{s!}$$

両者より

$$\sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_{n+1}=0}^{\infty} \frac{x^{n+m+\sum_{k=1}^{n+1} r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n+1} r_k\right)!} = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{-m}{r} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} - \sum_{s=0}^{m-1} \binom{-m+s}{n} \frac{x^s}{s!} \tag{4.s}$$

例 $n=2,\ m=1,2$ の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{0+r+s+t}}{(0+r+s+t)!} = e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{2}{r} \frac{x^{2-r}}{(2-r)!} = e^x \left(1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^1}{1!} + 1 \cdot \frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{1+r+s+t}}{(1+r+s+t)!} = e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{1}{r} \frac{x^{2-r}}{(2-r)!} = e^x \left(1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!} = e^x \cdot \frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!} = e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{-1}{r} \frac{x^{2-r}}{(2-r)!} - \sum_{s=0}^{1-1} \binom{-1+s}{2} \frac{x^s}{s!}$$

$$= e^x \left\{ \binom{-1}{0} \frac{x^2}{2!} + \binom{-1}{1} \frac{x^1}{1!} + \binom{-1}{2} \frac{x^0}{0!} \right\} - \binom{-1}{2} \frac{x^0}{0!}$$

$$= e^x \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^0}{0!} \right) - \frac{x^0}{0!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{4+r+s+t}}{(4+r+s+t)!} = e^x \sum_{r=0}^{2} \binom{-2}{r} \frac{x^{2-r}}{(2-r)!} - \sum_{s=0}^{2-1} \binom{-2+s}{2} \frac{x^s}{s!}$$

$$= e^x \left\{ \binom{-2}{0} \frac{x^2}{2!} + \binom{-2}{1} \frac{x^1}{1!} + \binom{-2}{2} \frac{x^0}{0!} \right\} - \left\{ \binom{-2}{2} \frac{x^0}{0!} + \binom{-1}{2} \frac{x^1}{1!} \right\}$$

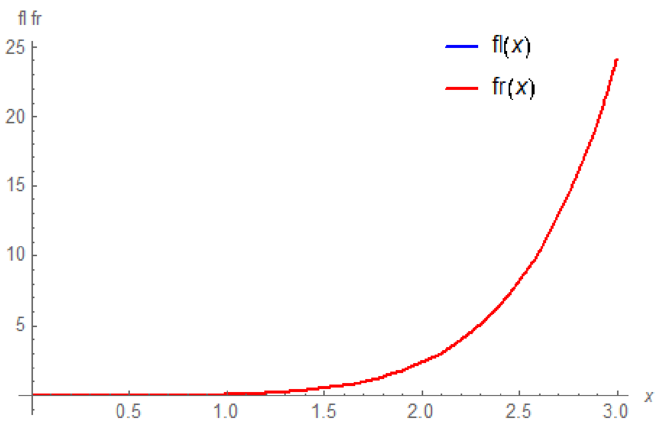
$$= e^x \left(1 \cdot \frac{x^2}{2!} - 2 \cdot \frac{x^1}{1!} + 3 \cdot \frac{x^0}{0!} \right) - \left(3 \cdot \frac{x^0}{0!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} \right)$$

最後の式の両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)は見ることができない。

```
fl[x_] := Sum[x^(4+r+s+t)/(4+r+s+t)!, {r,0,30}, {s,0,30}, {t,0,30}]
```

$$\mathrm{fl}[x\_] := \sum_{r=0}^{30}\sum_{s=0}^{30}\sum_{t=0}^{30}\frac{x^{4+r+s+t}}{(4+r+s+t)!}$$

$$\mathrm{fr}[x\_] := e^{x}\left(1\times\frac{x^{2}}{2!}-2\times\frac{x^{1}}{1!}+3\times\frac{x^{0}}{0!}\right)-\left(3\times\frac{x^{0}}{0!}+1\times\frac{x^{1}}{1!}\right)$$



公式2･2･4 の特殊ケースとして次の公式が得られる。

公式2･2･4'

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{2+r+s}}{(2+r+s)!}=e^{x}\left(\frac{x^{1}}{1!}-\frac{x^{0}}{0!}\right)+1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!}=e^{x}\left(\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{1}}{1!}+\frac{x^{0}}{0!}\right)-1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{x^{4+r+s+t+u}}{(4+r+s+t+u)!}=e^{x}\left(\frac{x^{3}}{3!}-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{1}}{1!}-\frac{x^{0}}{0!}\right)+1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=e^{x}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}+(-1)^{n} \tag{4.n'}$$

導出

公式2･2･4 の (4.s) において n を $n-1$ に置換し $m=1$ と置けば

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=e^{x}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{-1}{r}\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}-\sum_{s=0}^{0}\binom{-1+s}{n-1}\frac{x^{s}}{s!}$$

$$=e^{x}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}-\binom{-1}{n-1}\frac{x^{0}}{0!}$$

$$=e^{x}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}+(-1)^{n} \tag{4.n'}$$

2・3　多重級数と指数関数(その2)

前節の諸公式においてx を $-x$ に置換することにより 以下の諸公式を得る。

公式2・3・1

m を非負の整数とするとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{x^{m+r+s}}{(m+r+s)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{{}_{1+r}C_{1}\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{m+r+s+t}}{(m+r+s+t)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{{}_{2+r}C_{2}\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t+u}\frac{x^{m+r+s+t+u}}{(m+r+s+t+u)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{{}_{3+r}C_{3}\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{{}_{n-1+r}C_{n-1}\,x^{m+r}}{(m+r)!}$$

公式2・3・2

$$\frac{1x^1}{1!}-\frac{2x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}-\frac{4x^4}{4!}+-\cdots=\frac{1}{e^x}\frac{x^1}{1!}$$

$$\frac{1x^2}{2!}-\frac{3x^3}{3!}+\frac{6x^4}{4!}-\frac{10x^5}{5!}+-\cdots=\frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2!}$$

$$\frac{1x^3}{3!}-\frac{4x^4}{4!}+\frac{10x^5}{5!}-\frac{20x^6}{6!}+-\cdots=\frac{1}{e^x}\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{{}_{n+r}C_{n}\,x^{n+r}}{(n+r)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^n}{n!}$$

公式2・3・3

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{x^{1+r+s}}{(1+r+s)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^1}{1!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t+u}\frac{x^{3+r+s+t+u}}{(3+r+s+t+u)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\frac{x^{n-1+\sum_{k=1}^{n} r_k}}{\left(n-1+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

公式2・3・4

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n+1} r_k}\frac{x^{n-m+\sum_{k=1}^{n+1} r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n+1} r_k\right)!}=\frac{(-1)^m}{e^x}\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\frac{(-1)^r x^{n-r}}{(n-r)!} \tag{4.d}$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{n+1}=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n+1} r_k}\frac{x^{n+m+\sum_{k=1}^{n+1} r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n+1} r_k\right)!}=\frac{(-1)^m}{e^x}\sum_{r=0}^{n}\binom{-m}{r}\frac{(-1)^r x^{n-r}}{(n-r)!}$$

$$-(-1)^m\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-m+s}{n}\frac{(-1)^s x^s}{s!} \tag{4.s}$$

例　***n*=2, *m*=1** の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{1+r+s+t}}{(1+r+s+t)!}=\frac{(-1)^1}{e^x}\sum_{r=0}^{2}\binom{1}{r}\frac{(-1)^r x^{2-r}}{(2-r)!}$$

$$=-\frac{1}{e^x}\left(1\cdot\frac{x^2}{2!}-1\cdot\frac{x^1}{1!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{2+r+s+t}}{(2+r+s+t)!}=\frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!}=\frac{(-1)^1}{e^x}\sum_{r=0}^{1}\binom{-1}{r}\frac{(-1)^r x^{2-r}}{(2-r)!}$$

$$-(-1)^1\sum_{s=0}^{1-1}\binom{-1+s}{2}\frac{(-1)^s x^s}{s!}$$

$$=-\frac{1}{e^x}\left\{\binom{-1}{0}\frac{x^2}{2!}-\binom{-1}{1}\frac{x^1}{1!}+\binom{-1}{2}\frac{x^0}{0!}\right\}+\binom{-1}{2}\frac{x^0}{0!}$$

$$=-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)+\frac{x^0}{0!}$$

公式2・3・4’

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{x^{2+r+s}}{(2+r+s)!}=1-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{x^{3+r+s+t}}{(3+r+s+t)!} = 1-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t+u}\frac{x^{4+r+s+t+u}}{(4+r+s+t+u)!} = 1-\frac{1}{e^x}\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^0}{0!}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n} r_k}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n} r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n} r_k\right)!} = 1-\frac{1}{e^x}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)!}$$

2・4　多重級数と指数関数(その3)

公式2・1・1 において $a_1, a_2, \cdots a_n = 1, 2, \cdots, n$ と置くことにより以下の公式を得る。

公式2・4・1

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1^r}{(1+r)!}x^{1+r} = \frac{1}{1!}\left(e^x-1\right)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s}{(2+r+s)!}x^{2+r+s} = \frac{1}{2!}\left(e^x-1\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t} = \frac{1}{3!}\left(e^x-1\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k} = \frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n \tag{1.n}$$

導出

先ず、公式2・1・1

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k^{r_k}\frac{x^{m+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}a_1^{r_1-r_2}a_2^{r_2-r_3}\cdots a_n^{r_n}\frac{x^{m+r_1}}{\left(m+r_1\right)!}$$

において $m=n$, $a_k=k$　$\left(k=1, 2, \cdots, n\right)$ と置けば

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}1^{r_1-r_2}2^{r_2-r_3}\cdots n^{r_n}\frac{x^{n+r_1}}{\left(n+r_1\right)!} \tag{a}$$

次に 公式2・1・3

$$\sum_{r_2=0}^{r_1}\sum_{r_3=0}^{r_2}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}2^{r_2-r_3}3^{r_3-r_4}\cdots n^{r_n} = \frac{\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s\,(n-s)^{n+r_1}}{n!}$$

の両辺に $\dfrac{x^{n+r_1}}{\left(n+r_1\right)!}$ を乗じて r_1 について0 から ∞ まで加算すれば

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}}1^{r_1-r_2}2^{r_2-r_3}\cdots n^{r_n}\frac{x^{n+r_1}}{\left(n+r_1\right)!} = \frac{\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s\,(n-s)^{n+r_1}}{n!}\frac{x^{n+r_1}}{\left(n+r_1\right)!} \tag{b}$$

最後に 公式2・1・5 の両辺を $n!$ で割り r を r_1 に書き換えれば

$$\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n = \frac{\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s {}_nC_s\,(n-s)^{n+r_1}}{n!}\frac{x^{n+r_1}}{(n+r_1)!} \tag{c}$$

かくて (a),(b),(c) の3式より与式を得る。

公式2･4･1はその両辺を高階微積分することにより、さらに一般的な公式となる。

公式2･4･2

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{n-1}C_r\,(n-r)^{m-1}e^{(n-r)x}\qquad n\geqq m \tag{2.d}$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^m}e^{(n-s)x}-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{x^r}{r!} \tag{2.s}$$

証明

公式2･4･1 より

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n \tag{2.n}$$

この両辺を m 回（$m\leqq n$）微分すると、先ず左辺は

$$\frac{d^m}{dx^m}\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

右辺は

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n=\frac{e^x}{(n-1)!}\left(e^x-1\right)^{n-1}=\frac{e^x}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}C_r\,(-1)^r\left(e^x\right)^{n-1-r}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{n-1}C_r\,(n-r)^0e^{(n-r)x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{n-1}C_r\,(n-r)^1e^{(n-r)x}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\,(n-r)^2e^{(n-r)x}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\,(n-r)^{m-1}e^{(n-r)x}$$

よって (2.d) を得る。

次に、(2.n) の両辺を0から x まで m 回 積分すると、先ず左辺は

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}dx^m$$

$$= \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

右辺は

$$\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\left(e^x\right)^{n-s}(-1)^s = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\,(-1)^se^{(n-s)x}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}{}_nC_s\,(-1)^se^{(n-s)x} + {}_nC_n\,(-1)^ne^0\right\}$$

より

$$\int_0^x\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n dx = \frac{1}{n!}\left\{\int_0^x\sum_{s=0}^{n-1}{}_nC_s\,(-1)^se^{(n-s)x}dx + (-1)^n\int_0^x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}e^{(n-s)x}\right]_0^x + \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{x^1}{1!}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}e^{(n-s)x} - \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}\frac{x^0}{0!} - \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^1}{1!}$$

ここで $(-1)^n = -\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s{}_nC_s$ であるから、

$$\int_0^x\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n dx = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}e^{(n-s)x}$$

$$- \frac{1}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}\frac{x^0}{0!} + \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^0}\frac{x^1}{1!}\right\}$$

$$\int_0^x\int_0^x\frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n dx^2 = \frac{1}{n!}\int_0^x\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}e^{(n-s)x}dx$$

$$- \frac{1}{n!}\int_0^x\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^1}\frac{x^0}{0!} + \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^0}\frac{x^1}{1!}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^2}e^{(n-s)x} - \frac{1}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^2}\frac{x^0}{0!} \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^1}\frac{x^1}{1!} + \sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^0}\frac{x^2}{2!}\right\}$$

$\vdots$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \frac{1}{n!}\left(e^x-1\right)^n dx^\lambda = \frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^m}e^{(n-s)x} - \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s {}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{x^r}{r!}$$

よって (2.s) を得る。

例　$\boldsymbol{n=3,\ m=1,2}$ の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(1+r+s+t)!}x^{1+r+s+t} = \frac{1}{(3-1)!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r {}_{3-1}C_r (3-r)^{2-1}e^{(3-r)x}$$

$$= \frac{1}{2!}\left(3^1e^{3x} - 2\cdot 2^1e^{2x} + 1^1e^x\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(2+r+s+t)!}x^{2+r+s+t} = \frac{1}{(3-1)!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r {}_{3-1}C_r (3-r)^{1-1}e^{(3-r)x}$$

$$= \frac{1}{2!}\left(e^{3x} - 2e^{2x} + e^x\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t} = \frac{1}{3!}\left(e^x-1\right)^3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(4+r+s+t)!}x^{4+r+s+t} = \frac{1}{3!}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s {}_3C_s}{(3-s)^1}e^{(3-s)x} - \frac{1}{3!}\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s {}_3C_s}{(3-s)^{1-r}}\frac{x^r}{r!}$$

$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3^1}e^{3x} - \frac{3}{2^1}e^{2x} + \frac{3}{1^1}e^x\right)$$

$$- \frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{1}{3^1} - \frac{3}{2^1} + \frac{3}{1^1}\right)\frac{x^0}{0!} + \left(\frac{1}{3^0} - \frac{3}{2^0} + \frac{3}{1^0}\right)\frac{x^1}{1!}\right\}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^r 2^s 3^t}{(5+r+s+t)!}x^{5+r+s+t} = \frac{1}{3!}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s {}_3C_s}{(3-s)^2}e^{(3-s)x} - \frac{1}{3!}\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s {}_3C_s}{(3-s)^{2-r}}\frac{x^r}{r!}$$

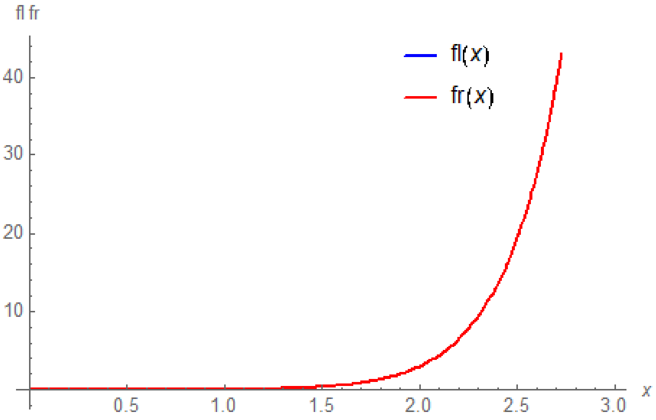
$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3^2}e^{3x} - \frac{3}{2^2}e^{2x} + \frac{3}{1^2}e^x\right)$$

$$- \frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{1}{3^2} - \frac{3}{2^2} + \frac{3}{1^2}\right)\frac{x^0}{0!} + \left(\frac{1}{3^1} - \frac{3}{2^1} + \frac{3}{1^1}\right)\frac{x^1}{1!} + \left(\frac{1}{3^0} - \frac{3}{2^0} + \frac{3}{1^0}\right)\frac{x^2}{2!}\right\}$$

最後の式の両辺を図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)は見ることができない。

$$\texttt{f1[x\_] :=} \sum_{r=0}^{30}\sum_{s=0}^{30}\sum_{t=0}^{30}\frac{1^r\, 2^s\, 3^t}{(5+r+s+t)!}\, x^{5+r+s+t}$$

$$\texttt{fr[x\_]} := \frac{1}{3\,!}\sum_{s=0}^{2}\frac{(-1)^{s}\,\texttt{Binomial[3, s]}}{(3-s)^{2}}\,e^{(3-s)\,x} - \frac{1}{3\,!}\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\frac{(-1)^{s}\,\texttt{Binomial[3, s]}}{(3-s)^{2-r}}\,\frac{x^{r}}{r\,!}$$



公式2・4・2において x を $\log x$ と置換すれば、次の公式を得る。

公式2・4・3

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}{}_{n-1}C_r\,(n-r)^{m-1}x^{(n-r)} \qquad n\geqq m \tag{3.d}$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{s}{}_{n}C_s}{(n-s)^{m}}x^{(n-s)}-\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{s}{}_{n}C_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{(\log x)^{r}}{r!} \tag{3.s}$$

公式2・4・3 の特殊ケースとして次の公式が得られる。

公式2・4・3'

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1^{r}}{(1+r)!}(\log x)^{1+r}=\frac{1}{1!}(x-1)^{1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1^{r}2^{s}}{(2+r+s)!}(\log x)^{2+r+s}=\frac{1}{2!}(x-1)^{2}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1^{r}2^{s}3^{t}}{(3+r+s+t)!}(\log x)^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}(x-1)^{3}$$

$\vdots$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}(x-1)^n \tag{3.n'}$$

導出

公式2･4･3 の (3.s) において $m=0$ と置けば

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^0}x^{(n-s)}-\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^0}\frac{(\log x)^0}{0!}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^0}x^{(n-s)}-\frac{1}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s-(-1)^n{}_nC_n\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}{}_nC_s x^{(n-s)}(-1)^s=\frac{1}{n!}(x-1)^n$$

なお、公式2･4･1において x を $\log x$ と置換してもこれが得られることは言うまでもない。

2･5　多重級数と指数関数(その4)

前節の諸公式においてx を $-x$ に置換することにより 以下の諸公式を得る。

公式2･5･1

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{(1+r)!}x^{1+r}=\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r2^s}{(2+r+s)!}x^{2+r+s}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^n$$

公式2･5･2

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{(-1)^{n-m}}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\frac{(n-r)^{m-1}}{e^{(n-r)x}}\qquad n\geqq m \tag{2.d}$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}x^{\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{(-1)^{n+m}}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^m e^{(n-s)x}}-\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{r+s}{}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{x^r}{r!}\right\} \tag{2.s}$$

例　**n=3, m=1** の場合

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{(2+r+s+t)!}x^{2+r+s+t}=\frac{(-1)^{3-1}}{(3-1)!}\sum_{r=0}^{3-1}(-1)^r{}_{3-1}C_r\frac{(3-r)^{1-1}}{e^{(3-r)x}}$$

$$=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{e^{3x}}-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{(3+r+s+t)!}x^{3+r+s+t}=\frac{(-1)^{3-0}}{3!}\left(\frac{1}{e^x}-1\right)^3$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r 2^s 3^t}{(4+r+s+t)!}x^{4+r+s+t}$$

$$=\frac{(-1)^{3+1}}{3!}\left\{\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^s{}_3C_s}{(3-s)^1 e^{(3-s)x}}-\sum_{r=0}^{1}\sum_{s=0}^{3-1}\frac{(-1)^{r+s}{}_3C_s}{(3-s)^{1-r}}\frac{x^r}{r!}\right\}$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3^1e^{3x}}-\frac{3}{2^1e^{2x}}+\frac{3}{1^1e^x}\right)$$

$$-\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{1}{3^1}-\frac{3}{2^1}+\frac{3}{1^1}\right)\frac{x^0}{0!}-\left(\frac{1}{3^0}-\frac{3}{2^0}+\frac{3}{1^0}\right)\frac{x^1}{1!}\right\}$$

公式2･5･3

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n-m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{(-1)^{n-m}}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r{}_{n-1}C_r\frac{(n-r)^{m-1}}{x^{(n-r)}} \qquad n\geqq m \qquad (3.d)$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+m+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}$$

$$=\frac{(-1)^{n+m}}{n!}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s{}_nC_s}{(n-s)^m x^{(n-s)}}-\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^{r+s}{}_nC_s}{(n-s)^{m-r}}\frac{(\log x)^r}{r!}\right\} \qquad (3.s)$$

公式2･5･3'

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1^r}{(1+r)!}(\log x)^{1+r}=\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^1$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{1^r2^s}{(2+r+s)!}(\log x)^{2+r+s}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+s+t}\frac{1^r2^s3^t}{(3+r+s+t)!}(\log x)^{3+r+s+t}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}r_k}\frac{\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}}{\left(n+\sum_{k=1}^{n}r_k\right)!}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^{n}r_k}=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^n$$

2･6 オイラー･マスケロニの定数の2重級数表示

公式2･6･1

γ をオイラー･マスケロニの定数 $\gamma = 0.57721566\cdots$ とするとき、次式が成り立つ。

$$1-\gamma = \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{sr^{s}} \tag{1.1}$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{1}{s(2+r-s)^{s}} \tag{1.1'}$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty}\frac{\zeta(s)-1}{s} \tag{1.1''}$$

$$\gamma = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^{s}}{s\,r^{s}} \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{(-1)^{s}}{s(1+r-s)^{s}} \tag{1.2'}$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty}(-1)^{s}\frac{\zeta(s)}{s} \tag{1.2''}$$

導出

$$\gamma = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - log\,\infty = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - log\left(\frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{3}\cdots\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - \left(log\frac{2}{1} + log\frac{3}{2} + log\frac{4}{3} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r} - \sum_{r=2}^{\infty}log\frac{r}{r-1}$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r} - \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{sr^{s}} = 1 + \sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r} - \sum_{r=2}^{\infty}\left(\frac{1}{r} + \sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{sr^{s}}\right)$$

$$= 1 - \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{sr^{s}}$$

$$\therefore \quad 1-\gamma = \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{sr^{s}} \tag{1.1}$$

次に(1.1)を対角線に沿って並べ替えると

$$\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{sr^{s}} = \frac{1}{2\cdot 2^{2}} + \frac{1}{3\cdot 2^{3}} + \frac{1}{4\cdot 2^{4}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3^{2}} + \frac{1}{3\cdot 3^{3}} + \frac{1}{4\cdot 3^{4}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 4^{2}} + \frac{1}{3\cdot 4^{3}} + \frac{1}{4\cdot 4^{4}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2^2} + \left(\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}\right) +\cdots$$

$$= \sum_{s=2}^{2}\frac{1}{s(2+2-s)^s}+\sum_{s=2}^{3}\frac{1}{s(2+3-s)^s}+\sum_{s=2}^{4}\frac{1}{s(2+4-s)^s}+\cdots$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{1}{s(2+r-s)^s} \qquad (1.1')$$

次に

$$\gamma = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - \left(\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{r}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s\,r^s} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{1+1}}{1\,r^1}+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s\,r^s}\right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s\,r^s} \qquad (1.2)$$

そして(1.2)を対角線に沿って並べ替えて(1.2')を得る。

最後に

$$1-\gamma = \sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s r^s} = \sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s}-1\right) = \sum_{s=2}^{\infty}\frac{\zeta(s)-1}{s} \qquad (1.1'')$$

$$\gamma = \sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s} = \sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s}\zeta(s) \qquad (1.2'')$$

目標精度を小数点以下4桁とし 数式ソフトで上記公式を計算すると次のようになる。

$1-\gamma, \gamma$

```
N[{1 - EulerGamma, EulerGamma}]
{0.422784, 0.577216}
```

Zeta Series

$$f[m\_] := \sum_{s=2}^{m}\frac{\mathrm{Zeta}[s]-1}{s} \qquad \mathrm{N}[f[10]]$$

0.422701

Alternating Double Series

$$g[m\_] := \sum_{s=2}^{m}\frac{(-1)^s}{s}\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r^s} \qquad \mathrm{N}[g[44]]$$

0.577298

計算結果

γ を定義式により計算すると目標精度(小数点以下4桁)を得るのに6, 000項を要する。これに対し、ゼータ級数 (1.1″) はわずか9項で目標精度に達した。2番目は交代2重級数 (1.2) で44×43項で目標精度に達した。他の式は定義式よりも遥かに遅かった。

2007.12.10
2011.07.09 renewed
2016.02.05 updated

Kano. Kono

宇宙人の数学