3　二項恒等式の高階微積分

二項恒等式の最も単純なものは次式で与えられる。

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s x^s \tag{0}$$

面白いことに、この両辺を高階微分すると階乗が得られ、この両辺を高階積分するとベータ関数が得られる。

3･1　二項恒等式の高階微分

公式3･1･1 (zakii)

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^k = 0 \qquad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{1.n-1}$$

$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^n = (-1)^n n! \tag{1.n}$$

証明

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s x^s \tag{0}$$

$x=-1$ と置けば、

$$0 = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^0 \tag{1.0}$$

(0) の両辺を1回微分すれば

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s s x^{s-1}$$

$x=-1$ と置けば、

$$0 = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s-1} {}_nC_s s = -\sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^1 \tag{1.1}$$

(0) の両辺を2回微分すれば

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s s(s-1) x^{s-2}$$

$x=-1$ と置けば、

$$0 = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s(s-1) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^2 - \sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^1$$

となるが、(1.0) , (1.1) より $\sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^k = 0 \quad (k=0,1)$ であったから、

$$0 = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s {}_nC_s s^2 \tag{1.2}$$

⋮

(0) の両辺を $n-1$ 回微分すれば

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot(1+x)^1 = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s s(s-1)(s-2)\cdots\{s-(n-2)\} x^{s-(n-1)}$$

$x=-1$と置けば、

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 0^1 = (-1)^{n-1}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s(s-1)(s-2)\cdots\{s-(n-2)\}$$

$0^1=0$ であるから、この式は$c_1, c_2, \cdots, c_{n-2}$を整数として次のように書き替えられる。

$$0 = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^{n-1} + c_{n-2}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^{n-2} + \cdots + c_1\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^1$$

ところが $\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^k = 0 \quad (k=0,1,n-2)$ であったから、

$$0 = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^{n-1} \tag{1.n-1}$$

最後に、(0) の両辺をn 回微分すれば

$$n(n-1)\cdots 1\cdot(1+x)^{n-n} = \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s s(s-1)\cdots\{s-(n-1)\}\cdot x^{s-n}$$

$x=-1$と置けば、

$$n(n-1)\cdots 1\cdot 0^0 = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{s-n}{}_nC_s s(s-1)\cdots\{s-(n-1)\}$$

$0^0=1$ であるから、この式は$c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$を整数として次のように書き替えられる。

$$(-1)^n n! = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^n + c_{n-1}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^{n-1} + \cdots + c_1\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^1$$

ところが $\sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^k = 0 \quad (k=0,1,n-1)$ であったから、

$$(-1)^n n! = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s{}_nC_s s^n \tag{1.n}$$

c.f.

この公式においてsを$n-s$ に置換すれば

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_nC_s(n-s)^{n-1} = 0$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}{}_nC_s(n-s)^n = (-1)^n n!$$

が得られる。これらは「2 多重級数と指数関数 」の公式2・1・4 に一致する。

3・2　二項恒等式の高階積分

公式3・2・1

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+1}{}_nC_s = \frac{0!}{n+1} \tag{1.1}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+2}{}_nC_s = \frac{1!}{(n+1)(n+2)} \tag{1.2}$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+3}{}_nC_s = \frac{2!}{(n+1)(n+2)(n+3)} \tag{1.3}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+m}{}_nC_s = \frac{(m-1)!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \qquad \{=B(1+n,m)\} \tag{1.m}$$

証明

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s x^s \tag{0}$$

(0) の両辺を 0 から x まで1回積分すれば

左辺:　$\displaystyle\int_0^x (1+x)^n dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\frac{x^0}{0!}$

右辺:　$\displaystyle\int_0^x \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s x^s dx = \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_0^x = \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\frac{x^{s+1}}{s+1}$

$x=-1$ と置けば、

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+1}{}_nC_s \tag{1.1}$$

(0) の両辺を 0 から x まで2回積分すれば

左辺:　$\displaystyle\int_0^x\int_0^x (1+x)^n dx^2 = \left[\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+1}\frac{x^1}{1!}\right]_0^x$

$$= \frac{(1+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+1}\frac{x^1}{1!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{x^0}{0!}$$

右辺:　$\displaystyle\int_0^x\int_0^x \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\frac{x^{s+1}}{s+1}dx^2 = \sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\frac{x^{s+2}}{(s+1)(s+2)}$

$x=-1$ と置けば、

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)}{}_nC_s$$

ここで部分分数分解

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{1!}\left(\frac{{}_1C_0}{s+1}-\frac{{}_1C_1}{s+2}\right)$$

を用いれば

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{{}_1C_0}{1!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+1}{}_nC_s-\frac{{}_1C_1}{1!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+2}{}_nC_s$$

(1.1) を代入すれば

$$\frac{1!}{(n+1)(n+2)}=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+2}{}_nC_s \tag{1.2}$$

(0) の両辺を 0 から x まで3回積分すれば

左辺: $$\int_0^x\int_0^x\int_0^x(1+x)^n dx^3=\frac{(1+x)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$-\frac{1}{n+1}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{x^1}{1!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{x^0}{0!}$$

右辺: $$\int_0^x\int_0^x\int_0^x\sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\frac{x^{s+2}}{(s+1)(s+2)}dx^3=\sum_{s=0}^{n}{}_nC_s\frac{x^{s+3}}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$x=-1$ と置けば、

$$-\frac{1}{n+1}\frac{1}{2!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{1}{0!}$$
$$=-\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)(s+3)}{}_nC_s$$

ここで部分分数分解

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{1}{2!}\left(\frac{{}_2C_0}{s+1}-\frac{{}_2C_1}{s+2}+\frac{{}_2C_2}{s+3}\right)$$

を用いれば

$$-\frac{1}{n+1}\frac{1}{2!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{1}{0!}$$
$$=-\frac{{}_2C_0}{2!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+1}{}_nC_s+\frac{{}_2C_1}{2!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+2}{}_nC_s-\frac{{}_2C_2}{2!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+3}{}_nC_s$$

(1.1),(1.2) を代入すれば

$$\frac{2!}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+3}{}_nC_s \tag{1.3}$$

以下同様にして

$$\frac{(m-1)!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s+m}{}_nC_s \tag{1.m}$$

そして

$$\frac{(m-1)!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}=\frac{n!\,(m-1)!}{(n+m)!}=\frac{\Gamma(1+n)\Gamma(m)}{\Gamma(1+n+m)}=B(1+n,m)$$

例　n=5

これを数式ソフトで計算すると次のとおり。

分数の交代和

- `fl := n-> sum((-1)^s/(s+m)*binomial(n,s), s=0..n)`

$$n \to \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s+m} \cdot \binom{n}{s}$$

- `fl(5)`

$$\frac{10}{m+2} - \frac{5}{m+1} - \frac{10}{m+3} + \frac{5}{m+4} - \frac{1}{m+5} + \frac{1}{m}$$

階乗×分数の積

- `fr := n-> (m-1)!*product(1/(n+s), s=1..m)`

$$n \to (m-1)! \cdot \left(\prod_{s=1}^{m} \frac{1}{n+s} \right)$$

- `fr(5)`

$$\frac{120 \cdot (m-1)!}{(m+5)!}$$

等価の検証

- `testeq(fl(5),fr(5))`

TRUE

c.f.

(1.m) より次式が従う。

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{m+r} {}_{n-1}C_r \quad = B(m,n)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{p+r} \binom{q-1}{r} = B(p,q)$$

これらは 超微積分編「7 超積分」の 公式7･3･5及び公式7･3･6 に一致する。

副産物（部分分数分解）

$s \neq -1, -2, -3, \cdots$ について次式が成立する。

$$\prod_{t=1}^{n} \frac{1}{s+t} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{t=1}^{n} \frac{(-1)^{t-1}}{s+t} \binom{n-1}{t-1}$$

2011.07.11

K. Kono

宇宙人の数学