4 オイラー・マクローリンの和公式

4・1 ベルヌイ数とベルヌイ多項式

4・1・1 ベルヌイ数の定義

ベルヌイ数 B_k $(k=1,2,3,\cdots)$ は次の等式の係数として定義される。

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$$

4・1・2 ベルヌイ数の表示式

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{B_0}{0!}+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\frac{B_4}{4!}x^4+\cdots \tag{1.1}$$

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots \tag{1.2}$$

(1.1)と(1.2)のコーシー積を採ると

$$1=B_0+\left(\frac{B_1}{1!1!}+\frac{B_0}{0!2!}\right)x+\left(\frac{B_2}{2!1!}+\frac{B_1}{1!2!}+\frac{B_0}{0!3!}\right)x^2+\cdots$$

これが任意の x について成立するためには

$$B_0=1\,,\ \frac{B_1}{1!1!}+\frac{B_0}{0!2!}=0\,,\ \frac{B_2}{2!1!}+\frac{B_1}{1!2!}+\frac{B_0}{0!3!}=0\,,\ \cdots$$

とならねばならない。x^n の係数を示すと

$$\frac{B_n}{n!1!}+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!}+\frac{B_{n-2}}{(n-2)!3!}+\cdots+\frac{B_1}{1!n!}+\frac{B_0}{0!(n+1)!}=0$$

両辺に $(n+1)!$ を掛けると

$$\frac{B_n(n+1)!}{n!1!}+\frac{B_{n-1}(n+1)!}{(n-1)!2!}+\frac{B_{n-2}(n+1)!}{(n-2)!3!}+\cdots+\frac{B_1(n+1)!}{1!n!}+\frac{B_0}{0!}=0$$

これを二項係数で示すと

$${}_{n+1}C_n B_n+{}_{n+1}C_{n-1}B_{n-1}+{}_{n+1}C_{n-2}B_{n-2}+\cdots+{}_{n+1}C_1 B_1+{}_{n+1}C_0 B_0=0$$

$n+1$を n に書き直せば

$${}_nC_{n-1}B_{n-1}+{}_nC_{n-2}B_{n-2}+{}_nC_{n-3}B_{n-3}+\cdots+{}_nC_1 B_1+{}_nC_0 B_0=0 \tag{1.3}$$

これに $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ を順次代入すれば

$${}_2C_1 B_1+{}_2C_0 B_0=0 \qquad \text{より} \quad B_1=-\frac{1}{2}$$

$${}_3C_2 B_2+{}_3C_1 B_1+{}_3C_0 B_0=0 \quad \text{より} \quad B_2=\frac{1}{6}$$

⋮

とベルヌイ数が得られる。

最初のいくつかは次のとおり。

$$B_0=1\,,\ B_2=\frac{1}{6}\,,\ B_4=-\frac{1}{30}\,,\ B_6=\frac{1}{42}\,,\ B_8=-\frac{1}{30}\,,\ B_{10}=\frac{5}{66}\,,\ \cdots$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}\ ,\quad B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$$

4･1･3 ベルヌイ数の計算

(1) 順次代入法

一般的には(1.3)に $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ を順次代入する前細節の方法によって行う。小さい数から順次計算する必要があるので大きなベルヌイ数を直接得ることはできない。これは小さい数向きである。

(2) 2重和による計算法

2項係数の2重和

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r{}_kC_r r^n$$

による。具体的に展開すると

$$B_0 = \frac{1}{1}{}_0C_0 0^0$$

$$B_1 = \frac{1}{1}{}_0C_0 0^1 + \frac{1}{2}\left({}_1C_0 0^1 - {}_1C_1 1^1\right)$$

$$B_2 = \frac{1}{1}{}_0C_0 0^2 + \frac{1}{2}\left({}_1C_0 0^2 - {}_1C_1 1^2\right) + \frac{1}{3}\left({}_2C_0 0^2 - {}_2C_1 1^2 + {}_2C_2 2^2\right)$$

$\vdots$

これは大きなベルヌイ数でも直接得ることができる。但し項数が加速度的に増加するので手計算には向かない。

4･1･4 ベルヌイ多項式

(1) 定義

B_n をベルヌイ数とするとき、次の3式を満足する多項式 $B_n(x)$ をベルヌイ多項式という。

$$B_0(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}B_n(x) = nB_{n-1}(x) \qquad (n \geqq 1)$$

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0 \qquad (n \geqq 1)$$

(2) 特性

上の定義から次のことが従う。

$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n \quad (n \geqq 1)$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

$$B_n(0) = B_n$$

$$B_n(1) = B_n(0) \qquad (n \geqq 2)$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \qquad (n \geqq 1)$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \qquad (n \geqq 1)$$

また、定義から直接従うものではないが、次のことが知られている。

任意の自然数 m と区間 $[0,1]$ について

$$|B_{2m}(x)| \leqq |B_{2m}|$$

$$|B_{2m+1}(x)| \leqq (2m+1)|B_{2m}|$$

例

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \qquad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \qquad B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \qquad B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{1}{6}x,$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x,$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}, \quad \cdots$$

4·1·5 ベルヌイ多項式のフーリエ展開

ベルヌイ多項式 $B_m(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ においてはフーリエ級数に展開できる。このことをは、ベルヌイ多項式 $B_m(x - \lfloor x \rfloor)$ が $x \geqq 0$ においてフーリエ級数に展開できることを意味する。

公式4·1·5

m を自然数、$\lfloor x \rfloor$ を床関数、B_m をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$B_m(x - \lfloor x \rfloor) = -2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left(2\pi s x - \frac{m\pi}{2}\right) \qquad x \geqq 0$$

証明

公式5·1·2「 05 一般ベルヌイ多項式と一般ベルヌイ数 」によれば、次式が成立する。

$$B_m(x) = -2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left(2\pi s x - \frac{m\pi}{2}\right) \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

$0 \leqq x < 1$ においては $B_m(x - \lfloor x \rfloor) = B_m(x)$ であるから

$$B_m(x - \lfloor x \rfloor) = -2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left(2\pi s x - \frac{m\pi}{2}\right) \qquad 0 \leqq x < 1$$

$1 \leqq x < 2$ においては

左辺：　$B_m(x+1-\lfloor x+1 \rfloor) = B_m(x+1-\lfloor x \rfloor - \lfloor 1 \rfloor) = B_m(x-\lfloor x \rfloor)$

右辺：　$-2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left\{2\pi s(x+1) - \frac{m\pi}{2}\right\} = -2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left(2\pi s x - \frac{m\pi}{2}\right)$

$$\therefore \quad B_m(x-\lfloor x \rfloor) = -2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left(2\pi s x - \frac{m\pi}{2}\right) \qquad 1 \leqq x < 2$$

以下帰納法により、任意の自然数 n について

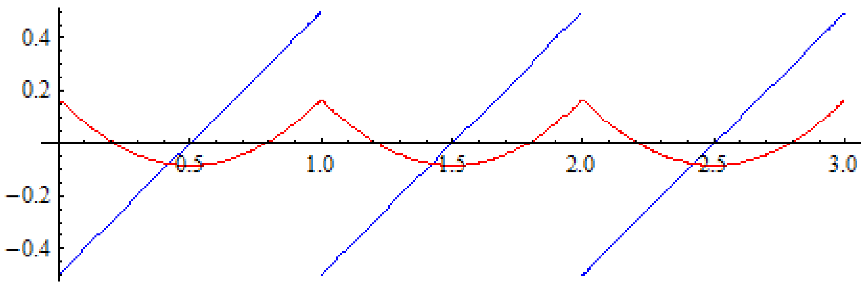
$$B_m(x-\lfloor x \rfloor) = -2m! \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} \cos\left(2\pi s x - \frac{m\pi}{2}\right) \qquad n \leqq x < n+1$$

Q.E.D.

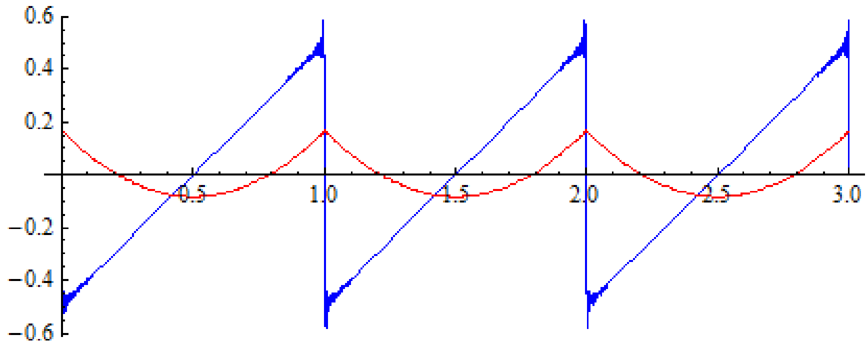
例

$m=1, 2$ について左辺と右辺を図示すれば次のとおり。青が $m=1$ で赤が $m=2$ である。

左辺



右辺



4･2 オイラー・マクローリンの和公式

公式4･2･1

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の C^m 級の関数、$\lfloor x \rfloor$ を床関数、B_r をベルヌイ数、$B_n(x)$ をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)\right\} + R_m \tag{1.1}$$

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_a^b B_m(x-\lfloor x \rfloor) f^{(m)}(x)dx \tag{1.1r}$$

$$= (-1)^m 2\int_a^b \left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^m} cos\left(2\pi sx - \frac{m\pi}{2}\right)\right\} f^{(m)}(x)dx \tag{1.1r'}$$

$\lim_{m\to\infty} |R_m| = \infty$ のとき、m は偶数 $s.t.\ \dfrac{|f^{(m)}(x)|}{(2\pi)^m} = minimum \quad for\ x \in [a,b]$

証明

B_n をベルヌイ数、$B_n(x)$ をベルヌイ多項式とするとき、

$$B_0(x)=1 \quad , \quad \int_0^x B_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\left\{B_{n+1}(x) - B_{n+1}\right\}$$

$$B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0) = B_{n+1}$$

であるから、

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 B_0(x)f(x)dx$$

$$= \frac{1}{1!}\left[B_1(x)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_1(x)}{1!} f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{1!}\left[B_1(x)f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2!}\left[B_2(x)f'(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_2(x)}{2!} f''(x)dx$$

$$= \frac{1}{1!}\left[B_1(x)f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2!}\left[B_2(x)f'(x)\right]_0^1$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[B_3(x)f''(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_3(x)}{3!} f'''(x)dx$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}\left[B_r(x)f^{(r-1)}(x)\right]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

ここで

$$\left[B_1(x)f(x)\right]_0^1 = \left(1-\frac{1}{2}\right)f(1) - \left(0-\frac{1}{2}\right)f(0) = \frac{1}{2}\left\{f(1)+f(0)\right\}$$

そして

$$(-1)^{r-1}B_r(1) = (-1)^{r-1}B_r(0) = -B_r \qquad for\ \ r \geqq 2$$

であるから

$$(-1)^{r-1}\Big[B_r(x)f^{(r-1)}(x)\Big]_0^1 = -B_r\left\{f^{(r-1)}(1)-f^{(r-1)}(0)\right\}$$

これらを上式に代入すれば

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\{f(1)+f(0)\} - \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(1)-f^{(r-1)}(0)\right\} + \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^1 B_m(x)f^{(m)}(x)dx$$

$f(x)$ を $f(x+k)$ に置き換えれば

$$\int_0^1 f(x+k)dx = \frac{1}{2}\{f(k+1)+f(k)\} - \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(k+1)-f^{(r-1)}(k)\right\} + \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^1 B_m(x)f^{(m)}(x+k)dx$$

すなわち

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}\{f(k+1)+f(k)\} - \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(k+1)-f^{(r-1)}(k)\right\} + \frac{(-1)^m}{m!}\int_k^{k+1} B_m(x-k)f^{(m)}(x)dx$$

これを $k=a \sim (b-1)$ まで足すと

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{k=a}^{b-1}\{f(k+1)+f(k)\} - \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\sum_{k=a}^{b-1}\left\{f^{(r-1)}(k+1)-f^{(r-1)}(k)\right\} + \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1} B_m(x-k)f^{(m)}(x)dx$$

ここで

$$\sum_{k=a}^{b-1}\left\{f^{(r-1)}(k+1)-f^{(r-1)}(k)\right\} = f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)$$

$$\sum_{k=a}^{b-1}\{f(k+1)+f(k)\} + f(a)+f(b) = 2\sum_{k=a}^{b} f(k)$$

$$B_m(x-k) = B_m(x-\lfloor x\rfloor) \qquad (k \leqq x \leqq k+1)$$

であるから

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=a}^{b} f(k) - \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\} - \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\right\} + \frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b B_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(m)}(x)dx$$

辺々入れ替えて

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\} + \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\right\} - \frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b B_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(m)}(x)dx$$

両辺から$f(b)$を引けば

$$\sum_{k=a}^{b-1}f(k) = \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\} + \sum_{r=2}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\right\}$$

$$-\frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b B_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(m)}(x)\,dx$$

$B_1=-1/2$ であるから、右辺第2項を $\sum$ に押し込んで

$$\sum_{k=a}^{b-1}f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{r=1}^{m}\frac{B_r}{r!}\left\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\right\} + R_m \tag{1.1}$$

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_a^b B_m(x-\lfloor x\rfloor)f^{(m)}(x)\,dx \tag{1.1r}$$

最後に、公式4･1･5

$$B_m(x-\lfloor x\rfloor) = -2m!\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^m}cos\left(2\pi sx-\frac{m\pi}{2}\right) \qquad x \geqq 0$$

を (1.1r) に代入して

$$R_m = (-1)^m 2\int_a^b \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^m}cos\left(2\pi sx-\frac{m\pi}{2}\right)f^{(m)}(x)\,dx \tag{1.1r'}$$

R_m が発散のとき、その振幅は概ね $\dfrac{f^{(m)}(x)}{(2\pi)^m}$ で決定される。よってそのときは $x\in[a,b]$ について $\dfrac{\left|f^{(m)}(x)\right|}{(2\pi)^m}$ が最小になるような偶数m が選ばれるべきである。

Q.E.D.

公式4･2･1 において1より大きい奇数項を除けば次の公式を得る。

公式4･2･2

$f(x)$を閉区間 $[a,b]$ 上の C^{2m} 級の関数、$\lfloor x\rfloor$ を床関数、B_r をベルヌイ数、$B_n(x)$をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=a}^{b-1}f(k) = \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left\{f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)\right\} + R_{2m} \tag{2.1}$$

$$R_{2m} = -\frac{1}{(2m)!}\int_a^b B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\,dx \tag{2.1r}$$

$$= (-1)^m 2\int_a^b \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{cos(2\pi sx)}{(2\pi s)^{2m}}\right\}f^{(2m)}(x)\,dx \tag{2.1r'}$$

$\lim\limits_{m\to\infty}\left|R_{2m}\right|=\infty$ のとき、m は自然数 $s.t.\ \dfrac{\left|f^{(2m)}(x)\right|}{(2\pi)^{2m}} = minimum \quad for\ x\in[a,b]$

証明

公式4･2･1 より B_3 , B_5 , B_7 , ⋯ の項を取り除き、m を $2m$ に置き換えて (2.1) , (2.1r) を得る。そして 公式4･1･5 より

$$B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor) = -2(2m)!\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi s)^{2m}}cos(2\pi sx-m\pi)$$

$$= -(-1)^m 2(2m)!\sum_{s=1}^{\infty}\frac{cos(2\pi sx)}{(2\pi s)^{2m}}$$

これを (2.1r) に代入して (2.1r') を得る。

R_{2m} が発散のとき、その振幅は概ね $\dfrac{f^{(2m)}(x)}{(2\pi)^{2m}}$ で決定される。よってそのときは $x\in[a,b]$ について $\dfrac{\left|f^{(2m)}(x)\right|}{(2\pi)^{2m}}$ が最小になるような m が選ばれるべきである。

Q.E.D.

公式4･2･2'

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の C^{2m} 級の関数、$\lfloor x\rfloor$ を床関数、B_r をベルヌイ数、$B_n(x)$ をベルヌイ多項式とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=a}^{b}f(k) = \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left\{f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)\right\}+R_{2m} \qquad (2.1')$$

$$R_{2m} = -\frac{1}{(2m)!}\int_a^b B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(x)\,dx \qquad (2.1r)$$

$$= (-1)^m 2\int_a^b\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{cos(2\pi sx)}{(2\pi s)^{2m}}\right\}f^{(2m)}(x)\,dx \qquad (2.1r')$$

$\lim_{m\to\infty}|R_{2m}|=\infty$ のとき、m は自然数 $s.t.\ \dfrac{\left|f^{(2m)}(x)\right|}{(2\pi)^{2m}} = minimum \quad for\ x\in[a,b]$

証明

公式4･2･2 の (2.1) の両辺に $f(b)$ を加えて直ちに与式を得る。

Q.E.D.

4·3 初等数列の和

4·3·1 等差数列の和

公式4·3·1

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd) = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \tag{1.1}$$

証明

$$\{S_{n-1}\} = a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots, a+(n-1)d$$

これより

$$f(x) = a+xd$$

$$f^{(1)}(x)=d\ ,\ f^{(2)}(x)=f^{(3)}(x)=\cdots=0$$

これらを 公式4·2·2 に代入すれば、

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd) = \int_0^n (a+xd)dx - \frac{1}{2}\{(a+nd)-(a+0d)\}$$

$$+\frac{B_2}{2!}\{d-d\} + \sum_{r=2}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\{0-0\} + R_{2m}$$

$$= \left[\frac{xa}{1!}+\frac{x^2d}{2!}\right]_0^n - \frac{nd}{2} + R_{2m}$$

$$= \frac{na}{1!} + \frac{n^2d}{2!} - \frac{nd}{2} + R_{2m}$$

$$R_{2m} = -\frac{1}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\cdot 0\,dx = 0$$

かくして与式を得る。

4·3·2 等比数列の和

公式4·3·2

$$\sum_{k=0}^{n-1}r^k = \left(r^n-1\right)\sum_{s=0}^{m}\frac{B_s}{s!}(\log r)^{s-1} + R_m \tag{2.1}$$

$$R_m = (-1)^{m+1}\frac{(\log r)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)\, r^x dx \tag{2.1r}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}r^k = \left(r^n-1\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s}{s!}(\log r)^{s-1} = \frac{r^n-1}{r-1} \tag{2.1'}$$

証明

$$\{S_{n-1}\} = r^0, r^1, r^2, r^3, \cdots, r^{n-1}$$

これより

$$f(x) = r^x$$

$$\int_0^n f(x) = \left[\frac{r^x}{\log r}\right]_0^n = \frac{r^n - r^0}{\log r}$$

$$f^{(s-1)}(x) = r^x (\log r)^{s-1} \qquad (s=1, \cdots, m+1)$$

これらを 公式4･2･1 に代入すれば、

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - r^0}{\log r} + \sum_{s=1}^{m} \frac{B_s}{s\,!}\left\{r^n (\log r)^{s-1} - r^0 (\log r)^{s-1}\right\} + R_m$$

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m\,!}\int_0^n B_m(x-[x])\, r^x (\log r)^m dx$$

右辺第1項を $\sum$ 中に押し込んで

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = (r^n - 1)\sum_{s=0}^{m} \frac{B_s}{s\,!}(\log r)^{s-1} + R_m \tag{2.1}$$

$$R_m = (-1)^{m+1}\frac{(\log r)^m}{m\,!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x \rfloor)\, r^x dx \tag{2.1r}$$

これがオイラーマクローリンの公式による等比数列の和である。

ここで、ベルヌイ数の定義式 $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s\,!} x^s = \frac{x}{e^x - 1}$ において $x = \log r$ と置けば

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s\,!}(\log r)^s = \frac{\log r}{e^{\log r} - 1} = \frac{\log r}{r-1}$$

これより

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s\,!}(\log r)^{s-1} = \frac{1}{r-1}$$

また、

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(\log r)^m}{m\,!} = 0$$

であるから $R_\infty = 0$。 よって

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = (r^n - 1)\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s\,!}(\log r)^{s-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$$

4･3･3 自然数の整ベキ和

公式4･3･3 (ヤコブ･ベルヌーイ)

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m} \binom{m+1}{r} B_r n^{m+1-r} \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\{B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)\right\} \tag{3.1'}$$

証明

$$\left\{S_{n-1}\right\} = 0^m,\ 1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ \cdots,\ (n-1)^m$$

これより

$$f(x)=x^m$$

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^n x^m dx = \frac{1}{m+1}\left(n^{m+1}-0^{m+1}\right)$$

$$f^{(r-1)}(x) = \frac{m!}{(m-r+1)!}x^{m-r+1} \qquad (r=1,\cdots,m+1)$$

これらを公式4･2･1 に代入すれば

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1}\left(n^{m+1}-0^{m+1}\right)+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_r}{r!}\frac{m!}{(m-r+1)!}\left(n^{m-r+1}-0^{m-r+1}\right)+R_m$$

$$= \sum_{r=0}^{m}\frac{B_r}{r!}\frac{m!}{(m-r+1)!}\left(n^{m-r+1}-0^{m-r+1}\right)+R_m$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\frac{(m+1)!}{r!(m+1-r)!}B_r\left(n^{m+1-r}-0^{m+1-r}\right)+R_m$$

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n B_m(x-[x])\frac{m!}{0!}x^0dx$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r\left(n^{m+1-r}-0^{m+1-r}\right)+R_m$$

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^n B_m(x-[x])$$

ここで

$$\int_0^n B_m(x-[x])dx = \sum_{r=0}^{n-1}\int_0^1 B_m(x)dx = 0$$

であるから　$R_m=0$となる。　故に

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r\left(n^{m+1-r}-0^{m+1-r}\right) \tag{3.w}$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r n^{m+1-r} \tag{3.1}$$

さらに

$$\binom{m+1}{m+1}B_{m+1}\left(n^0-0^0\right)=0$$

であるから、(3.w) は次のように書くことができる。

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m+1}\binom{m+1}{r}B_r\left(n^{m+1-r}-0^{m+1-r}\right)$$

そしてこれをベルヌイ多項式で表せば

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1}\left\{B_{m+1}(n)-B_{m+1}(0)\right\} \tag{3.1'}$$

これが有名なヤコブ･ベルヌーイの冪和公式である。

例　$m=3$, $n=101$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{101-1} k^3 = 0^3+1^3+2^3+ \cdots + 100^3 \qquad = 25502500$$

$$\frac{1}{3+1}\{B_{3+1}(101)-B_{3+1}(0)\} = \frac{1}{4}\left(\frac{3060299999}{30}+\frac{1}{30}\right) = 25502500$$

4･3･4　自然数の交代整ベキ和

公式4･3･4

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r\cdot\left(n^{m+1-r} - 2^{m+1}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{m+1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\{B_{m+1}(n)-B_{m+1}-2^{m+1}\left\{B_{m+1}\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)-B_{m+1}\right\}\right\}$$

証明

n が偶数のとき

$$1^m-2^m+3^m-4^m+- \cdots +(n-1)^m-n^m$$

$$= 1^m+3^m+5^m+\cdots+(n-1)^m - \left(2^m+4^m+6^m+\cdots+n^m\right)$$

$$= 1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m - 2\left(2^m+4^m+6^m+\cdots+n^m\right)$$

$$= 1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m - 2^{m+1}\left\{1^m+2^m+3^m+\cdots+\left(\frac{n}{2}\right)^m\right\}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^m = \sum_{r=1}^{n}r^m - 2^{m+1}\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}}r^m$$

この両辺に $(n+1)^m$ を加えれば

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k^m = \sum_{r=1}^{n+1}r^m - 2^{m+1}\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}}r^m$$

$n+1 \to n$, $\dfrac{n+1}{2} \to \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ とすれば、

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^m = \sum_{r=1}^{n}r^m - 2^{m+1}\sum_{r=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}r^m$$

$m \ne 0$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}k^m = \sum_{r=0}^{n}r^m - 2^{m+1}\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}r^m$$

n を $n-1$ に置換すれば

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^m = \sum_{r=0}^{n-1}r^m - 2^{m+1}\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}r^m = \sum_{r=0}^{n-1}r^m - 2^{m+1}\sum_{r=0}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}r^m$$

これに 公式4･3･3 を適用すれば

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r n^{m+1-r} = \frac{1}{m+1}\{B_{m+1}(n)-B_{m+1}(0)\}$$

$$\sum_{r=0}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil -1} r^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r \left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil^{m+1-r} = \frac{1}{m+1}\left\{B_{m+1}\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)-B_{m+1}(0)\right\}$$

であるから

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}\binom{m+1}{r}B_r\cdot\left(n^{m+1-r} - 2^{m+1}\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil^{m+1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\{B_{m+1}(n)-B_{m+1}-2^{m+1}\left\{B_{m+1}\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)-B_{m+1}\right\}\right\}$$

例　$m=3$, $n=101$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{101-1}(-1)^{k-1}k^3 = 1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+99^3-100^3 = -507500$$

$$\frac{1}{3+1}\left\{B_{3+1}(101)-B_{3+1}-2^{3+1}\left\{B_{3+1}\left(\left\lceil \frac{101}{2}\right\rceil\right)-B_{3+1}\right\}\right\} = -507500$$

特に $m=2$ の場合は、次の面白い公式が成立する。

公式4・3・4'

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}k = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

証明

n が偶数のとき

$$1^2-2^2+3^2-4^2+-\cdots+(n-1)^2-n^2$$
$$= -\{(1+1)^2-1^2\}-\{(3+1)^2-3^2\}-\cdots-[\{(n-1)+1\}^2-(n-1)^2]$$
$$= -(2\cdot1+1)-(2\cdot3+1)-(2\cdot5+1)-\cdots-\{2(n-1)+1\}$$
$$= -2\{1+3+5+\cdots+(n-1)\}-(1+1+1\cdots+1)$$
$$= -\{1+3+5+\cdots+(n-1)\}-(2+4+6+\cdots+n)$$
$$= -(1+2+3+\cdots+n)$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = -\sum_{k=1}^{n}k = -\frac{n(n+1)}{2}$$

n が奇数のとき

$$-0^2+1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-+\cdots+n^2$$
$$= -\{(1-1)^2-1^2\}-\{(3-1)^2-3^2\}-\cdots-\{(n-1)^2-n^2\}$$
$$= -(-2\cdot1+1)-(-2\cdot3+1)-(-2\cdot5+1)-\cdots-(-2n+1)$$
$$= 2\{1+3+5+\cdots+n\}-(1+1+1\cdots+1)$$
$$= 1+3+5+\cdots+n+0+2+4+\cdots+(n-1)$$

$$= 1+2+3+\cdots+n$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$$

両者を併せて与式を得る。

例　n=999

$$\sum_{k=1}^{999}(-1)^{k-1}k^2 = 1^2-2^2+3^2-4^2+- \cdots +999^2 = 499500$$

$$(-1)^{999-1}(1+2+3+\cdots+999) = \frac{999\cdot 1000}{2} = 499500$$

4･3･5　三角数列の和

公式4･3･5s

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin k = -\frac{\sin n}{2} - (\cos n-1)\left\{1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\} + R_{2m} \tag{5.s}$$

$$R_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\sin x\,dx \tag{5.sr}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin k = -\frac{\sin n}{2} - (\cos n - 1)\left(\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\right) \tag{5.s'}$$

$$= \sin\frac{n-1}{2}\sin\frac{n}{2} \Big/ \sin\frac{1}{2} \tag{5.s''}$$

証明

$$\{S_{n-1}\} = \sin 0, \sin 1, \sin 2, \cdots, \sin(n-1)$$

これより

$$f(x) = \sin x$$

$$\int_0^n f(x)dx = [-\cos x]_0^n = -\cos n + \cos 0 = -\cos n + 1$$

$$f^{(2r-1)}(x) = (-1)^{r-1}\cos x \quad (r=1,\cdots,m)$$

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m \sin x$$

これらを 公式4･2･2 に代入すれば、

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin k = -\cos n + \cos 0 - \frac{1}{2}(\sin n - \sin 0)$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}(-1)^{r-1}\{\cos n - \cos 0\} + R_{2m}$$

$$R_{2m} = -\frac{1}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)(-1)^m \sin x dx$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k = -\frac{\sin n}{2} - (\cos n - 1)\left\{1 + \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\} + R_{2m} \tag{5.s}$$

$$R_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \int_0^n B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor)\ \sin x\ dx \tag{5.sr}$$

これがオイラーマクローリンの公式による $\sin$ 数列の和である。

ここで $m \to \infty$ とすれば

$$\lim_{m \to \infty} \left\{1 + \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\} = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}\ , \qquad \lim_{m \to \infty} \frac{B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor) \sin x}{(2m)!} = 0$$

であるから (5.s) は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k = -\frac{\sin n}{2} - (\cos n - 1)\left(\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}\right) \tag{5.s'}$$

そして三角関数の諸公式を用いてさらに

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k = -\frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} \cdot (\cos n - 1) - \frac{1}{2} \sin n$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\cos \frac{1}{2} \cdot (\cos n - 1) - \sin \frac{1}{2} \cdot \sin n\right\} / \sin \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{-2 \sin \frac{n-1}{2} \sin \frac{n}{2}\right\} / \sin \frac{1}{2}$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k = \sin \frac{n-1}{2} \sin \frac{n}{2} / \sin \frac{1}{2} \tag{5.s''}$$

と変形できる。これは $\sum_{k=0}^{n-1} \sin k$ に三角関数の加法公式を直接適用した結果と一致する。

公式4・3・5c

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos k = \sin n \cdot \left\{1 + \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\} - \frac{1}{2}(\cos n - 1) \tag{5.c}$$

$$R_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \int_0^n B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor)\ \cos x\ dx \tag{5.cr}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos k = \sin n \cdot \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos n - 1) \tag{5.c'}$$

$$= \cos \frac{n-1}{2} \sin \frac{n}{2} / \sin \frac{1}{2} \tag{5.c''}$$

証明

$$\{S_{n-1}\} = \cos 0, \cos 1, \cos 2, \cdots, \cos(n-1)$$

これより

$$f(x) = \cos x$$

$$\int_0^n f(x)\,dx = [\sin x]_0^n = \sin n - \sin 0 = \sin n$$

$$f^{(2r-1)}(x) = (-1)^r \sin x \qquad (r=1,\cdots,m)$$
$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m \cos x$$
これらを 公式4･2･2 に代入すれば
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k = \sin n - \frac{1}{2}(\cos n - \cos 0)$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left\{(-1)^r \sin n - (-1)^r \sin 0\right\} + R_{2m}$$
$$= \sin n - \frac{1}{2}(\cos n - \cos 0) + \sin n \sum_{r=1}^{m}(-1)^r \frac{B_{2r}}{(2r)!} + R_{2m}$$
$$R_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\cos x\,dx$$
i.e.
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k = \sin n\left\{1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_{2r}}{(2r)!}\right\} - \frac{1}{2}(\cos n - 1) + R_{2m} \tag{5.c}$$
$$R_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\cos x\,dx \tag{5.cr}$$
これがオイラーマクローリンの公式による cos 数列の和である。

ここで $m\to\infty$ とすれば
$$\lim_{m\to\infty}\left\{1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}\right\} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\ , \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)\cos x}{(2m)!} = 0$$
であるから (5.c) は
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k = \sin n\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos n - 1) \tag{5.c'}$$
となり、さらに
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos k = \cos\frac{n-1}{2}\sin\frac{n}{2} \Big/ \sin\frac{1}{2} \tag{5.c''}$$
と変形できる。これは $\sum_{k=0}^{n-1}\cos k$ に三角関数の加法公式を直接適用した結果と一致する。

4·4 調和数列の和とオイラー・マスケロニの定数

4·4·1 調和数列の和

公式4·4·1

γ をオイラー・マスケロニの定数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \gamma + \log n - \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r\cdot n^{2r}} + R_{2m} \tag{1.1}$$

$$R_{2m} = \int_n^\infty \frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx \tag{1.1r}$$

但し、$2 \leqq m < \infty$

証明

$$\{S_{n-1}\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n-1}$$

これより

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_n^h f(x)dx = [\log x]_n^h = \log h - \log n \qquad (1<n<h,\ h,n \text{ are integers})$$

$$f^{(2r-1)}(x) = (-1)^{2r-1}\frac{(2r-1)!}{x^{2r}}, \qquad f^{(2m)}(x) = \frac{(2m)!}{x^{2m+1}}$$

これらを 公式4·2·2 に代入すれば、

$$\sum_{k=n}^{h-1}\frac{1}{k} = \log h - \log n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{n}\right) - \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r}\left(\frac{1}{h^{2r}}-\frac{1}{n^{2r}}\right) + R_{2m}$$

$$R_{2m} = -\int_n^h \frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx$$

これより

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{h-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{h-1}\frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{h-1}\frac{1}{k} - \log h + \log n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{n}\right) + \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r}\left(\frac{1}{h^{2r}}-\frac{1}{n^{2r}}\right) - R_{2m}$$

ここで $h\to\infty$ とすれば $r \geqq 1$ 故

$$\lim_{h\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{h-1}\frac{1}{k} - \log h\right) = \gamma, \quad \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h} = 0, \quad \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h^{2r}} = 0$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \gamma + \log n - \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r\cdot n^{2r}} - R_{2m}$$

$$R_{2m} = -\int_n^\infty \frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx$$

剰余項の符号を反転して与式を得る。

例 $\sum_{k=1}^{100} 1/k$

$m=2$ まで計算すれば

$$\gamma+\log 101-\frac{1}{2\cdot 101}-\left(\frac{B_2}{2\cdot 101^2}+\frac{B_4}{4\cdot 101^4}\right)=5.18737751763962\cdots$$

この全桁(小数点以下14桁)が有効数字である。さらに Σ を $m=8$ まで計算すると、有効桁は小数点以下34桁に達する。

c. f.

$f(x)=1/x$ に対して公式4･2･2 をまともに適用すれば次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\log n-\log 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{1}\right)-\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r}\left(\frac{1}{n^{2r}}-\frac{1}{1^{2r}}\right)+R_{2m}$$

$$R_{2m}=-\int_1^n\frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx$$

しかしこの式は近似度が著しく悪い。上の例を $m=3$ まで計算すると有効桁は小数点以下2桁まで得られるが、それが上の例のこの公式による最良近似となる。

4･4･2 オイラー･マスケロニの定数の逆算

(1.1) を辺々移行して書き換えれば次のようになる。

$$\gamma=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n+\frac{1}{2n}+\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{2r\cdot n^{2r}}+R_{2m} \tag{2.1}$$

$$R_{2m}=-\int_n^\infty\frac{B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{2m+1}}dx \tag{2.1r}$$

但し、$m=n$:(有効桁数+?)/2

つまり、(1.1) から逆にオイラーの定数 γ を計算することができる。
$m=n$ としたとき、有効桁数は概ね $2n-?$ で与えられる。

例 $m=n=10$

$$\sum_{k=1}^{10-1}\frac{1}{k}-\log 10+\frac{1}{2\cdot 10}+\sum_{r=1}^{10}\frac{B_{2r}}{2r\cdot 10^{2r}}=0.577215664901532860\cdots$$

となり、この全桁(小数点以下18桁)が有効数字である。(2.1) は γ のかなり良い近似式である。しかし残念なことに、有限の n について $\lim_{m\to\infty}R_{2m}=0$ とはならない。即ち、(2.1) は漸近展開でしかない。

4･5 ゼータ数列の和とリーマン･ゼータ関数

4･5･1 ゼータ数列の和

公式4･5･1

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p\neq 1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}=\zeta(p)+\frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r n^{1-p-r}+R_m \tag{1.1}$$

$$R_m=\frac{1}{mB(m,p)}\int_n^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx \tag{1.1r}$$

但し m は偶数 $s.t.\ \lceil p\rceil\leqq m<\infty$

証明

$$\{S_{n-1}\}=1^{-p},\ 2^{-p},\ 3^{-p},\ \cdots,\ (n-1)^{-p}\qquad (p>1)$$

これより

$$f(x)=x^{-p}$$

$$\int_n^h f(x)dx=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_n^h=\frac{h^{1-p}-n^{1-p}}{1-p}\qquad (1<n<h,\ h,n\ are\ integers)$$

$$f^{(r-1)}(x)=-(-1)^r\frac{\Gamma(p+r-1)}{\Gamma(p)}x^{1-p-r}\qquad (r=1,\cdots,m+1)$$

これらを 公式4･2･1 に代入すれば、

$$\sum_{k=n}^{h-1}\frac{1}{k^p}=\frac{h^{1-p}-n^{1-p}}{1-p}-\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_r}{r!}\frac{\Gamma(p+r-1)}{\Gamma(p)}\left(h^{1-p-r}-n^{1-p-r}\right)+R_m$$

ここで

$$\begin{aligned}(-1)^r\frac{B_r}{r!}\frac{\Gamma(p+r-1)}{\Gamma(p)}&=(-1)^r\frac{B_r}{\Gamma(1+r)}\frac{(-1)^r\Gamma\{1+r+(p-2)\}}{(p-1)\Gamma\{1+(p-2)\}}\\&=-\frac{B_r}{1-p}\frac{(-1)^r\Gamma\{1+r+(p-2)\}}{\Gamma(1+r)\Gamma\{1+(p-2)\}}\\&=-\frac{B_r}{1-p}(-1)^r\binom{p-2+r}{p-2}\\&=-\frac{1}{1-p}\sum_{r=1}^{m}\binom{-p+1}{r}B_r\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{k=n}^{h-1}\frac{1}{k^p}=\frac{h^{1-p}-n^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{1-p}\sum_{r=1}^{m}\binom{1-p}{r}B_r\left(h^{1-p-r}-n^{1-p-r}\right)+R_m$$

$$R_m=-\frac{1}{m!}\int_n^h B_m(x-\lfloor x\rfloor)\frac{\Gamma(p+m)}{\Gamma(p)}x^{-p-m}dx$$

i.e.

$$\sum_{k=n}^{h-1}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r\left(h^{1-p-r}-n^{1-p-r}\right)+R_m$$

$$R_m=-\frac{1}{m\,B(m,p)}\int_n^h\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx$$

これより

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}=\sum_{k=1}^{h-1}\frac{1}{k^p}-\sum_{k=n}^{h-1}\frac{1}{k^p}$$

$$=\sum_{k=1}^{h-1}\frac{1}{k^p}-\frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r\left(h^{1-p-r}-n^{1-p-r}\right)-R_m$$

$$R_m=-\frac{1}{m\,B(m,p)}\int_n^h\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx$$

ここで $h\to\infty$ とすれば $p>1$ 故 $\lim_{h\to\infty}h^{1-p-r}=0$。 よって

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}=\zeta(p)+\frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r n^{1-p-r}-R_m \tag{1.1}$$

$$R_m=-\frac{1}{m\,B(m,p)}\int_n^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx \tag{1.1r}$$

剰余項の符号を反転して与式を得る。

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}1/k^{1.1}$

$m=1.1\uparrow=2$ まで計算すれば

$$\sum_{k=1}^{101-1}\frac{1}{k^{1.1}}\fallingdotseq\zeta(1.1)+\frac{1}{1-1.1}\sum_{r=0}^{2}\binom{1-1.1}{r}B_r n^{1-1.1-r}=4.278024023\cdots$$

となり、この全桁(小数点以下9桁)が有効数字となる。実用上はこれで十分と思われる。

さらに $m=6$ まで計算すれば14桁(小数点以下13桁)が有効数字となる。

c.f.

$f(x)=x^{-p}$ に対して公式4･2･1 をまともに適用すれば次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r\left(n^{1-p-r}-1\right)+R_m$$

$$R_m=-\frac{1}{m\,B(m,p)}\int_1^n\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx$$

しかしこの式は近似度が著しく悪い。上の例を $m=4$ まで計算すると小数点以下2桁まで近似出来るが、これが最良近似となる。

4･5･2 リーマン･ゼータ関数の逆算

(1.1) を辺々移行して書き換えれば次のようになる。

$$\zeta(p) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p} - \frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r n^{1-p-r} + R_m \tag{2.1}$$

$$R_m = -\frac{1}{m\,B(m,p)}\int_n^\infty \frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx \tag{2.1r}$$

但し、$m=n$ ： 有効桁数＋?

つまり、(1.1) によりリーマン・ゼータ関数 $\zeta(p)$ を逆算することができる。
$m=n$ としたとき、有効桁数は概ね n -? で与えられる。

例　$\zeta(1.3)$

$m=n=10$ として計算すると、

$$\sum_{k=1}^{10-1}\frac{1}{k^{1.3}} - \frac{1}{1-1.3}\sum_{r=0}^{10}\binom{1-1.3}{r}B_r 10^{1-1.3-r} = 3.9319492118095\cdots$$

となり、この全桁（小数点以下13桁）が有効数字である。(2.1) は $\zeta(p)$ のかなり良い近似式である。しかし残念なことに、有限の n について $\lim_{m\to\infty}R_m = 0$ とはならない。即ち、(2.1) は漸近展開でしかない。

4･6　自然数の実ベキ和

公式4･6･1

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p \ne -1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \zeta(-p) + \frac{1}{1+p} \sum_{r=0}^{m} \binom{1+p}{r} B_r n^{1+p-r} + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{m B(m,-p)} \int_n^{\infty} \frac{B_m(x-\lfloor x \rfloor)}{x^{-p+m}} dx$$

但し m は偶数 $s.t.$ $\lceil p \rceil \leqq m < \infty$ 。

証明

公式4･5･1 において p の符号を反転して与式を得る。

例1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^{0.1}$

$m=2$ まで計算すれば

$$\sum_{k=1}^{101-1} k^{0.1} \fallingdotseq \zeta(-0.1) + \frac{1}{1+0.1} \sum_{r=0}^{2} \binom{1+0.1}{r} B_r 101^{1+0.1-r} = 144.456549944\cdots$$

となり、この全桁(小数点以下9桁)が有効数字となる。実用上はこれで十分と思われる。
さらに $m=6$ まで計算すれば15桁(小数点以下12桁)が有効数字となる。

例2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^{3}$

$m=2$ まで計算すれば

$$\sum_{k=1}^{101-1} k^{3} \fallingdotseq \zeta(-3) + \frac{1}{1+3} \sum_{r=0}^{2} \binom{1+3}{r} B_r n^{1+3-r} = 25502500$$

この結果は 公式4･3･3 の **例** と一致する。

例3 $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{100} k^{-1.1}}$

$m=2$ まで計算すれば、

$$\sum_{k=1}^{101-1} k^{-1.1} \fallingdotseq \zeta(1.1) + \frac{1}{1-1.1} \sum_{r=0}^{2} \binom{1-1.1}{r} B_r 101^{1-1.1-r} = 4.278024023\cdots$$

この結果は 公式4･5･1の **例** に帰着する。

c.f.

$f(x) = x^p$ に公式4･2･1 をまともに適用すれば次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{1+p} \sum_{r=0}^{m} \binom{1+p}{r} B_r \left(n^{1+p-r} - 1\right) + R_m$$

$$R_m = -\frac{1}{m B(m,-p)} \int_1^{n} B_m(x-\lfloor x \rfloor) x^{p-m} dx$$

しかしこの式は近似度が著しく悪い。上の **例1** を $m=6$ まで計算すると小数点以下4桁まで近似出来るが、これが最良近似となる。

4･7 交代実ベキ和

4･7･1 自然数の交代正ベキ和

公式4･7･1

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p\neq -1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p=\left(1-2^{1+p}\right)\zeta(-p)$$
$$+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\cdot\left(n^{1+p-r}-2^{1+p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}\right)+R_m$$
$$R_m=\frac{1}{m\,B(m,-p)}\left\{\int_n^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx-2^{1+p}\int_{\lceil n/2\rceil}^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx\right\}$$

但し m は偶数 $s.t.\ \lceil p\rceil\leqq m<\infty$ 。

証明

公式4･3･4 の証明中で次式が得られた。

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^m=\sum_{r=0}^{n-1}r^m-2^{m+1}\sum_{r=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}r^m$$

この式は自然数 m を実数 p に変更しても成立する。即ち

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p=\sum_{r=0}^{n-1}r^p-2^{p+1}\sum_{r=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}r^p$$

これに 公式4･6･1 を適用すると

$$\sum_{r=0}^{n-1}r^p=\zeta(-p)+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r n^{1+p-r}+R_{m1}$$
$$\sum_{r=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}r^p=\zeta(-p)+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}+R_{m2}$$
$$R_{m1}=\frac{1}{m\,B(m,-p)}\int_n^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx$$
$$R_{m2}=\frac{1}{m\,B(m,-p)}\int_{\lceil n/2\rceil}^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx$$

であるから

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p=\zeta(-p)+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r n^{1+p-r}$$
$$-2^{1+p}\left\{\zeta(-p)+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}+R_{m2}\right\}$$
$$=\left(1-2^{1+p}\right)\zeta(-p)+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\cdot\left(n^{1+p-r}-2^{1+p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}\right)$$
$$+R_{m1}-2^{1+p}R_{m2}$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p=\left(1-2^{1+p}\right)\zeta(-p)$$
$$+\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\cdot\left(n^{1+p-r}-2^{1+p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}\right)+R_m$$
$$R_m=\frac{1}{mB(m,-p)}\left\{\int_n^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx-2^{p+1}\int_{\lceil n/2\rceil}^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx\right\}$$

例　$p=0.6$, $n=1001$

```
fl[p_, n_] := Sum[(-1)^(k-1) k^p, {k, 0, n-1}]

fr[p_, n_, m_] := (1 - 2^(1+p)) Zeta[-p]
    + 1/(1 + p) Sum[Binomial[1 + p, r] BernoulliB[r] (n^(1+p-r) - 2^(1+p) Ceiling[n/2]^(1+p-r)), {r, 0, m}]

SetPrecision[{fl[0.6, 1001], fr[0.6, 1001, 4]}, 15]
{-31.2026520696209, -31.2026520696212}
```

この場合、$m=4$ が最良近似(小数点以下11桁)を与える。

c. f.

$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p$ に公式4･2･1 をまともに適用すれば次のようになる。

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p=\frac{1}{1+p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1+p}{r}B_r\cdot\left\{n^{1+p-r}-2^{1+p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1+p-r}-\left(1-2^{1+p}\right)\right\}+R_m$$
$$R_m=-\frac{1}{mB(m,-p)}\left\{\int_1^n\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx-2^{1+p}\int_1^{\lceil n/2\rceil}\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{-p+m}}dx\right\}$$

しかしこの式は近似度が著しく悪い。上の **例** を $m=6$ まで計算すると小数点以下3桁まで近似出来るが、これが最良近似となる。

4･7･2 イータ数列の和とディィリクレ･イータ関数

公式4･7･2

$\zeta(p)$ をゼータ関数、$\eta(p)$ をディリクレ･イータ関数、$B(p,q)$ をベータ関数とするとき、$p\neq-1$ について次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^p}=\left(1-2^{1-p}\right)\zeta(p)$$
$$+\frac{1}{1-p}\sum_{r=0}^{m}\binom{1-p}{r}B_r\cdot\left(n^{1-p-r}-2^{1-p}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^{1-p-r}\right)+R_m$$
$$R_m=\frac{1}{mB(m,p)}\left\{\int_n^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx-2^{1-p}\int_{\lceil n/2\rceil}^\infty\frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{x^{p+m}}dx\right\}$$

但し m は偶数 s.t. $\lceil p \rceil \leqq m < \infty$。

特に $n \to \infty$ のとき、

$$\eta(p) = \left(1-2^{1-p}\right)\zeta(p)$$

証明

公式4･7･1 において p の符号を反転して与式を得る。$n \to \infty$ のとき、∞ から ∞ までの積分であるから、如何なる m についても $R_m = 0$ となる。

例 $p=1.7$, $n=1001$, $n=\infty$

```
fl[p_, n_] := Sum[(-1)^(k-1)/k^p, {k, 1, n-1}]

fr[p_, n_, m_] := (1 - 2^(1-p)) Zeta[p]
    + 1/(1-p) Sum[Binomial[1-p, r] BernoulliB[r] (n^(1-p-r) - 2^(1-p) Ceiling[n/2]^(1-p-r)), {r, 0, m}]

SetPrecision[{fl[1.7, 1001]      , fr[1.7, 1001, 4]}, 15]
{0.789721725383435               , 0.789721725383434  }

SetPrecision[{fl[1.7, ∞]         , fr[1.7, ∞, 4]}, 30]
{0.789725693648715920680558610911 , 0.789725693648715920680558610911 }
```

参考

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\ ,\ f(x) = -x^p \cos\pi x\ ,\ E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{t^n}dt\ ,\ \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

とすれば次の公式も成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}k^p = \frac{n^{1+p}}{2}\left\{E_{-p}(-n\pi i)+E_{-p}(n\pi i)\right\} - \frac{1}{2}\left\{E_{-p}(-\pi i)+E_{-p}(\pi i)\right\}$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\frac{B_r}{r!}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r-1}{s}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-s)}\left\{(-1)^n n^{p-s}+1\right\}\pi^{r-1-s}\cos\frac{(r-1-s)\pi}{2} + R_m$$

$$R_m = \frac{(-1)^m}{m!}\int_1^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-s)}x^{p-s}\pi^{m-s}\cos\left\{\pi x+\frac{\pi(m-s)}{2}\right\}dx$$

しかしこれは余りに煩雑で大したメリットも持たない。

2013.08.26 Renewal

河野 和
広島市

宇宙人の数学