

## 5 一般ベルヌイ多項式と一般ベルヌイ数

### 5.1 一般ベルヌイ多項式 ( $0 \leq x \leq 1$ )

先ず、次の *Lemma* を用意する。

#### **Lemma 5.1.1**

$$\frac{e^{-ix}}{i^{-p}} + \frac{e^{ix}}{i^p} = 2 \cos\left(x - \frac{\pi p}{2}\right)$$

**証明**

$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$  であるから、

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(x - \frac{p\pi}{2}\right) &= e^{i\left(x - \frac{p\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(x - \frac{p\pi}{2}\right)} = e^{ix} \left(e^{-\frac{pi}{2}}\right)^{-p} + e^{-ix} \left(e^{\frac{pi}{2}}\right)^p \\ &= e^{ix} i^{-p} + e^{-ix} i^p = \frac{e^{ix}}{i^p} + \frac{e^{-ix}}{i^{-p}} \end{aligned}$$

次に、一般ベルヌイ多項式を与える次の公式を示す。

#### 公式5.1.2

$$B_p(x) = -2\Gamma(1+p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.p)$$

**証明**

フルビッツ (Adolf Hurwitz) によればベルヌイ多項式は次のようにフーリエ展開される。

$$B_m(x) = -m! \sum_{s \neq 0} \frac{e^{2\pi i s x}}{(2\pi i s)^m} \quad 0 \leq x \leq 1$$

ここで  $m$  は自然数であるが、これを実数  $p$  に拡張すると次のようになる。

$$B_p(x) = -\Gamma(1+p) \sum_{s \neq 0} \frac{e^{2\pi i s x}}{(2\pi i s)^p} = -\Gamma(1+p) \left( \sum_{s=-1}^{-\infty} \frac{e^{2\pi i s x}}{(2\pi i s)^p} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i s x}}{(2\pi i s)^p} \right)$$

右辺カッコ内の第1項は

$$\sum_{s=-1}^{-\infty} \frac{e^{2\pi i s x}}{(2\pi i s)^p} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i s x}}{(-2\pi i s)^p} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i s x}}{(2\pi s)^p (-i)^p}$$

であるから

$$\begin{aligned} B_p(x) &= -\Gamma(1+p) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i s x}}{(2\pi s)^p (-i)^p} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i s x}}{(2\pi s)^p i^p} \right\} \\ &= -\Gamma(1+p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \left( \frac{e^{-2\pi i s x}}{i^{-p}} + \frac{e^{2\pi i s x}}{i^p} \right) \end{aligned}$$

Lemma 5.1.1 により

$$\frac{e^{-ix}}{i^{-p}} + \frac{e^{ix}}{i^p} = 2\cos\left(x - \frac{\pi p}{2}\right)$$

であるから、 $x$  を  $2\pi s x$  に置換すれば

$$\frac{e^{-2\pi i s x}}{i^{-p}} + \frac{e^{2\pi i s x}}{i^p} = 2\cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right)$$

これを上式に代入して

$$B_p(x) = -2\Gamma(1+p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right) \quad (2.p)$$

を得る。

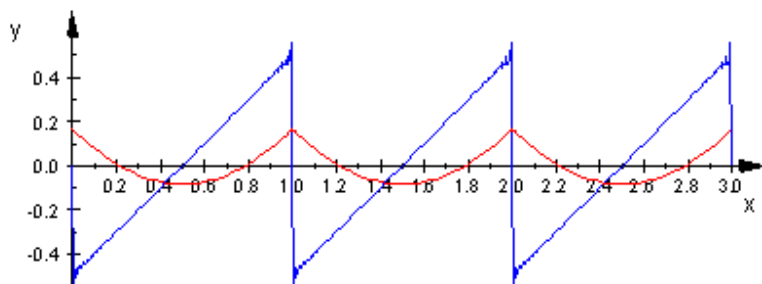
Q.E.D.

この式はといったい何かと言う事であるが、これを  $p=1, 2$  について図示すると次のようになる。

- `B := p-> -2*gamma(1+p)*sum(cos(2*PI*s*x-PI*p/2)/(2*PI*s)^p, s=1..100)`

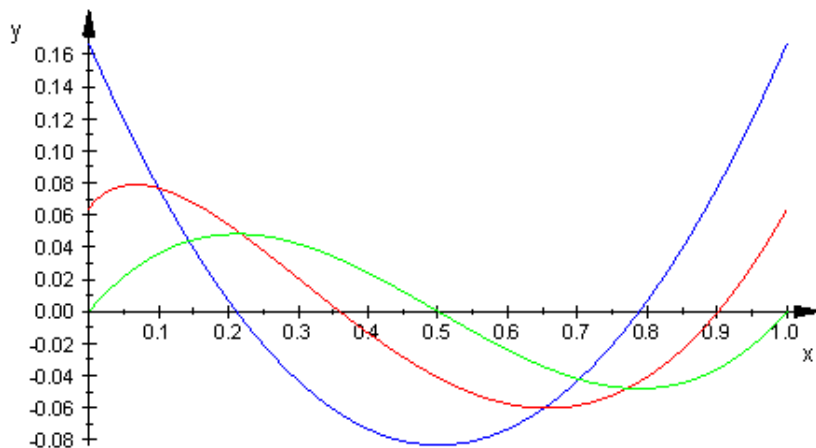
$$p \rightarrow -2 \cdot \Gamma(1+p) \cdot \left( \sum_{s=1}^{100} \frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot s \cdot x - \frac{\pi \cdot p}{2})}{(2 \cdot \pi \cdot s)^p} \right)$$

- `plotfunc2d(B(1),B(2), x=0..3, Scaling=Constrained)`



即ちこれらは「4 オイラー・マクローリンの和公式」に出てきた関数  $B_1(x - [x])$ ,  $B_2(x - [x])$  である。

$p=2.5$  のとき (2.p) を  $B_2(x)$ ,  $B_3(x)$  と共に図示すれば次のようになる。



青が  $B_2(x)$ 、赤が  $B_{2.5}(x)$ 、緑が  $B_3(x)$  である。この図を見ると、 $B_{2.5}(x)$  は視覚的にも  $B_2(x), B_3(x)$  のちょうど中間になっている。かくして (2.p) は定義域  $[0, 1]$  における非整数のベルヌイ多項式と見做することができる。

## 5・2 一般ベルヌイ数

前節の一般ベルヌイ多項式  $B_p(x)$  に  $x=0$  を代入すれば、

$$B_p(0) = -2\Gamma(1+p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \cos\left(-\frac{\pi p}{2}\right) = -\frac{2\Gamma(1+p)}{(2\pi)^p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^p} \cos\frac{\pi p}{2}$$

i.e.

$$B_p(0) = -\frac{2\Gamma(1+p)}{(2\pi)^p} \cos\frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(p) \quad (p \neq 1, -1, -2, -3, \dots)$$

$p=1$  はこの関数の不連続点であり、 $p = -1, -2, -3, \dots$  はこの関数の特異点である。従って、このままでは  $B_p(0)$  は非整数および2以上の自然数についてのベルヌイ数に過ぎない。

しかしながらこれらの不連続点と特異点はいつでも除去可能である。即ち、オイラーの公式より

$$B_p = -(-1)^p p \zeta(1-p) \quad p=1, 2, 3, \dots$$

ここで  $(-1)^p$  が必要なのは  $p=1$  のときのみであることに着目すれば、

$$B_p = \begin{cases} p \zeta(1-p) = -1/2 & p=1 \\ -p \zeta(1-p) & p=2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$p$  を整数にまで拡張すれば

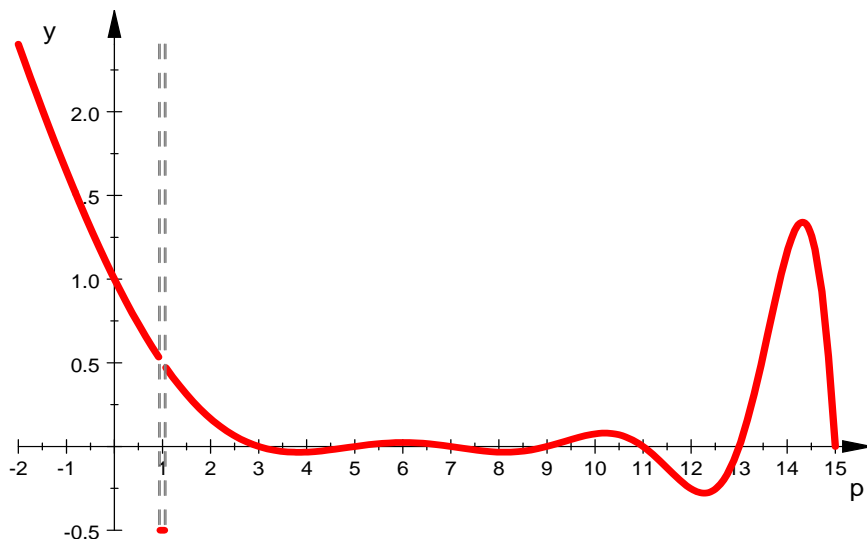
$$B_p = \begin{cases} -1/2 & p=1 \\ -p \zeta(1-p) & p \text{ is an integer s.t. } p \neq 1 \end{cases}$$

かくして、一般ベルヌイ数を次のように定義することが出来る。

定義5・2・1 (一般ベルヌイ数)

$$B_p = \begin{cases} -\frac{2\Gamma(1+p)}{(2\pi)^p} \cos\frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(p) & p \neq 1, -1, -2, -3, \dots \\ -1/2 & p=1 \\ -p \zeta(1-p) & p = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

$p$  を横軸に採り  $B_p$  縦軸に採ってこれを図示すると次のようになる。



上の定義式に従い  $B_{-4.9} \sim B_{4.9}$  までを計算して表示すれば次のようになる。

$n$	$B_{-4.n}$	$B_{-3.n}$	$B_{-2.n}$	$B_{-1.n}$	$B_{-0.n}$
9	4.9915289558	4.0556394217	3.1597013355	2.3239544010	1.5747717916
8	4.8965940882	3.9639624506	3.0730296140	2.2446565601	1.5057836944
7	4.8019226839	3.8726975025	2.9869782519	2.1662498955	1.4380021297
6	4.7075272044	3.7818625772	2.9015716057	2.0887644945	1.3714593994
5	4.6134206098	3.6914762876	2.8168346682	2.0122308858	1.3061876743
4	4.5196163712	3.6015578683	2.7327930617	1.9366800023	1.2422189111
3	4.4261284844	3.5121271822	2.6494730278	1.8621431391	1.1795847635
2	4.3329714820	3.4232047271	2.5669014161	1.7886519078	1.1183164882
1	4.2401604462	3.3348116400	2.4851056694	1.7162381868	1.0584448465
0	4.1477110205	3.2469697011	2.4041138063	1.6449340668	1

注) 青は除去可能な特異点。

$n$	$B_{0.n}$	$B_{1.n}$	$B_{2.n}$	$B_{3.n}$	$B_{4.n}$
0	1	-0.5	0.1666666666	0	-0.0333333333
1	0.9430114019	0.4589508448	0.1427610484	-0.0084614493	-0.0316898571
2	0.8875076831	0.4195995367	0.1205345707	-0.0156134795	-0.0294502827
3	0.8335165336	0.3819569885	0.0999673907	-0.0215139555	-0.0266973159
4	0.7810645792	0.3460316451	0.0810359704	-0.0262242815	-0.0235142614
5	0.7301772544	0.3118293374	0.0637130047	-0.0298092507	-0.0199845510
6	0.6808786703	0.2793531391	0.0479673653	-0.0323368645	-0.0161912437
7	0.6331914800	0.2486032259	0.0337640613	-0.0338781212	-0.0122164984
8	0.5871367399	0.2195767398	0.0210642174	-0.0345067720	-0.0081410226
9	0.5427337678	0.1922676575	0.0098250724	-0.0342990445	-0.0040434999

注) 赤は除去可能な不連続点

定義5・2・1 はゼータ関数を用いているが、後日、2重級数による定義が見つかった。(リーマン・ゼータ関数編「6 ゼータ関数のグローバル定義と諸係数の一般化」参照。)ここに再掲すると次のとおりである。これによる計算結果は上表と完全に一致する。

#### 定義5・2・2 (一般ベルヌイ数)

$$B_p = \begin{cases} -\frac{1}{2} & p = 1 \\ \frac{p}{2^p - 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^{p-1} & p \neq 1 \end{cases}$$

### 5・3 一般化されたベルヌーイの冪和公式

#### 公式5・3・1

$p \neq -1$  のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} \quad (1.1)$$

$$= \frac{1}{p+1} \{B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\} \quad (1.1')$$

証明

$$\{S_{n-1}\} = 0^p, 1^p, 2^p, \dots, (n-1)^p \quad p \neq -1$$

これより

$$f(x) = x^p$$

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{p+1} (n^{p+1} - 0^{p+1})$$

$$f^{(r-1)}(x) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-r+1)} x^{p-r+1} \quad (r=1 \sim p+1)$$

他方、公式4・2・1 (4 オイラー・マクローリンの和公式) において  $m$  を  $p$  に置換すれば

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{r=1}^p \frac{B_r}{r!} \{f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)\} + R_p$$

$$R_p = \frac{(-1)^{1+p}}{\Gamma(1+p)} \int_a^b B_p(x - \lfloor x \rfloor) f^{(p)}(x) dx$$

上の諸式をこれに代入すれば、

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} (n^{p+1} - 0^{p+1}) + \sum_{r=1}^p \frac{B_r}{r!} \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-r+1)} (n^{p-r+1} - 0^{p-r+1}) + R_p$$

$$= \sum_{r=0}^p \frac{B_r}{r!} \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-r+1)} (n^{p+1-r} - 0^{p+1-r}) + R_p$$

$$= \frac{1}{1+p} \sum_{r=0}^p \frac{\Gamma(2+p)}{r! \Gamma(2+p-r)} B_r (n^{p+1-r} - 0^{p+1-r}) + R_p$$

$$R_p = \frac{(-1)^{1+p}}{\Gamma(1+p)} \int_0^n B_p(x - \lfloor x \rfloor) \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1)} x^0 dx$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r} B_r (n^{p+1-r} - 0^{p+1-r}) + R_p$$

$$R_p = (-1)^{p+1} \int_0^n B_p(x - \lfloor x \rfloor) dx$$

5・1 で見たように

$$B_p(x - \lfloor x \rfloor) = B_p(x) = -2\Gamma(1+p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right)$$

であったから、これを  $R_p$  に代入すれば

$$\begin{aligned} R_p &= (-1)^p 2\Gamma(1+p) \int_0^n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right) dx \\ &= (-1)^p 2\Gamma(1+p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi s)^p} \int_0^n \cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right) dx \end{aligned}$$

$s=1, 2, 3, \dots$  のとき

$$\begin{aligned} \int_0^n \cos\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right) dx &= \frac{1}{2\pi s} \left[ \sin\left(2\pi s x - \frac{\pi p}{2}\right) \right]_0^n \\ &= \frac{1}{2\pi s} \left\{ \sin\left(2\pi s n - \frac{\pi p}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi p}{2}\right) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

即ち、 $R_p = 0$ 。故に

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r} B_r(n^{p+1-r} - 0^{p+1-r}) \quad (1.w)$$

$$= \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^p \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} \quad (1.1)$$

さらに

$$\binom{p+1}{p+1} B_{p+1}(n^0 - 0^0) = 0$$

であるから、(1.w) は次のように書くことができる。

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^{p+1} \binom{p+1}{r} B_r(n^{p+1-r} - 0^{p+1-r})$$

そしてこれを一般ベルヌイ多項式で表せば

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \{B_{p+1}(n) - B_{p+1}(0)\} \quad (1.1')$$

### 近似式

公式5・3・1 は概念上成立しているだけであり、残念ながらこれを実際の計算に用いることはできない。非整数  $p$  について  $\sum$  を求めることは困難であるし、 $[0, 1]$  より広い定義域上の一般ベルヌイ多項式は未知だからである。

そこで公式5・3・1の近似式を考えよう。(1.1') より

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} B_{p+1}(n) - \frac{1}{p+1} B_{p+1}(0)$$

ここで、 $B_{p+1}(0)$  については前節の一般ベルヌイ数

$$B_p = -\frac{2\Gamma(1+p)}{(2\pi)^p} \cos \frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(p) \quad p \neq 1, -1, -2, -3, \dots$$

を用いれば良い。

$B_{p+1}(n)$  については次式で近似することにする。

$$B_{p+1}(n) \doteq \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r}$$

ここで  $|p| \uparrow + 1 \leq m < \infty$  とする。 $m$  はかなり大きく採ることができ、これに伴い精度も向上する。しかし  $m$  を  $n-1$  以上とすることは無意味であり、無限大とすることは不可能である。かくして次の近似式を得る。

### 公式5・3・2

$p \neq 0, -1, -2, -3, \dots$  のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p \doteq \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} + \frac{2\Gamma(p+2)}{(2\pi)^{p+1}} \cos \frac{(p+1)\pi}{2} \zeta(p+1) \right\}$$

但し、 $|p| \uparrow + 1 \leq m < \infty$

例  $\sum_{k=0}^{100} k^{0.1}$

$m = 0.1 \uparrow + 1 = 2$  まで計算すれば

$$\sum_{k=0}^{100-1} k^{0.1} \doteq \frac{1}{0.1+1} \left\{ \sum_{r=0}^2 \binom{0.1+1}{r} B_r x^{0.1+1-r} + \frac{2\Gamma(0.1+2)}{(2\pi)^{0.1+1}} \cos \frac{(0.1+1)\pi}{2} \zeta(0.1+1) \right\}$$

$$= 144.45654994\dots$$

となり、この全桁(小数点以下8桁)が有効数字となる。

この結果は「4 オイラー・マクローリンの和公式」の公式4・6・1の例1と完全に一致している。それもそのはずで、公式5・3・2は公式4・6・1に類似の式に書き換えられる。

### 公式5・3・2'

$p \neq 0, -1, -2, -3, \dots$  のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p \doteq \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} + \zeta(-p)$$

ここで  $|p| \uparrow + 1 \leq m < \infty$

### 導出

次節の公式5・4・1の(1.3')より

$$\zeta(1-p) = \frac{2\Gamma(p)}{(2\pi)^p} \cos \frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(p) \quad p \neq 1, 0, -1, -2, \dots$$

$p$  を  $p+1$  に置き換えれば



$$\zeta(-p) = \frac{2\Gamma(p+1)}{(2\pi)^{p+1}} \cos \frac{(p+1)\pi}{2} \cdot \zeta(p+1) \quad p \neq 0, -1, -2, \dots$$

これを 公式5・3・2 に代入すれば

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k^p &\doteq \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} + (p+1) \zeta(-p) \right\} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} + \zeta(-p) \end{aligned}$$

「4 オイラー・マクローリンの和公式」の 公式4・6・1は次のようであった。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^p &= \zeta(-p) + \frac{1}{p+1} \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} + R_m \\ R_m &= \frac{1}{m B(m, -p)} \int_n^\infty \frac{B_m(x - \lfloor x \rfloor)}{x^{-p+m}} dx \end{aligned}$$

これと公式5・3・2'との違いは剰余項の有無のみである。

かくして、以上のことから次のことが分る。

$$B_{p+1}(0) = -(p+1) \zeta(-p)$$

$$B_{p+1}(n) = \sum_{r=0}^m \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} + \frac{p+1}{m B(m, -p)} \int_n^\infty \frac{B_m(x - \lfloor x \rfloor)}{x^{-p+m}} dx$$

### Note

この右辺第2項は煩雑である。もし簡明さを求めるならば、フルヴィッツ・ゼータ関数を使って次のように表すこともできる。但し、ここまでやるとかなり反則臭い。

$$B_{p+1}(n) = -(p+1) \zeta(-p, n)$$

#### 5・4 一般ベルヌイ数とゼータ関数

##### 公式5・4・1

$\zeta(p), B_p$  をそれぞれリーマンゼータ関数および一般ベルヌイ数とするととき次式が成立する。

$$\zeta(p) = -\frac{B_{1-p}}{1-p} \quad p \neq 1, 0 \quad (1.1)$$

$$\zeta(1-p) = -\frac{B_p}{p} \quad p \neq 0, 1 \quad (1.1')$$

$$B_p = \frac{p}{1-p} \frac{2\Gamma(p)}{(2\pi)^p} \cos \frac{p\pi}{2} \cdot B_{1-p} \quad p \neq 1, 0, -1, -2, \dots \quad (1.2)$$

$$B_{1-p} = \frac{1-p}{p} \frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}} \sin \frac{p\pi}{2} \cdot B_p \quad p \neq 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2')$$

$$\zeta(p) = \frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}} \sin \frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(1-p) \quad p \neq 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

$$\zeta(1-p) = \frac{2\Gamma(p)}{(2\pi)^p} \cos \frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(p) \quad p \neq 1, 0, -1, -2, \dots \quad (1.3')$$

#### 証明

公式5・3・1より

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{r=0}^{p+1} \binom{p+1}{r} B_r n^{p+1-r} - B_{p+1}(0) \right\}$$

$p$  を  $-p$  に置き換えれば

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{-p} = \frac{1}{-p+1} \left\{ \sum_{r=0}^{-p+1} \binom{-p+1}{r} B_r n^{-p+1-r} - B_{-p+1}(0) \right\} \quad p > 1$$

ここで  $n \rightarrow \infty$  とすれば、

$p > 1, r \geq 0$  より  $p+r-1 > 0$  であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p+1-r} = 0$ 。

従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{-p+1} \binom{-p+1}{r} B_r n^{-p+1-r} = 0$$

即ち、 $p > 1$  について

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{-p} = \frac{-B_{1-p}(0)}{1-p} = \zeta(p)$$

そして定義域を  $p > 1$  から  $p \neq 1, 0$  に解析接続して(1.1)を得る。

(1.1)において  $p$  を  $1-p$  に置き換えれば(1.1')を得る。この(1.1')はオイラーの

$$\zeta(1-m) = -\frac{(-1)^m B_m}{m} \quad m=1, 2, 3, \dots$$

に相当する。

次に、定義5・2・1より

$$B_p = -\frac{2\Gamma(1+p)}{(2\pi)^p} \cos \frac{p\pi}{2} \cdot \zeta(p) \quad p \neq 1, -1, -2, -3, \dots$$

(1.1) をこれに代入すれば (1.2) が得られる。そして (1.2) において  $p$  を  $1-p$  に置き換えれば (1.2') を得る。この (1.2), (1.2') は一般ベルヌイ数の関数等式である。

最後に、(1.1), (1.1') を  $B_{1-p}, B_p$  について解き、これらを (1.2'), (1.2) に代入して (1.3), (1.3') を得る。この (1.3), (1.3') は周知のゼータ関数の関数等式である。

### 例 1

(1.1) に 第2節の一般ベルヌイ数表 の値を代入すれば

$$\zeta(1.5) = -\frac{B_{1-1.5}}{1-1.5} = -\frac{B_{-0.5}}{-0.5} = -\frac{-1.3061876743}{0.5} = 2.612375348$$

$$\zeta(0.1) = -\frac{B_{1-0.1}}{1-0.1} = -\frac{B_{0.9}}{0.9} = -\frac{0.5427337678}{0.9} = -0.603037519$$

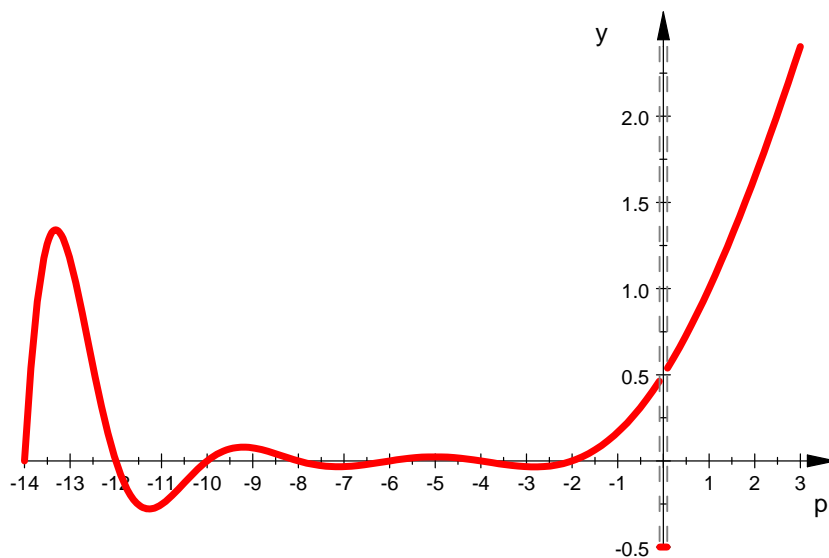
### 例 2

(1.1') に 第2節の一般ベルヌイ数表 の値を代入すれば

$$\zeta(-0.9) = \zeta(1-1.9) = -\frac{B_{1.9}}{1.9} = -\frac{0.1922676575}{1.9} = -0.101193503$$

$$\zeta(-2.1) = \zeta(1-3.1) = -\frac{B_{3.1}}{3.1} = -\frac{-0.0084614493}{3.1} = 0.002729499$$

最後に  $B_{1-p}$  のグラフを描いてみる。数式は  $B_{1-p} = (p-1)\zeta(p)$  による。この図では分かりにくいだが、 $p=0$  のとき  $B_1 (= -1/2)$  は除去可能な不連続点で、原点の真下にある。また、第2節の  $B_p$  のグラフと比べると、本図は  $p=1/2$  を挟んで線対称になっていることが判る。これは (1.3) で示される  $\zeta(p)$  と  $\zeta(1-p)$  の関係がそのまま反映された結果である。



2011.08.25

K. Kono