7 冪和の新公式

7·1 ベルヌーイ数による冪和の公式

3 乗和までの公式は 1 世紀までに知られていたようであるが、一般的な m 乗和の公式は 17 世紀に 関 孝和 と ヤコブ·ベルヌーイ によって発見された。現代の記法で示すと、

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{\delta(r,1)} {}_{m+1}C_r\, B_r\, n^{m+1-r} \tag{1.0}$$

ここで ${}_mC_r$ は二項係数、B_r はベルヌーイ数と呼ばれる係数である。B_r の最初の幾つかは

$$B_0 = 1\,,\ B_2 = \frac{1}{6}\,,\ B_4 = -\frac{1}{30}\,,\ B_6 = \frac{1}{42}\,,\ B_8 = -\frac{1}{30}\,,\ B_{10} = \frac{5}{66}\,,\ \cdots$$

$$B_1 = -\frac{1}{2}\ ,\quad B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$$

また、$\delta(r,s)$ はクロネッカーのデルタ（$r=s$ のとき 1 、$r \ne s$ のとき 0）である。この $(-1)^{\delta(r,1)}$ により $B_1 = -1/2$ の符号のみが反転される。つまり、それはベルヌーイ数の定義を現代から昔に変えるものである。

例えば $m=4\,,\,n=100$ のとき

$$\sum_{k=1}^{100} k^4 = \frac{1}{4+1} \sum_{r=0}^{4} (-1)^{\delta(r,1)} {}_{4+1}C_r\, B_r\, n^{4+1-r}$$

$$= \frac{1}{5}\left({}_5C_0\, B_0\, 100^5 - {}_5C_1\, B_1\, 100^4 + {}_5C_2\, B_2\, 100^3 + {}_5C_3\, B_3\, 100^2 + {}_5C_4\, B_4\, 100^1 \right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1\cdot 1\cdot 100^5 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)100^4 + 10\cdot\frac{1}{6}100^3 + 10\cdot 0\cdot 100^2 + 5\left(-\frac{1}{30}\right)100^1 \right)$$

$$= 2{,}050{,}333{,}330$$

cf.

「 04 オイラー·マクローリンの和公式 」によると、ヤコブ·ベルヌーイの和公式は次のようであった。

公式 4·3·3 (再掲)

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^{m} {}_{m+1}C_r\, B_r\, n^{m+1-r} \tag{3.1}$$

これは (1.0) とは異なっているが、$k=0 \sim n-1$ を $k=1 \sim n$ に変更すれば (3.1) から (1.0) が得られる。(3.1) を2分割すると

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\left({}_{m+1}C_0\, B_0\, n^{m+1} + {}_{m+1}C_1\, B_1\, n^m \right) + \frac{1}{m+1} \sum_{r=2}^{m} {}_{m+1}C_r\, B_r\, n^{m+1-r}$$

両辺に n^m を加えれば、

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\left\{ {}_{m+1}C_0\, B_0\, n^{m+1} + {}_{m+1}C_1\left(-\frac{1}{2}\right)n^m \right\} + n^m + \frac{1}{m+1} \sum_{r=2}^{m} {}_{m+1}C_r\, B_r\, n^{m+1-r}$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\{ {}_{m+1}C_0\, B_0\, n^{m+1} + {}_{m+1}C_1\left(-\frac{1}{2}\right)n^m + {}_{m+1}C_1\, n^m \right\} + \frac{1}{m+1} \sum_{r=2}^{m} {}_{m+1}C_r\, B_r\, n^{m+1-r}$$

$$= \frac{1}{m+1}\left\{ {}_{m+1}C_0\, B_0\, n^{m+1} - {}_{m+1}C_1\left(-\frac{1}{2}\right)n^m \right\} + \frac{1}{m+1} \sum_{r=2}^{m} {}_{m+1}C_r\, B_r\, n^{m+1-r}$$

ここで $-1=(-1)^{\delta(1,1)}$, $1=(-1)^{\delta(r,1)}$ $r\neq 1$ を用いれば

$$\sum_{k=0}^{n}k^m=\frac{1}{m+1}\left\{(-1)^{\delta(0,1)}{}_{m+1}C_0\,B_0\,n^{m+1}+(-1)^{\delta(1,1)}{}_{m+1}C_1\,B_1\,n^m\right\}$$
$$+\frac{1}{m+1}\sum_{r=2}^{m}(-1)^{\delta(r,1)}{}_{m+1}C_r\,B_r\,n^{m+1-r}$$

自然数 m について $0^m=0$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n}k^m=\sum_{k=1}^{n}k^m=\frac{1}{m+1}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{\delta(r,1)}{}_{m+1}C_r\,B_r\,n^{m+1-r} \tag{1.0}$$

ファウルハーバーの公式

(1.0) はその右辺を通分すれば分母・分子を全て整数で表すことが出来る。例えば、

$$\sum_{k=1}^{100}k^4=\frac{1}{5}\left(1\cdot1\cdot100^5-5\left(-\frac{1}{2}\right)100^4+10\cdot\frac{1}{6}100^3+10\cdot0\cdot100^2+5\left(-\frac{1}{30}\right)100^1\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{6}{6}100^5+\frac{15}{6}100^4+\frac{10}{6}100^3-\frac{1}{6}100^1\right)$$
$$=\frac{6\cdot100^5+15\cdot100^4+10\cdot100^3-100^1}{30}=2{,}050{,}333{,}330$$

このようにして $m=1\sim5$, n を計算すれば次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{n}k^1=\frac{n^2+n^1}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n^3+3n^2+n^1}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n^1}{30}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

しかし、このような整数ばかりから成る一般公式は得られない。実際、ファウルハーバーにもそれは成し得なかった。

ところが、ベルヌーイ数を用いないならば、整数ばかりの積和で冪和を得る一般公式が存在する。次節以降ではそのような公式を2種類示す。

(1.0) と同様に それらも二項係数を用いるから、先ず、二項係数とその諸性質を簡単に述べる。

二項係数

二項係数 ${}_nC_r$ は n 個の異なる要素から順序を無視して r 個の異なる要素を選ぶ組み合わせ数であり、次のように計算される。

$${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

パスカルの三角形

$_nC_r$ の n を行に r を列に並べたものはパスカルの三角形と呼ばれる。最初の数段は、

$$
\begin{array}{c}
{}_0C_0 \\
{}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\
{}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\
{}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\
{}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4 \\
{}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5 \\
{}_6C_0 \quad {}_6C_1 \quad {}_6C_2 \quad {}_6C_3 \quad {}_6C_4 \quad {}_6C_5 \quad {}_6C_6 \\
{}_7C_0 \quad {}_7C_1 \quad {}_7C_2 \quad {}_7C_3 \quad {}_7C_4 \quad {}_7C_5 \quad {}_7C_6 \quad {}_7C_7 \\
\vdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

二項係数の性質

二項係数の性質は数多く知られているが、パスカルの三角形から直ちに解る基本的なものを幾つか示せば次のとおりである。

ⅰ $_nC_r = {}_nC_{n-r}$ *Example*： $_6C_2 = {}_6C_4 = 15$

ⅱ $_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ *Example*： $_6C_2 = {}_5C_1 + {}_5C_2 = 5+10$

ⅲ $_nC_r = \sum_{k=r-1}^{n-1} {}_kC_{r-1} = \sum_{k=0}^{r} {}_{n-1-r+k}C_k$

Example： $_7C_3 = {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 = {}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3$

$35 = 1+3+6+10+15 \qquad = 1+4+10+20$

ⅳ $\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = 2^n$ *Example*： $_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 1+3+3+1 = 2^3$

ⅴ $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_nC_r = 0$ *Example*： $_3C_0 - {}_3C_1 + {}_3C_2 - {}_3C_3 = 1-3+3-1 = 0$

これらのうち、次節以下では ⅲ が使用される。

7･2　スターリング数による冪和の公式

公式 7･2･1（スターリング数による冪の表示）

m,n を自然数とするとき、次式が成立する。

$$n^m = \sum_{r=0}^{m} {}_mS_r\, {}_nC_r$$

ここで

$${}_mS_r = \sum_{t=0}^{r} (-1)^{r-t}\, {}_rC_t\, t^m \qquad r=0,1,2,\cdots,m$$

証明

n^2 及びその階差数列は次のようになる。

$$\begin{array}{lccccccccccc} n^2: & 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25\ \cdots \\ d_1: & & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \cdots \\ d_2: & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \cdots & \end{array}$$

一方、パスカルの三角形を2倍すると次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & 2 & & & \\ & & 2 & & 4 & & 2 & & \\ & 2 & & 6 & & 6 & & 2 & \\ 2 & & 8 & & 12 & & 8 & & 2 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

両者を比較して

$$d_2(n) = 2\,{}_nC_0$$

$$d_1(n) = 1 + 2\sum_{r=0}^{n-1} {}_rC_0 = 1 + 2\,{}_nC_1 \qquad \left(\because\ \sum_{r=0}^{n-1} {}_rC_0 = {}_nC_1 \right)$$

よって

$$n^2 = 0 + \sum_{r=0}^{n-1} (1 + 2\,{}_rC_1) = \sum_{r=0}^{n-1} 1 + 2\sum_{r=0}^{n-1} {}_rC_1$$

ここで $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} 1 = {}_nC_1$, $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} {}_rC_1 = {}_nC_2$ 　$({}_0C_1 = 0)$ であるから

$$n^2 = 1\,{}_nC_1 + 2\,{}_nC_2 \tag{2.n}$$

右辺の係数(青とマゼンタ)は n^2 の階差数列の初項に一致していることが分る。
そしてこれらの初項はそれぞれ次式で与えられる。

$$d_1:\ 1 = 1^2 - 0^2\,,\ 3 = 2^2 - 1^2\,,\ \cdots$$

$$d_2:\ 2 = 2^2 - 2\cdot 1^2 + 0^2\,,\ \cdots$$

即ち、(2.n) の r 番目の係数 ${}_2S_r$ は次のように表せる。

$${}_2S_r = \sum_{t=0}^{r} (-1)^{r-t}\, {}_rC_t\, t^2$$

次に、n^3 及びその階差数列は次のようになる。

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
n^3: & 0 & & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & 216 & & \cdots \\
d_1: & & 1 & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & & \cdots & \\
d_2: & & & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \cdots & & \\
d_3: & & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots & & &
\end{array}$$

一方、パスカルの三角形の ${}_nC_0$ を6倍すれば

$$6\,{}_nC_0:\quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad \cdots$$

両者を比較して

$$d_3(n) = 6\,{}_nC_0$$

$$d_2(n) = 6 + 6\sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_0 = 6 + 6\,{}_nC_1 \qquad \left(\because \sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_0 = {}_nC_1\right)$$

$$d_1(n) = 1 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(6 + 6\,{}_rC_1\right)$$

$$= 1 + 6\sum_{r=0}^{n-1}1 + 6\sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_1$$

ここで $\sum_{r=0}^{n-1}1 = {}_nC_1$, $\sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_1 = {}_nC_2$ $\left({}_0C_1 = 0\right)$ であるから

$$d_1(n) = 1 + 6\,{}_nC_1 + 6\,{}_nC_2$$

よって

$$n^3 = 0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left(1 + 6\,{}_rC_1 + 6\,{}_rC_2\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}1 + 6\sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_1 + 6\sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_2$$

さらに

$$\sum_{r=0}^{n-1}1 = {}_nC_1 \ , \ \sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_1 = {}_nC_2 \ , \ \sum_{r=0}^{n-1}{}_rC_2 = {}_nC_3 \qquad \left({}_rC_s = 0 \quad r < s\right)$$

であるから

$$n^3 = 1\,{}_nC_1 + 6\,{}_nC_2 + 6\,{}_nC_3 \tag{3.n}$$

右辺の係数(青とマゼンタ)は n^3 の階差数列の初項に一致していることが分る。

そしてこれらの初項はそれぞれ次式で与えられる。

$$d_1:\ 1 = 1^3 - 0^3\ ,\ 7 = 2^3 - 1^3\ ,\ 19 = 3^3 - 2^3\ ,\ \cdots$$

$$d_2:\ 6 = 2^3 - 2\cdot 1^3 + 0^3\ ,\ 12 = 3^3 - 2\cdot 2^3 + 1^3\ ,\ \cdots$$

$$d_3:\ 6 = 3^3 - 3\cdot 2^3 + 3\cdot 1^3 - 0^3\ ,\ \cdots$$

即ち、(3.n) の r 番目の係数 ${}_3S_r$ は次のように表せる。

$${}_3S_r = \sum_{t=0}^{r}(-1)^{r-t}\,{}_rC_t\,t^3$$

以下、帰納法により与式を得る。

例　3^4

$${}_4S_0=\sum_{t=0}^{0}(-1)^{0-t}{}_1C_t t^4=0 \quad , \quad {}_4S_1=\sum_{t=0}^{1}(-1)^{1-t}{}_1C_t t^4=1$$

$${}_4S_2=\sum_{t=0}^{2}(-1)^{2-t}{}_2C_t t^4=14 \quad , \quad {}_4S_3=\sum_{t=0}^{3}(-1)^{3-t}{}_3C_t t^4=36$$

$${}_4S_4=\sum_{t=0}^{4}(-1)^{4-t}{}_4C_t t^4=24$$

より

$$n^4=0{}_nC_0+1{}_nC_1+14{}_nC_2+36{}_nC_3+24{}_nC_4$$

$n=3$を代入すると

$$3^4=0{}_3C_0+1{}_3C_1+14{}_3C_2+36{}_3C_3+24{}_3C_4=81$$

${}_mS_r$ と 第2種スターリング数

これらの係数 ${}_mS_r$ の三角形の最初の数段は次のとおり。

$$\begin{array}{c} {}_1S_1 \\ {}_2S_1\ \ {}_2S_2 \\ {}_3S_1\ \ {}_3S_2\ \ {}_3S_3 \\ {}_4S_1\ \ {}_4S_2\ \ {}_4S_3\ \ {}_4S_4 \\ {}_5S_1\ \ {}_5S_2\ \ {}_5S_3\ \ {}_5S_4\ \ {}_5S_5 \\ {}_6S_1\ \ {}_6S_2\ \ {}_6S_3\ \ {}_6S_4\ \ {}_6S_5\ \ {}_6S_6 \\ {}_7S_1\ \ {}_7S_2\ \ {}_7S_3\ \ {}_7S_4\ \ {}_7S_5\ \ {}_7S_6\ \ {}_7S_7 \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 2 \\ 1\quad 6\quad 6 \\ 1\quad 14\quad 36\quad 24 \\ 1\quad 30\quad 150\quad 240\quad 120 \\ 1\quad 62\quad 540\quad 1560\quad 1800\quad 720 \\ 1\quad 126\quad 1806\quad 8400\quad 16800\quad 15120\quad 5040 \\ \vdots \end{array}$$

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences によると この係数 ${}_mS_r$ は既出（A019538）である。そしてこの係数は第2種スターリング数 ${}_ms_r$（小文字）と次の関係がある。

$${}_mS_r = r!\,{}_ms_r$$

${}_mS_r$ はスターリング数の類であり、それ故 公式 7･2･1 はスターリング数による公式と言える。

${}_mS_r$ の逐次計算法

${}_mS_r$ 以下のような逐次計算法より手計算できる。即ち、

第2種スターリング数の漸化式は ${}_ms_r={}_{m-1}s_{r-1}+r\,{}_{m-1}s_r$ であるから、先ず、これにより小文字 ${}_ms_r$ の三角形を手計算する。

$$\begin{array}{c} {}_1s_1 \\ {}_2s_1\ \ {}_2s_2 \\ {}_3s_1\ \ {}_3s_2\ \ {}_3s_3 \\ {}_4s_1\ \ {}_4s_2\ \ {}_4s_3\ \ {}_4s_4 \\ {}_5s_1\ \ {}_5s_2\ \ {}_5s_3\ \ {}_5s_4\ \ {}_5s_5 \\ {}_6s_1\ \ {}_6s_2\ \ {}_6s_3\ \ {}_6s_4\ \ {}_6s_5\ \ {}_6s_6 \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 7\quad 6\quad 1 \\ 1\quad 15\quad 25\quad 10\quad 1 \\ 1\quad 31\quad 90\quad 65\quad 15\quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

例えば、

$_4s_2 = {}_3s_1 + 2\,{}_3s_2 = 1+2\cdot 3 = 7$, $_4s_3 = {}_3s_2 + 3\,{}_3s_3 = 3+3\cdot 1=6$

$_5s_2 = {}_4s_1 + 2\,{}_4s_2 = 1+2\cdot 7=15$, $_5s_3 = {}_4s_2 + 3\,{}_4s_3 = 7+3\cdot 6=25$, $_5s_4 = {}_4s_3 + 4\,{}_4s_4 = 6+4\cdot 1=10$

$_6s_2 = {}_5s_1 + 2\,{}_5s_2 = 1+2\cdot 15=31$, $_6s_3 = {}_5s_2 + 3\,{}_5s_3 = 15+3\cdot 25=90$, $_6s_4 = 65$, $_6s_4 = 15$, $\cdots$

$\vdots$

次に、右上の三角形の第 r 斜列に $r!$ を乗じる。即ち、

$$(1,3,7,15,31,\cdots)\,2! = 2,6,14,30,62,\cdots$$
$$(1,6,25,90,301,\cdots)\,3! = 6,36,150,540,\cdots$$
$$(1,10,65,350,\cdots)\,4! = 24,240,1560,8400,\cdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

すると次のようになる。これが大文字 $_mS_r$ の三角形である、

$$\begin{array}{cccccc} {}_1S_1 \\ {}_2S_1 & {}_2S_2 \\ {}_3S_1 & {}_3S_2 & {}_3S_3 \\ {}_4S_1 & {}_4S_2 & {}_4S_3 & {}_4S_4 \\ {}_5S_1 & {}_5S_2 & {}_5S_3 & {}_5S_4 & {}_5S_5 \\ {}_6S_1 & {}_6S_2 & {}_6S_3 & {}_6S_4 & {}_6S_5 & {}_6S_6 \\ & & \vdots \end{array} = \begin{array}{cccccc} 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 14 & 36 & 24 \\ 1 & 30 & 150 & 240 & 120 \\ 1 & 62 & 540 & 1560 & 1800 & 720 \\ & & \vdots \end{array}$$

公式 7･2･1 の冪を 1 から n まで加算すれば次なる公式が得られる。

公式 7･2･2 (スターリング数による冪和の公式)

m,n を自然数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{r=1}^{m} {}_mS_r\ {}_{n+1}C_{r+1}$$

ここで $_mS_r$ は第2種スターリング数の類であり、次式で与えられる。

$${}_mS_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\,{}_rC_s\, s^m \qquad r=0,1,2,\cdots,m$$

証明

公式 7･2･1 より

$$n^m = \sum_{r=0}^{m} {}_mS_r\ {}_nC_r$$

n を k に置換すれば

$$k^m = \sum_{r=0}^{m} {}_mS_r\ {}_kC_r$$

k を 0 から n まで加算すれば

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{m} {}_mS_r\ {}_kC_r = \sum_{r=0}^{m} {}_mS_r \sum_{k=0}^{n} {}_kC_r \qquad (2.\mathrm{w})$$

右辺の2番目のΣを展開すると

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{k}C_{r} = {}_{0}C_{r} + {}_{1}C_{r} + {}_{2}C_{r} + \cdots + {}_{n}C_{r} \qquad n \ge r$$

ところが $k < r$ のとき ${}_{k}C_{r} = 0$ であるから、$k \ge r$ とせよ。するとこのΣは次のように書き換えることができる。

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{k}C_{r} = \sum_{k=r}^{n} {}_{k}C_{r} = {}_{r}C_{r} + {}_{r+1}C_{r} + {}_{r+2}C_{r} + \cdots + {}_{n}C_{r} \qquad n \ge r$$

ここで 二項係数の性質 iii

$${}_{r-1}C_{r-1} + {}_{r}C_{r-1} + {}_{r+1}C_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}C_{r-1} = {}_{n}C_{r}$$

により、この右辺は次のようになる。

$${}_{r}C_{r} + {}_{r+1}C_{r} + {}_{r+2}C_{r} + \cdots + {}_{n}C_{r} = {}_{n+1}C_{r+1} \qquad n \ge r$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{k}C_{r} = {}_{n+1}C_{r+1} \qquad n \ge r$$

これを (2.w) の右辺に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n} k^{m} = \sum_{r=0}^{m} {}_{m}S_{r}\ {}_{n+1}C_{r+1}$$

左辺において $0^{m}=0$、右辺において ${}_{m}S_{0}=0$ であるから、$k=0$, $r=0$ は省くことができ、

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m} = \sum_{r=1}^{m} {}_{m}S_{r}\ {}_{n+1}C_{r+1}$$

Q.E.D.

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^{5}$

${}_{5}S_{1}$, ${}_{5}S_{2}$, ${}_{5}S_{3}$, ${}_{5}S_{4}$, ${}_{5}S_{5}$ = 1 , 30 , 150 , 240 ,120 であるから

$${}_{101}C_{2} + 30\,{}_{101}C_{3} + 150\,{}_{101}C_{4} + 240\,{}_{101}C_{5} + 120\,{}_{101}C_{6} = 171{,}708{,}332{,}500$$

$$\frac{2\cdot 100^{6} + 6\cdot 100^{5} + 5\cdot 100^{4} - 100^{2}}{12} = 171{,}708{,}332{,}500$$

Note

この 公式 7･2･2 は既知である。

7･3 オイラリアン数による冪和の新公式

公式 7･3･1（オイラリアン数による累乗の表示）

m, n を自然数とするとき、次式が成立する。

$$n^m = \sum_{r=0}^{m-1} {}_mD_{r+1}\, {}_{n+r}C_m$$

ここで ${}_mD_r \quad r=1,2,\cdots,m$ はオイラリアン数であり、次式で与えられる。

$${}_mD_r = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s\, {}_{m+1}C_s (r-s)^m \qquad m=1,2,3,\cdots$$

証明

公式 7･2･1 より

$$\begin{aligned}
n^2 &= {}_nC_1 + 2\,{}_nC_2 \\
&= {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_2 \\
&= {}_{n+1}C_2 + {}_nC_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n^3 &= {}_nC_1 + 6\,{}_nC_2 + 6\,{}_nC_3 \\
&= ({}_nC_1 + {}_nC_2) + 5\,{}_nC_2 + 6\,{}_nC_3 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 5\,{}_nC_2 + 6\,{}_nC_3 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 5({}_nC_2 + {}_nC_3) + {}_nC_3 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 5\,{}_{n+1}C_3 + {}_nC_3 \\
&= ({}_{n+1}C_2 + {}_{n+1}C_3) + 4\,{}_{n+1}C_3 + {}_nC_3 \\
&= {}_{n+2}C_3 + 4\,{}_{n+1}C_3 + {}_nC_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n^4 &= {}_nC_1 + 14\,{}_nC_2 + 36\,{}_nC_3 + 24\,{}_nC_4 \\
&= ({}_nC_1 + {}_nC_2) + 13\,{}_nC_2 + 36\,{}_nC_3 + 24\,{}_nC_4 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 13\,{}_nC_2 + 36\,{}_nC_3 + 24\,{}_nC_4 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 13({}_nC_2 + {}_nC_3) + 23\,{}_nC_3 + 24\,{}_nC_4 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 13\,{}_{n+1}C_3 + 23\,{}_nC_3 + 24\,{}_nC_4 \\
&= ({}_{n+1}C_2 + {}_{n+1}C_3) + 12\,{}_{n+1}C_3 + 23({}_nC_3 + {}_nC_4) + {}_nC_4 \\
&= {}_{n+2}C_3 + 12\,{}_{n+1}C_3 + 23\,{}_{n+1}C_4 + {}_nC_4 \\
&= {}_{n+2}C_3 + 12({}_{n+1}C_3 + {}_{n+1}C_4) + 11\,{}_{n+1}C_4 + {}_nC_4 \\
&= {}_{n+2}C_3 + 12\,{}_{n+2}C_4 + 11\,{}_{n+1}C_4 + {}_nC_4 \\
&= ({}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_4) + 11\,{}_{n+2}C_4 + 11\,{}_{n+1}C_4 + {}_nC_4 \\
&= {}_{n+3}C_4 + 11\,{}_{n+2}C_4 + 11\,{}_{n+1}C_4 + {}_nC_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n^5 &= {}_nC_1 + 30\,{}_nC_2 + 150\,{}_nC_3 + 240\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5 \\
&= ({}_nC_1 + {}_nC_2) + 29\,{}_nC_2 + 150\,{}_nC_3 + 240\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 29\,{}_nC_2 + 150\,{}_nC_3 + 240\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 29({}_nC_2 + {}_nC_3) + 121\,{}_nC_3 + 240\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5 \\
&= {}_{n+1}C_2 + 29\,{}_{n+1}C_3 + 121\,{}_nC_3 + 240\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5
\end{aligned}$$

$$= \left({}_{n+1}C_2 + {}_{n+1}C_3\right) + 28\,{}_{n+1}C_3 + 121\left({}_nC_3 + {}_nC_4\right) + 119\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5$$
$$= {}_{n+2}C_3 + 28\,{}_{n+1}C_3 + 121\,{}_{n+1}C_4 + 119\,{}_nC_4 + 120\,{}_nC_5$$
$$= {}_{n+2}C_3 + 28\left({}_{n+1}C_3 + {}_{n+1}C_4\right) + 93\,{}_{n+1}C_4 + 119\left({}_nC_4 + {}_nC_5\right) + {}_nC_5$$
$$= {}_{n+2}C_3 + 28\,{}_{n+2}C_4 + 93\,{}_{n+1}C_4 + 119\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$= \left({}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_4\right) + 27\,{}_{n+2}C_4 + 93\left({}_{n+1}C_4 + {}_{n+1}C_5\right) + 26\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$= {}_{n+3}C_4 + 27\,{}_{n+2}C_4 + 93\,{}_{n+2}C_5 + 26\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$= {}_{n+3}C_4 + 27\left({}_{n+2}C_4 + {}_{n+2}C_5\right) + 66\,{}_{n+2}C_5 + 26\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$= {}_{n+3}C_4 + 27\,{}_{n+3}C_5 + 66\,{}_{n+2}C_5 + 26\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$= \left({}_{n+3}C_4 + {}_{n+3}C_5\right) + 26\,{}_{n+3}C_5 + 66\,{}_{n+2}C_5 + 26\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$= {}_{n+4}C_5 + 26\,{}_{n+3}C_5 + 66\,{}_{n+2}C_5 + 26\,{}_{n+1}C_5 + {}_nC_5$$
$$\vdots$$

これらの係数は「 01ゼータ母関数 」で述べた**定ベキ化係数**(Eulerian number)である。
よって帰納法により与式を得る。

例　$\mathbf{7^3,\ 3^4}$

$$7^3 = {}_7C_3 + 4{}_8C_3 + {}_9C_3 \qquad = 35+4\cdot 56+84 \qquad = 343$$
$$3^4 = {}_3C_4 + 11{}_4C_4 + 11{}_5C_4 + {}_6C_4 = 0+11\cdot 1+11\cdot 5+15 = \ 81$$

オイラリアン数の三角形

オイラリアン数の三角形の最初の数段を示すと次のようになる。これらは自然数であり、左右対称である。

$$\begin{array}{c}
{}_1D_1 \\
{}_2D_1\ \ {}_2D_2 \\
{}_3D_1\ \ {}_3D_2\ \ {}_3D_3 \\
{}_4D_1\ \ {}_4D_2\ \ {}_4D_3\ \ {}_4D_4 \\
{}_5D_1\ \ {}_5D_2\ \ {}_5D_3\ \ {}_5D_4\ \ {}_5D_5 \\
{}_6D_1\ \ {}_6D_2\ \ {}_6D_3\ \ {}_6D_4\ \ {}_6D_5\ \ {}_6D_6 \\
{}_7D_1\ \ {}_7D_2\ \ {}_7D_3\ \ {}_7D_4\ \ {}_7D_5\ \ {}_7D_6\ \ {}_7D_7 \\
\vdots
\end{array}
=
\begin{array}{c}
1 \\
1\quad 1 \\
1\quad 4\quad 1 \\
1\quad 11\quad 11\quad 1 \\
1\quad 26\quad 66\quad 26\quad 1 \\
1\quad 57\quad 302\quad 302\quad 57\quad 1 \\
1\ \ 120\ \ 1191\ \ 2416\ \ 1191\ \ 120\ \ 1 \\
\vdots
\end{array}$$

オイラリアン数の逐次計算法

オイラリアン数は 次のような逐次計算法より 簡単に手計算できる。
先ず、2段目の係数を 1　1 とし、3段目以下の両端の係数も全て 1 とせよ。
次にピラミッドの2段目に合計が4となる2数の順列 $(2,2)$ を乗加算して3段目の係数とする。
次にピラミッドの3段目に合計が5となる2数の順列 $(3,2),(2,3)$ を乗加算して4段目の係数とする。以下、同じ手順を次図に示すように繰り返す。

		算　式
2	1　1	
	2,2	
3	1　4　1	$4 = 1\times2 + 1\times2$
	3,2　2,3	
4	1　11　11　1	$11 = 1\times3 + 4\times2$
	4,2　3,3　2,4	
5	1　26　66　26　1	$26 = 1\times4 + 11\times2$,　$66 = 11\times3 + 11\times3$
	5,2　4,3　3,4　2,5	
6	1　57　302　302　57　1	$57 = 1\times5 + 26\times2$,　$302 = 26\times4 + 66\times3$
	⋮	⋮

公式 7･3･1 の冪を 1 から n まで加算すれば次なる公式が得られる。

公式 7･3･2（オイラリアン数による冪和の新公式）

m,n を自然数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{r=1}^{m} {}_mD_r\, {}_{n+r}C_{m+1}$$

ここで ${}_mD_r$　$r=1,2,\cdots,m$　はオイラリアン数であり、次式で与えられる。

$$ {}_mD_r = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s\, {}_{m+1}C_s (r-s)^m \qquad m=1,2,3,\cdots$$

証明

公式 7･3･1 より

$$n^m = \sum_{r=0}^{m-1} {}_mD_{r+1}\, {}_{n+r}C_m$$

n を k に置換すれば

$$k^m = \sum_{r=0}^{m-1} {}_mD_{r+1}\, {}_{k+r}C_m$$

r の開始値を 0 から 1 に変更すれば

$$k^m = \sum_{r=1}^{m} {}_mD_r\, {}_{k+r-1}C_m$$

k を 1 から n まで加算すれば

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} {}_mD_r\, {}_{k+r-1}C_m = \sum_{r=1}^{m} {}_mD_r \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1+r}C_m \tag{3.w}$$

右辺の2番目の Σ を展開すると

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k-1+r}C_m = {}_{1-1+r}C_m + {}_{2-1+r}C_m + {}_{3-1+r}C_m + \cdots + {}_{n-1+r}C_m \qquad r \le m$$

$k-1+r < m$　のとき ${}_{k-1+r}C_m = 0$ であるから、$k-1+r \ge m$　i.e.　$k \ge 1+m-r$　とせよ。

するとこの Σ は次のように書き換えることができる。

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{k-1+r}C_m = \sum_{k=1+m-r}^{n} {}_{k-1+r}C_m = {}_mC_m + {}_{m+1}C_m + {}_{m+3}C_m + \cdots + {}_{n-1+r}C_m \qquad r \le m$$

ここで 二項係数の性質 iii

$$ {}_{r-1}C_{r-1} + {}_{r}C_{r-1} + {}_{r+1}C_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}C_{r-1} = {}_{n}C_{r} $$

により、この右辺は次のようになる。

$$ {}_{m}C_{m} + {}_{m+1}C_{m} + {}_{m+3}C_{m} + \cdots + {}_{n-1+r}C_{m} = {}_{n+r}C_{m+1} \qquad r \le m $$

i.e.

$$ \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1+r}C_{m} = {}_{n+r}C_{m+1} \qquad r \le m $$

これを (3.w) の右辺に代入すると

$$ \sum_{k=1}^{n} k^{m} = \sum_{r=1}^{m} {}_{m}D_{r}\, {}_{n+r}C_{m+1} $$

Q.E.D.

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^{5}$

${}_{5}D_{1}\,,\,{}_{5}D_{2}\,,\,{}_{5}D_{3}\,,\,{}_{5}D_{4}\,,\,{}_{5}D_{5} = 1\,,\,26\,,\,66\,,\,26\,,1$ であるから

$$ {}_{101}C_{6} + 26\,{}_{102}C_{6} + 66\,{}_{103}C_{6} + 26\,{}_{104}C_{6} + {}_{105}C_{6} = 171{,}708{,}332{,}500 $$

$$ \frac{2\cdot 100^{6} + 6\cdot 100^{5} + 5\cdot 100^{4} - 100^{2}}{12} = 171{,}708{,}332{,}500 $$

cf.

本例と 前節の例 を比べると面白い。

7·4 $(ak+b)^m$ の和の公式

本節では次のような冪和を求める。式中 a,b は実数で m,n は自然数である。

$$S_{m,n} = (1a+b)^m + (2a+b)^m + (3a+b)^m + \cdots + (na+b)^m$$

公式 7·4·1

a,b を実数とし m,n を自然数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^m = b^m{}_nC_1 + \sum_{r=1}^{m}{}_mC_r a^r b^{m-r}\sum_{s=1}^{r}{}_rD_s\,{}_{n+s}C_{r+1}$$

ここで ${}_rD_s$ $s=1,2,\cdots,r$ はオイラリアン数であり、次式で与えられる。

$${}_rD_s = \sum_{t=0}^{s-1}(-1)^t{}_{r+1}C_t(s-t)^r \qquad r=1,2,\cdots,m$$

証明

$$(ak+b)^m = \sum_{r=0}^{m}{}_mC_r(ak)^r b^{m-r} = \sum_{r=0}^{m}{}_mC_r k^r a^r b^{m-r}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^m = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{m}{}_mC_r k^r a^r b^{m-r} = \sum_{r=0}^{m}{}_mC_r a^r b^{m-r}\sum_{k=1}^{n}k^r$$

$$= {}_mC_0 a^0 b^m\sum_{k=1}^{n}k^0 + \sum_{r=1}^{m}{}_mC_r a^r b^{m-r}\sum_{k=1}^{n}k^r$$

ここで ${}_mC_0 a^0 = 1$, $\sum_{k=1}^{n}k^0 = {}_nC_1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^m = b^m{}_nC_1 + \sum_{r=1}^{m}{}_mC_r a^r b^{m-r}\sum_{k=1}^{n}k^r$$

前節 公式 7·3·2 により

$$\sum_{k=1}^{n}k^r = \sum_{s=1}^{r}{}_rD_s\,{}_{n+s}C_{r+1}$$

であったから、これを右辺に代入すれば

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^m = b^m{}_nC_1 + \sum_{r=1}^{m}{}_mC_r a^r b^{m-r}\sum_{s=1}^{r}{}_rD_s\,{}_{n+s}C_{r+1}$$ Q.E.D.

これは半二重級数でややこしそうに見えるが、展開すれば意外と判りやすい。例えば、$m=1,\sim,5$ について書き下せば次のようである。a,b の係数はパスカルの三角形の m 段目であり、${}_{n+s}C_{r+1}$ の係数はオイラリアンの三角形の上部 m 段である。

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^1 = b^1{}_nC_1 + a^1b^0\,{}_{n+1}C_2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^2\ \ b^2{}_nC_1 + 2a^1b^1{}_{n+1}C_2 + a^2b^0({}_{n+1}C_3 + {}_{n+2}C_3)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^3 = b^3{}_nC_1 + 3a^1b^2{}_{n+1}C_2 + 3a^2b^1({}_{n+1}C_3 + {}_{n+2}C_3) + a^3b^0({}_{n+1}C_4 + 4{}_{n+2}C_4 + {}_{n+3}C_4)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^4 = b^4{}_{n}C_1 + 4a^1b^3{}_{n+1}C_2 + 6a^2b^2({}_{n+1}C_3+{}_{n+2}C_3) + 4a^3b^1({}_{n+1}C_4+4{}_{n+2}C_4+{}_{n+3}C_4) + a^4b^0({}_{n+1}C_5+11{}_{n+2}C_5+11{}_{n+3}C_5+{}_{n+4}C_5)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)^5 = b^5{}_{n}C_1 + 5a^1b^4{}_{n+1}C_2 + 10a^2b^3({}_{n+1}C_3+{}_{n+2}C_3) + 10a^3b^2({}_{n+1}C_4+4{}_{n+2}C_4+{}_{n+3}C_4) + 5a^4b^1({}_{n+1}C_5+11{}_{n+2}C_5+11{}_{n+3}C_5+{}_{n+4}C_5) + a^5b^0({}_{n+1}C_6+26{}_{n+2}C_6+66{}_{n+3}C_6+26{}_{n+4}C_6+{}_{n+5}C_6)$$

この公式の良いところは、$a^r b^{m-r}$ 以外の計算が整数で行われることである。それにより、整数部分は集約されて より簡明な結果になる。以下、2例を示す。

例1

$$\sum_{k=1}^{50}(\pi k-e)^4 = e^4{}_{50}C_1 - 4\pi^1e^3{}_{51}C_2 + 6\pi^2e^2({}_{51}C_3+{}_{52}C_3) - 4\pi^3e^1({}_{51}C_4+4{}_{52}C_4+{}_{53}C_4) + \pi^4e^0({}_{51}C_5+11{}_{52}C_5+11{}_{53}C_5+{}_{54}C_5)$$

$$= 50e^4 - 4\cdot 1275\pi^1e^3 + 6(20825+22100)\pi^2e^2 - 4(249900+4\cdot 270725+292825)\pi^3e^1 + (2349060+11\cdot 2598960+11\cdot 2869685+3162510)\pi^4e^0$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{50}(\pi k-e)^4 = 50e^4 - 5100\pi e^3 + 257550\pi^2e^2 - 6502500\pi^3e + 65666665\pi^4$$

例2

$$\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{2}k+\sqrt{3})^3 = (\sqrt{3})^3{}_{100}C_1 + 3(\sqrt{2})^1(\sqrt{3})^2{}_{101}C_2 + 3(\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^1({}_{101}C_3+{}_{102}C_3) + (\sqrt{2})^3(\sqrt{3})^0({}_{101}C_4+4{}_{102}C_4+{}_{103}C_4)$$

$$= 100\cdot 3\sqrt{3} + 5050\cdot 9\sqrt{2} + (166650+171700)\cdot 6\sqrt{3} + (4082925+4\times 4249575+4421275)\cdot 2\sqrt{2}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{2}k+\sqrt{3})^3 = 51050450\sqrt{2} + 2030400\sqrt{3}$$

自画自賛
　この公式は 視覚的に美しい。

2011.12.22
2015.11.14 第5節追加
2024.11.03 Renewed

河野 和
広島市

宇宙人の数学