8 テイラー級数とマクローリン級数

開領域内の正則な関数$f(z)$は特異点以外の点aの周りでテイラー展開できる。また、$f(z)$は原点Oから直近の特異点までを半径とする開円板内でマクローリン展開できる。これらの収束円が原点Oを共有するとき、テイラー級数はマクローリン級数に帰着する。このとき両微分係数間には無数の関係式が発生する。

8･1 特異点が無い場合

定理 8･1･1

関数$f(z)$が開領域Dの全域で正則であるとき、任意の$a \in D$について次式が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}f^{(s)}(a)=f^{(r)}(0) \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{1.1}$$

証明

関数$f(z)$はD内でマクローリン展開でき、その収束半径は$R_0=\infty$である。
また関数$f(z)$はD内の任意の点aの周りで次のようにテイラー展開できる。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r!}(z-a)^r$$

そしてこの収束半径も$R_a=\infty$である。ここで

$$(z-a)^r=\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}{}_rC_s\,a^{r-s}z^s$$

を用いれば

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r!}(z-a)^r=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r!}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}{}_rC_s\,a^{r-s}z^s$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r}^{\infty}\frac{f^{(s)}(a)}{s!}(-1)^{s-r}{}_sC_r\,a^{s-r}z^r$$

これはD内においてマクローリン級数に等しくなければならないから

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=r}^{\infty}\frac{f^{(s)}(a)}{s!}(-1)^{s-r}{}_sC_r\,a^{s-r}z^r=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}z^r$$

更に、両級数はD内において一様収束するから、これらは同一の級数でなければならない。
そうでないならば、それは級数の一意性に矛盾するからである。よって

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{f^{(s)}(a)}{s!}(-1)^{s-r}{}_sC_r\,a^{s-r}=\frac{f^{(r)}(0)}{r!} \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{1.0}$$

ここで、

$${}_sC_r=\frac{s!}{r!(s-r)!}$$

であるから、これを (1.0) に代入し 両辺に$r!$を乗じて、

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}f^{(s)}(a)=f^{(r)}(0) \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{1.1}$$

Note

s の初期値を r から 0 に変更すれば

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{a^s}{s!}f^{(r+s)}(a)=f^{(r)}(0) \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

しかし、これは使い勝手が良くない。

例1 $f(z)=\sin z$

この高階導関数は

$$f^{(r)}(z)=\sin\left(z+\frac{r\pi}{2}\right) \qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、a の周りのテイラー級数とマクローリン級数とは次のとおり。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{r\pi}{2}\right)\cdot\frac{(z-a)^r}{r!}$$

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sin\frac{r\pi}{2}\cdot\frac{z^r}{r!}$$

これらの収束半径は $R_a=R_0=\infty$。（青天井！） よって 定理により、次が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)=\sin\frac{r\pi}{2} \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

r=0 のとき

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{a^s}{s!}\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)=0$$

展開すると

$$\frac{a^0\sin a}{0!}-\frac{a^1\cos a}{1!}-\frac{a^2\sin a}{2!}+\frac{a^3\cos a}{3!}+--+\cdots=0 \qquad for\ any\ a$$

$a=\pi/4$ と置けば $\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0-\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3+--+\cdots\right\}=0$$

これより

$$\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0-\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3+--+\cdots=0$$

r=1 のとき

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{a^{s-1}}{(s-1)!}\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)=1$$

展開すると

$$\frac{a^0\cos a}{0!}+\frac{a^1\sin a}{1!}-\frac{a^2\cos a}{2!}-\frac{a^3\sin a}{3!}-++-\cdots=1$$

$a=\pi/4$ と置けば $\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3++--\cdots\right\}=1$$

これより

$$\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3++--\cdots=\sqrt{2}$$

例2 $\boldsymbol{f(z)=\sinh z}$

この高階導関数は

$$f^{(r)}(z)=i^{-r}\sinh\left(z+\frac{r\pi i}{2}\right)\qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、a の周りのテイラー級数とマクローリン級数とは次のとおり。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}i^{-r}\sinh\left(a+\frac{r\pi i}{2}\right)\frac{(z-a)^r}{r!}$$

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}i^{-r}\sinh\left(\frac{r\pi i}{2}\right)\frac{z^r}{r!}$$

これらの収束半径は $R_a=R_0=\infty$。（青天井！） よって 定理により、次が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}i^{-s}\sinh\left(a+\frac{s\pi i}{2}\right)=i^{-r}\sinh\left(\frac{r\pi i}{2}\right)\quad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

$\boldsymbol{r=0}$ のとき

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{a^{s}}{s!}i^{-s}\sinh\left(a+\frac{s\pi i}{2}\right)=0$$

展開すると

$$\frac{a^0\sinh a}{0!}-\frac{a^1\cosh a}{1!}+\frac{a^2\sinh a}{2!}-\frac{a^3\cosh a}{3!}+-\cdots=0\qquad for\ any\ a$$

$a=\pi i/4$ と置けば $\sinh(\pi i/4)=i/\sqrt{2}$, $\cosh(\pi i/4)=1/\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0-\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3+--+\cdots\right\}=0$$

i.e.

$$\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0-\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3+--+\cdots=0$$

これは例1における $r=0$ のときと同じである。

$\boldsymbol{r=1}$ のとき

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{a^{s-1}}{(s-1)!}i^{-s}\sinh\left(a+\frac{s\pi i}{2}\right)=1$$

展開すると

$$\frac{a^0\cosh a}{0!}-\frac{a^1\sinh a}{1!}+\frac{a^2\cosh a}{2!}-\frac{a^3\sinh a}{3!}+-\cdots=1\qquad for\ any\ a$$

$a=\pi i/4$ と置けば $sinh(\pi i/4)=i/\sqrt{2}$, $cosh(\pi i/4)=1/\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3++--\cdots\right\}=1$$

i.e.

$$\frac{1}{0!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^0+\frac{1}{1!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3++--\cdots=\sqrt{2}$$

これは例1における $r=1$ のときと同じである。

例3 $f(z)=(1-z)e^{-z}$

この高階導関数は

$$f^{(r)}(z)=(-1)^r e^{-z}(r+1-z) \qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、a の周りのテイラー級数とマクローリン級数は次のとおり。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r e^{-a}(r+1-a)\frac{(z-a)^r}{r!}$$

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(r+1)\frac{z^r}{r!}$$

これらの収束半径は $R_a=R_0=\infty$ 。(青天井 !) よって 定理により、次が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}(-1)^s e^{-a}(s+1-a)=(-1)^r(r+1) \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

i.e.

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}e^{-a}(s+1-a)=r+1 \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

係数付指数級数

両辺に e^a を乗じて、s の初期値を r から 0 に変更すれば

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a^s}{s!}(s+r+1-a)=(r+1)e^a \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

$r+1$ は任意の自然数であるが、これは任意の実数 b に置換することが出来る。かくして

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(b-a+s)a^s}{s!}=be^a \qquad for\ any\ \ a,b$$

展開すれば

$$\frac{(b-a)a^0}{0!}+\frac{(b-a+1)a^1}{1!}+\frac{(b-a+2)a^2}{2!}+\frac{(b-a+3)a^3}{3!}+\cdots=be^a$$

特殊値

$$\frac{b-1}{0!}+\frac{b+0}{1!}+\frac{b+1}{2!}+\frac{b+2}{3!}+\cdots=be^1$$

$$\frac{b+1}{0!}-\frac{b+2}{1!}+\frac{b+3}{2!}-\frac{b+4}{3!}+-\cdots=be^{-1}$$

$$\frac{(0-a)a^0}{0!}+\frac{(1-a)a^1}{1!}+\frac{(2-a)a^2}{2!}+\frac{(3-a)a^3}{3!}+\cdots=0e^a$$

$$\frac{(1-a)a^0}{0!}+\frac{(2-a)a^1}{1!}+\frac{(3-a)a^2}{2!}+\frac{(4-a)a^3}{3!}+\cdots=1e^a$$

$$\frac{(2-a)a^0}{0!}+\frac{(3-a)a^1}{1!}+\frac{(4-a)a^2}{2!}+\frac{(5-a)a^3}{3!}+\cdots=2e^a$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

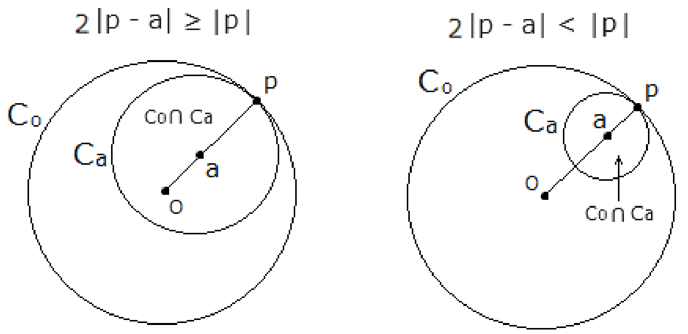
8・2 特異点が有る場合

この場合、原点 O から特異点 p までの距離 $|p|$ はマクローリン級数の収束半径となり、任意の点 a から特異点 p までの距離 $|p-a|$ はテイラー級数の収束半径となる。

マクローリン級数の収束円を C_0、テイラー級数の収束円を C_a とするとき、これらは必ず共通集合を持つ。それらには４つのケース、11 類型が考えられる。

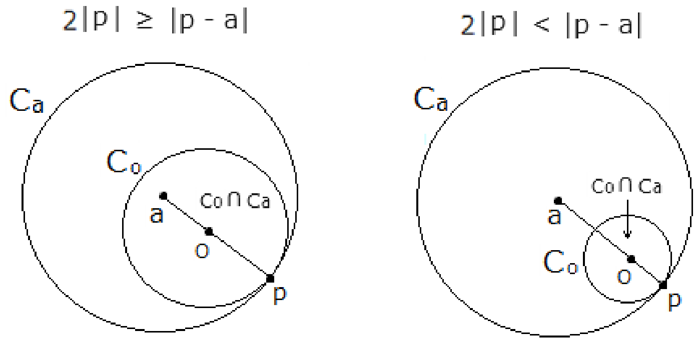
$Case$1：$C_0 \supset C_a$

これはマクローリン級数の収束円 C_0 がテイラー級数の収束円 C_a を含む場合であり、C_a の大きさによる２類型がある。



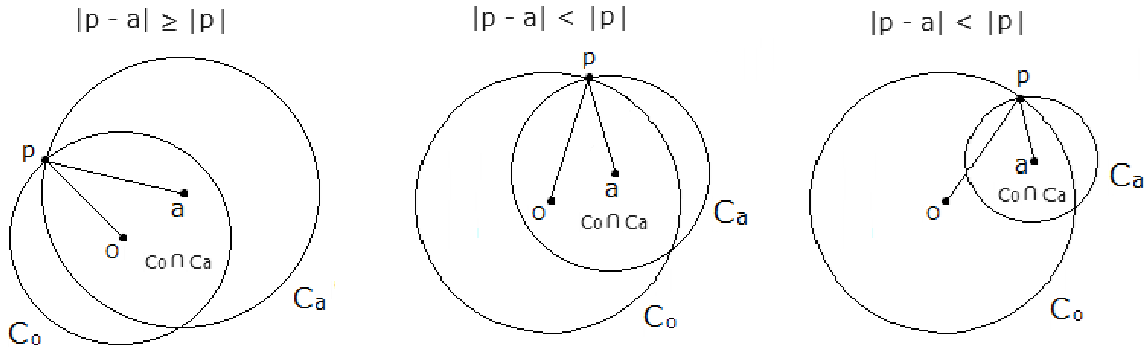
$Case$2：$C_0 \subset C_a$

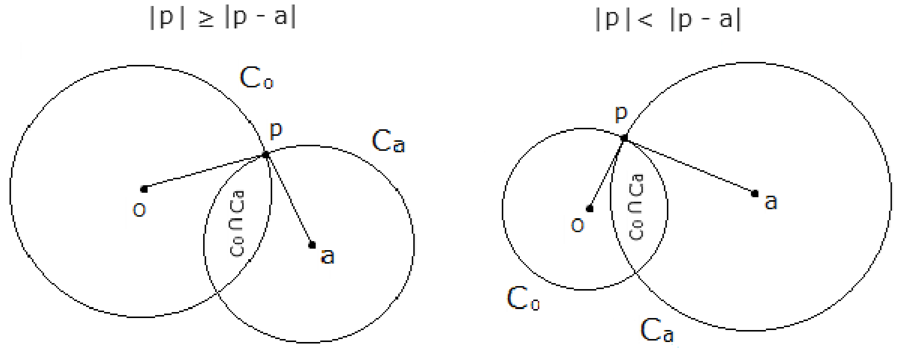
これはテイラー級数の収束円 C_a がマクローリン級数の収束円 C_0 を含む場合であり、C_0 の大きさによる２類型がある。



$Case$3：$C_0 \cap C_a \neq \phi$

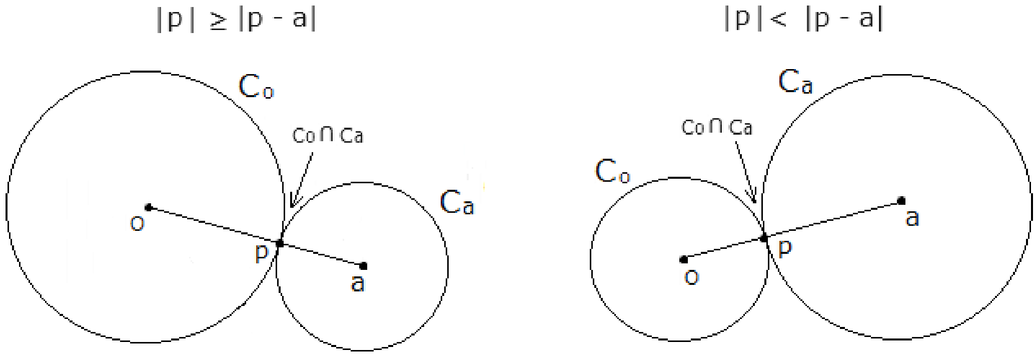
これはテイラー級数の収束円 C_a とマクローリン級数の収束円 C_0 とが部分的に重なっている場合であり、両円の大きさや a の位置によって５類型がある。





$Case\,4:\ C_0 \cap C_a = p \ \ (\approx \phi\ )$

これはテイラー級数の収束円 C_a とマクローリン級数の収束円 C_0 とが1点 p において接する場合であり、両円の大きさによる２類型がある。



一般的に両級数は特異点 p においては収束しない。よって C_a と C_0 の共通集合は空集合に近い。

以上で見たように、$Case\,1 \sim Case\,3$ ではテイラー級数の収束円 C_a とマクローリン級数の収束円 C_0 とは空でない共通集合を持つ。それ故、$Case\,1 \sim Case\,3$ において次の定理が成立する。

定理 8･2･1

関数 $f(z)$ が開領域 D 内に特異点 p を持つとき、a の周りのテイラー級数の収束円 C_a とマクローリン級数の収束円 C_0 の共通集合 $C_a \cap C_0$ の内部において次の等式が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{s-r} \frac{a^{s-r}}{(s-r)!} f^{(s)}(a) = f^{(r)}(0) \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{2.1}$$

但し、特異点 p は原点 O 及び点 a に最も近いものとする。

証明

関数 $f(z)$ は半径 $R_0 = |p|$ の円 C_0 内で次のようにマクローリン展開できる。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} z^r \qquad |z| < R_0 = |p|$$

また、関数 $f(z)$ は p 以外の任意の点 a を中心に次のようにテイラー展開できる。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (z-a)^r \qquad |z-a| < R_a = |p-a|$$

この級数の収束円 C_a は a を中心とし、半径は R_a である。

ここで

$$(z-a)^r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} {}_rC_s a^{r-s} z^s$$

を用いれば

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (z-a)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=r}^{\infty} \frac{f^{(s)}(a)}{s!} (-1)^{s-r} {}_sC_r a^{s-r} z^r$$

これは $C_a \cap C_0$ 内においてマクローリン級数に等しくなければならないから

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=r}^{\infty} \frac{f^{(s)}(a)}{s!} (-1)^{s-r} {}_sC_r a^{s-r} z^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} z^r$$

両級数はこの $C_a \cap C_0$ 内において一様収束するから、これらは同一の級数でなければならない。そうでないならば級数の一意性に矛盾するからである。よって

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{f^{(s)}(a)}{s!} (-1)^{s-r} {}_sC_r a^{s-r} = \frac{f^{(r)}(0)}{r!} \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{2.0}$$

ここで

$${}_sC_r = \frac{s!}{r!(s-r)!}$$

であるから、これを (2.0) に代入し 両辺に $r!$ を乗じて、

$$\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{s-r} \frac{a^{s-r}}{(s-r)!} f^{(s)}(a) = f^{(r)}(0) \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{2.1}$$

Q.E.D.

8·3 *Case*1: $C_0 \supset C_a$ の例

これはマクローリン級数の収束円 C_0 がテイラー級数の収束円 C_a を含む場合である。例として次の関数を考える。

$$f(z) = \tanh^{-1} z$$

この高階導関数は次式で与えられる。(「岩波 数学公式 I 」p36。)

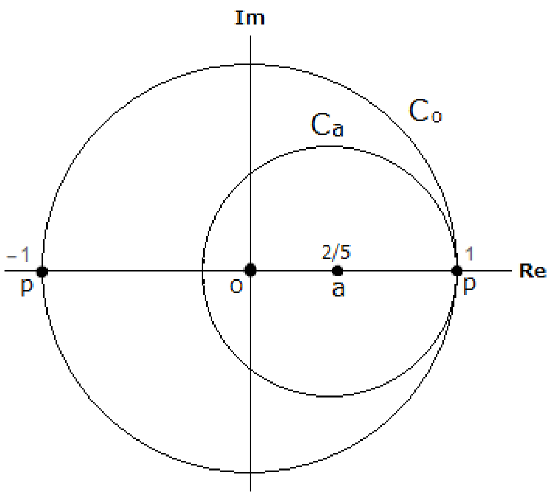
$$f^{(r)}(z) = \frac{(r-1)!}{2}\left\{\frac{1}{(1-z)^r} + \frac{(-1)^{r-1}}{(1+z)^r}\right\} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

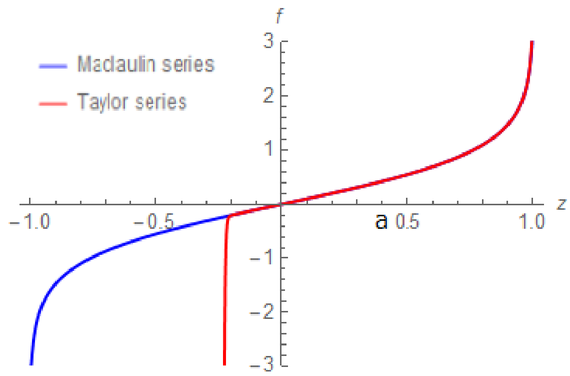
よって a の周りのテイラー級数とマクローリン級数は

$$f(z) = \tanh^{-1} a + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r-1)!}{2}\left\{\frac{1}{(1-a)^r} + \frac{(-1)^{r-1}}{(1+a)^r}\right\}\frac{(z-a)^r}{r!}$$

$$f(z) = \tanh^{-1} 0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r-1)!}{2}\left\{1+(-1)^{r-1}\right\}\frac{z^r}{r!}$$

この関数は $z=\pm 1$ に特異点 p を持つから、マクローリン級数の収束半径は $R_0=1$ であり、テイラー級数の収束半径は $R_a = |1-a|$ 。例えば、$a=2/5$ ならば $R_a = 3/5$ となる。





よって 定理 8·2·1 により、次が成立する。

$$\tanh^{-1} a + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \frac{a^s}{s!}\frac{(s-1)!}{2}\left\{\frac{1}{(1-a)^s} + \frac{(-1)^{s-1}}{(1+a)^s}\right\} = \tanh^{-1} 0 = 0$$

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}\frac{(s-1)!}{2}\left\{\frac{1}{(1-a)^s} + \frac{(-1)^{s-1}}{(1+a)^s}\right\} = \frac{(r-1)!}{2}\left\{1+(-1)^{r-1}\right\}$$

$$for \quad r=1,2,3,\cdots$$

特殊値

これらはそれぞれ次のように変形できる。

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s}\left\{\left(\frac{a}{1+a}\right)^s - (-1)^s\left(\frac{a}{1-a}\right)^s\right\} = \tanh^{-1} a$$

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(s-r)!}\left\{\left(\frac{a}{1+a}\right)^s - (-1)^s\left(\frac{a}{1-a}\right)^s\right\} = a^r (r-1)!\left\{1-(-1)^r\right\} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

更に$a=1/n$ と置けば、

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2s}\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s-(-1)^s\left(\frac{1}{n-1}\right)^s\right\}=tanh^{-1}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(s-r)!}\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s-(-1)^s\left(\frac{1}{n-1}\right)^s\right\}=\frac{1}{n^r}(r-1)!\left\{1-(-1)^r\right\}\quad r=1,2,3,\cdots$$

そしてn に 2,3,4, … を与えることにより、以下の特殊値を得る。

$r=0$ のとき、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^1}+\frac{1}{1^1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{1^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{1^3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3^4}-\frac{1}{1^4}\right)+\cdots=tanh^{-1}\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^1}+\frac{1}{2^1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{2^4}\right)+\cdots=tanh^{-1}\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5^1}+\frac{1}{3^1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{3^4}\right)+\cdots=tanh^{-1}\frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$r=1$ のとき

$$\left(\frac{1}{4^1}+\frac{1}{2^1}\right)+\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{2^4}\right)+\cdots=\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{5^1}+\frac{1}{3^1}\right)+\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{3^4}\right)+\cdots=\frac{2}{4}$$

$$\left(\frac{1}{6^1}+\frac{1}{4^1}\right)+\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{1}{4^3}\right)+\left(\frac{1}{6^4}-\frac{1}{4^4}\right)+\cdots=\frac{2}{5}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$r=2$ のとき

$$1\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{2^2}\right)+2\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^3}\right)+3\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{2^4}\right)+4\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{2^5}\right)+\cdots=0$$

$$1\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{3^2}\right)+2\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{3^3}\right)+3\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{3^4}\right)+4\left(\frac{1}{5^5}+\frac{1}{3^5}\right)+\cdots=0$$

$$1\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{4^2}\right)+2\left(\frac{1}{6^3}+\frac{1}{4^3}\right)+3\left(\frac{1}{6^4}-\frac{1}{4^4}\right)+4\left(\frac{1}{6^5}+\frac{1}{4^5}\right)+\cdots=0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$r=3$ のとき

$$1\cdot2\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^3}\right)+2\cdot3\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{2^4}\right)+3\cdot4\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{2^5}\right)+4\cdot5\left(\frac{1}{4^6}-\frac{1}{2^6}\right)+\cdots=\frac{4}{3^3}$$

$$1\cdot2\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{3^3}\right)+2\cdot3\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{3^4}\right)+3\cdot4\left(\frac{1}{5^5}+\frac{1}{3^5}\right)+4\cdot5\left(\frac{1}{5^6}-\frac{1}{3^6}\right)+\cdots=\frac{4}{4^3}$$

$$1\cdot2\left(\frac{1}{6^3}+\frac{1}{4^3}\right)+2\cdot3\left(\frac{1}{6^4}-\frac{1}{4^4}\right)+3\cdot4\left(\frac{1}{6^5}+\frac{1}{4^5}\right)+4\cdot5\left(\frac{1}{6^6}-\frac{1}{4^6}\right)+\cdots=\frac{4}{5^3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

8·4 *Case* 2: $C_0 \subset C_a$ の例

これはマクローリン級数の収束円 C_0 がテイラー級数の収束円 C_a に含まれる場合である。例として次の関数を考える。

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

この高階導関数は次式で与えられる。

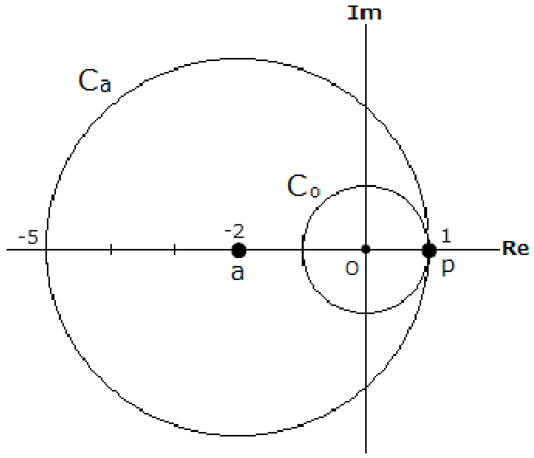
$$f^{(r)}(z) = \frac{r!}{(1-z)^{r+1}} \qquad r=1,2,3,\cdots$$

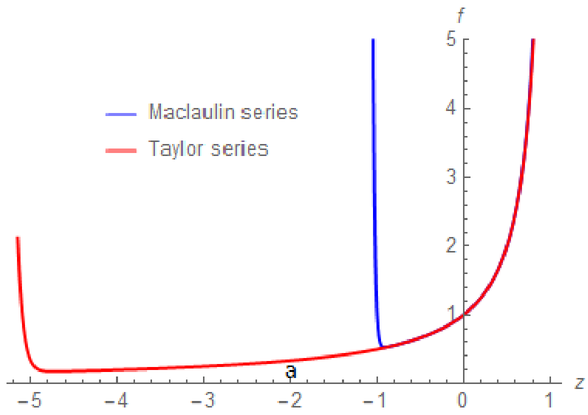
よって a の周りのテイラー級数とマクローリン級数は

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!}{(1-a)^{r+1}} \frac{(z-a)^r}{r!}$$

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} r! \frac{z^r}{r!}$$

この関数は $z=1$ に特異点 p を持つから、マクローリン級数の収束半径は $R_0=1$ であり、テイラー級数の収束半径は $R_a = |1-a|$ 。例えば、$a=-2$ ならば $R_a = 3$ となる。





よって 定理 8·2·1 により、次が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{s-r} \frac{a^{s-r}}{(s-r)!} \frac{s!}{(1-a)^{s+1}} = r! \qquad \begin{cases} Re(a) < 1/2 \\ r = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{4.1}$$

係数付等比級数

(4.1) から、次の公式が得られる。

公式 8·4·1

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{s!}{(s-r)!} \frac{1}{x^s} = r!\, x \left(\frac{1}{x-1} \right)^{r+1} \qquad \begin{cases} |x| > 1 \\ r = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

証明

(4.1) の両辺に $-a^{r+1}$ を乗じれば

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{s!}{(s-r)!}\left(\frac{a}{a-1}\right)^{s+1}=r!\,(-a)^{r+1}$$

ここで

$$\frac{a}{a-1}=\frac{1}{x}$$

と置けば

$$a=\frac{1}{1-x}\qquad\left(Re(a)<1/2\ \Rightarrow\ |x|>1\right)$$

そこで、これらを上に代入すれば

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{s!}{(s-r)!}\left(\frac{1}{x}\right)^{s+1}=r!\left(\frac{1}{x-1}\right)^{r+1}$$

両辺にxを乗じて

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{s!}{(s-r)!}\frac{1}{x^s}=r!\,x\left(\frac{1}{x-1}\right)^{r+1}\qquad\begin{cases}|x|>1\\ r=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

特殊値

$r=0$ のとき

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{x^s}=\frac{x}{x-1}\qquad |x|>1$$

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{2}{1}\qquad\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+-\cdots=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{3}{2}\qquad\frac{1}{3^0}-\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+-\cdots=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4^0}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}\qquad\frac{1}{4^0}-\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^3}+-\cdots=\frac{4}{5}$$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$r=1$ のとき

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s}{x^s}=x\left(\frac{1}{x-1}\right)^{2}\qquad |x|>1$$

$$\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots=\frac{2}{1^2}\qquad-\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-+\cdots=-\frac{2}{3^2}$$

$$\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots=\frac{3}{2^2}\qquad-\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}-\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}-+\cdots=-\frac{3}{4^2}$$

$$\frac{1}{4^1}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{4^4}+\cdots=\frac{4}{3^2}\qquad-\frac{1}{4^1}+\frac{2}{4^2}-\frac{3}{4^3}+\frac{4}{4^4}-+\cdots=-\frac{4}{5^2}$$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$r=2$ のとき

$$\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(s-1)s}{x^s} = 2x\left(\frac{1}{x-1}\right)^3 \qquad |x| > 1$$

$$\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{2\cdot 3}{2^3}+\frac{3\cdot 4}{2^4}+\frac{4\cdot 5}{2^5}+\cdots=\frac{4}{1^3} \qquad \frac{1\cdot 2}{2^2}-\frac{2\cdot 3}{2^3}+\frac{3\cdot 4}{2^4}-\frac{4\cdot 5}{2^5}+-\cdots=\frac{4}{3^3}$$

$$\frac{1\cdot 2}{3^2}+\frac{2\cdot 3}{3^3}+\frac{3\cdot 4}{3^4}+\frac{4\cdot 5}{3^5}+\cdots=\frac{6}{2^3} \qquad \frac{1\cdot 2}{3^2}-\frac{2\cdot 3}{3^3}+\frac{3\cdot 4}{3^4}-\frac{4\cdot 5}{3^5}+-\cdots=\frac{6}{4^3}$$

$$\frac{1\cdot 2}{4^2}+\frac{2\cdot 3}{4^3}+\frac{3\cdot 4}{4^4}+\frac{4\cdot 5}{4^5}+\cdots=\frac{8}{3^3} \qquad \frac{1\cdot 2}{4^2}-\frac{2\cdot 3}{4^3}+\frac{3\cdot 4}{4^4}-\frac{4\cdot 5}{4^5}+-\cdots=\frac{8}{5^3}$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

8·5 *Case*3: $C_0 \cap C_a \neq \phi$ の例

これはマクローリン級数の収束円 C_0 とテイラー級数の収束円 C_a とが部分的に重なっている場合である。例として次の関数を考える。

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

この高階導関数は次式で与えられる。(「岩波 数学公式 I] p32。)

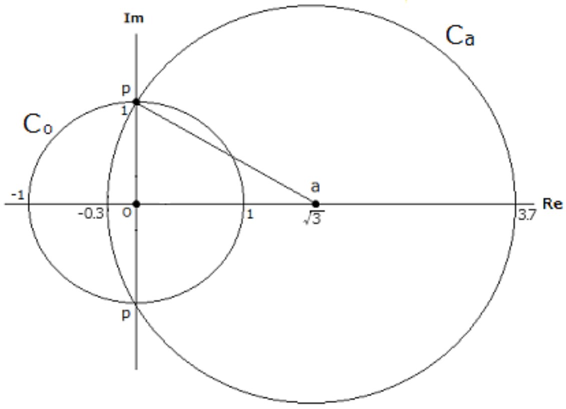
$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{\left(1+z^2\right)^{(n+1)/2}} \sin\left\{(n+1)\cot^{-1} z\right\} \qquad Re(z) \geq 0$$

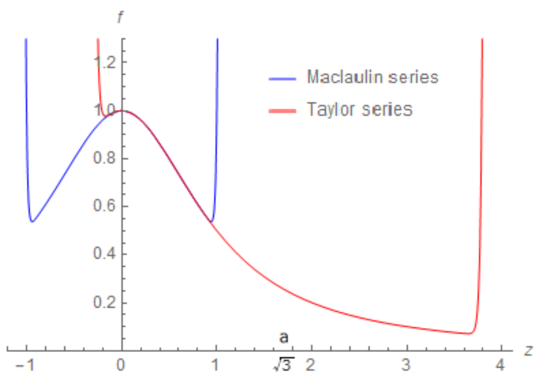
よって a の周りのテイラー級数とマクローリン級数は

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{r!}{\left(1+a^2\right)^{(r+1)/2}} \sin\left\{(r+1)\cot^{-1} a\right\} \frac{(z-a)^r}{r!}$$

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r r! \sin\left\{\frac{(r+1)\pi}{2}\right\} \frac{z^r}{r!}$$

この関数は $z=\pm i$ に特異点 p を持つから、マクローリン級数の収束半径は $R_0=1$ であり、テイラー級数の収束半径は $R_a = |i-a|$ 。例えば、$a=\sqrt{3}$ ならば、$R_a = 2$ となる。





よって 定理 8·2·1 により、次が成立する。

$$\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{s-r} \frac{a^{s-r}}{(s-r)!} (-1)^s \frac{s!}{\left(1+a^2\right)^{(s+1)/2}} \sin\left\{(s+1)\cot^{-1} a\right\}$$

$$= (-1)^r r! \sin\left\{\frac{(r+1)\pi}{2}\right\}$$

両辺を $(-1)^r$ で除して

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{a^{s-r}}{(s-r)!} \frac{s!}{\left(1+a^2\right)^{(s+1)/2}} \sin\left\{(s+1)\cot^{-1} a\right\} = r! \sin\left\{\frac{(r+1)\pi}{2}\right\} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

1/2 のベキの色々な級数

1. $r=0$ のとき、

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a^s}{\left(1+a^2\right)^{(s+1)/2}}\sin\left\{(s+1)\cot^{-1}a\right\}=1$$

(1) $a=1$ と置けば $\cot^{-1}a=\pi/4$。よって

$$\frac{1}{2^{1/2}}\sin\frac{1\pi}{4}+\frac{1}{2^{2/2}}\sin\frac{2\pi}{4}+\frac{1}{2^{3/2}}\sin\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2^{4/2}}\sin\frac{4\pi}{4}+\cdots=1$$

$\sin(n\pi/4)=1/\sqrt{2},1,1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2},-1,-1/\sqrt{2},0,\cdots\ (n=1,2,3,\cdots)$ であるから

$$\frac{1}{2^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2^{2/2}}\cdot 1+\frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2^{4/2}}\cdot 0\ ----++++\cdots=1$$

i.e.

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+++---\cdots=1$$

(2) $a=1/\sqrt{3}$ と置けば $\cot^{-1}a=\pi/3$。よって

$$\frac{3^{1/2}}{4^{1/2}3^{0/2}}\sin\frac{1\pi}{3}+\frac{3^{2/2}}{4^{2/2}3^{1/2}}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{3^{3/2}}{4^{3/2}3^{2/2}}\sin\frac{3\pi}{3}+\frac{3^{4/2}}{4^{4/2}3^{3/2}}\sin\frac{3\pi}{3}+\cdots=1$$

$\sin(n\pi/3)=\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2,0,-\sqrt{3}/2,-\sqrt{3}/2,0,\cdots\ (n=1,2,3,\cdots)$ であるから

$$\frac{3^{1/2}}{2^1}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3^{1/2}}{2^2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3^{1/2}}{2^3}\cdot 0-\frac{3^{1/2}}{2^4}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3^{1/2}}{2^5}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3^{1/2}}{2^6}\cdot 0\ +++---\cdots=1$$

i.e.

$$\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{3}{2^5}-\frac{3}{2^6}+\frac{3}{2^8}+\frac{3}{2^9}-\frac{3}{2^{11}}-\frac{3}{2^{12}}++--\cdots=1$$

これより

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{10}}++--\cdots=\frac{4}{3}$$

(3) $a=\sqrt{3}$ と置けば $\cot^{-1}a=\pi/6$。よって (2) と類似の計算により、

$$\frac{3^0}{2^2}+\frac{3^1}{2^3}+\frac{3^1}{2^3}+\frac{3^2}{2^5}+\frac{3^2}{2^6}+0-\frac{3^3}{2^8}-\frac{3^4}{2^9}-\frac{3^4}{2^9}-\frac{3^5}{2^{11}}-\frac{3^5}{2^{12}}-0\ ++++++------\cdots=1$$

これより

$$\frac{3^0}{2^0}+\frac{3^1}{2^1}+\frac{3^1}{2^1}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{3^2}{2^4}-\frac{3^3}{2^6}-\frac{3^4}{2^7}-\frac{3^4}{2^7}-\frac{3^5}{2^9}-\frac{3^5}{2^{10}}+++++-----\cdots=4$$

2. $r=1$ のとき、

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s\,a^{s-1}}{\left(1+a^2\right)^{(s+1)/2}}\sin\left\{(s+1)\cot^{-1}a\right\}=0$$

(1) $a=1$ と置けば $\cot^{-1}a=\pi/4$。よって 1. (1) と類似の計算により、

$$\frac{0}{2^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}-\frac{4}{2^3}-\frac{5}{2^3}-\frac{6}{2^4}+++---\cdots=0$$

(2) $a=1/\sqrt{3}$ と置けば $\cot^{-1}a=\pi/3$。よって 1.(2) と類似の計算により、

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^4}-\frac{4}{2^5}+\frac{6}{2^7}+\frac{7}{2^8}--++\cdots\right)=0$$

これより

$$\frac{0}{2^0}+\frac{1}{2^1}-\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\frac{6}{2^6}+\frac{7}{2^7}-\frac{9}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}++--\cdots=0$$

(3) $a=\sqrt{3}$ と置けば $\cot^{-1}a=\pi/6$。よって 1.(3) と類似の計算により、

$$\sqrt{3}\left(\frac{1\cdot3^0}{2^3}+\frac{2\cdot3^0}{2^3}+\frac{3\cdot3^1}{2^5}+\frac{4\cdot3^1}{2^6}-\frac{6\cdot3^2}{2^8}-\frac{7\cdot3^3}{2^9}-\frac{8\cdot3^3}{2^9}-\frac{9\cdot3^4}{2^{11}}-\frac{10\cdot3^4}{2^{12}}+++++------\cdots\right)=0$$

これより

$$\frac{0\cdot3^{-1}}{2^2}+\frac{1\cdot3^0}{2^3}+\frac{2\cdot3^0}{2^3}+\frac{3\cdot3^1}{2^5}+\frac{4\cdot3^1}{2^6}-\frac{6\cdot3^2}{2^8}-\frac{7\cdot3^3}{2^9}-\frac{8\cdot3^3}{2^9}-\frac{9\cdot3^4}{2^{11}}-\frac{10\cdot3^4}{2^{12}}+++++------\cdots=0$$

これ以上は余りに煩雑で面白くない。

8・6 スチルチェス定数の和

本節ではスチルチェス定数の和の公式を証明する。この公式は 2008年までに ***O. Marichev*** によって発見されたようである。(https://mathworld.wolfram.com/StieltjesConstants.html).
Dr. Marichev がどのようにしてこれを証明されたかを筆者は知らないが、本節におけるその証明は 定理 8・1・1 の絶好の適用例である。

公式 8・6・1 (O. Marichev)

γ_s をスチルチェス定数とし、$\zeta^{(n)}(0)$ をリーマン・ゼータ関数の n 階微分係数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+n}}{s!}=(-1)^n\left\{n!+\zeta^{(n)}(0)\right\}\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{g.n}$$

証明

関数 $f(z)=(z-1)\zeta(z)$ は次のようにテイラー展開されることが知られている。

$$(z-1)\zeta(z)=1+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{s\gamma_{s-1}}{s!}(z-1)^s \qquad \gamma_s : \textit{Stieltjes constant}$$

従って

$$f^{(s)}(1)=\begin{cases}1 & s=0\\ (-1)^{s-1}s\gamma_{s-1} & s=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{6.1}$$

次に、$f(z)$ をマクローリン展開すると

$$(z-1)\zeta(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}z^r$$

$f(z)$ は2関数の積であるから、その高階導関数は次なるライプニッツ則で与えられる。

$$\{g(z)h(z)\}^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}g^{(n-r)}(z)h^{(r)}(z)$$

ここで $g(z)=z-1$, $h(z)=\zeta(z)$ と置けば、

$$g^{(0)}(z)=z-1\ ,\ g^{(1)}(z)=1\ ,\ g^{(s)}(z)=0\quad (s=2,3,4,\cdots)$$

であるから、これらを上式に代入すれば、

$$f^{(n)}(z)=\{(z-1)\zeta(z)\}^{(n)}=\binom{n}{n-1}1\cdot\zeta^{(n-1)}(z)+\binom{n}{n}(z-1)\zeta^{(n)}(z)$$

i.e.

$$f^{(n)}(z)=\{(z-1)\zeta(z)\}^{(n)}=n\zeta^{(n-1)}(z)+(z-1)\zeta^{(n)}(z)$$

$z=0$ における微分係数は

$$f^{(r)}(0)=r\zeta^{(r-1)}(0)-\zeta^{(r)}(0)\qquad r=0,1,2,\cdots \tag{6.0}$$

さて、関数 $f(z)=(z-1)\zeta(z)$ は全複素平面上で正則である。従って 定理 8・1・1 が成立し、(6.1) と (6.0) との間には次なる関係が存在する。

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{a^{s-r}}{(s-r)!}f^{(s)}(a)=f^{(r)}(0)\qquad \textit{for}\ \ r=0,1,2,\cdots \tag{1.1}$$

そこで、(6.1) と (6.0) をこの両辺に順次（$r=0,1,2,\cdots$）代入すると次のようになる。

$r=0$

左辺: $\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{f^{(s)}(1)}{s!}=1+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{(-1)^{s-1}s\gamma_{s-1}}{s!}=1-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}$

右辺: $f^{(0)}(0)=0-\zeta^{(0)}(0)$

これらより

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}=0!+\zeta^{(0)}(0) \tag{g.0}$$

$r>0$

$$\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^{s-r}\frac{1^{s-r}}{(s-r)!}(-1)^{s-1}s\gamma_{s-1}=r\zeta^{(r-1)}(0)-\zeta^{(r)}(0)\qquad for\ \ r=1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{s\gamma_{s-1}}{(s-r)!}=(-1)^r\left\{\zeta^{(r)}(0)-r\zeta^{(r-1)}(0)\right\}\qquad for\ \ r=1,2,3,\cdots$$

左辺は次のようになる。

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{s\gamma_{s-1}}{(s-r)!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+r)\gamma_{s+r-1}}{s!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{s\gamma_{s+r-1}}{s!}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{r\gamma_{s+r-1}}{s!}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+r}}{s!}+r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+r-1}}{s!}$$

よって

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+r}}{s!}+r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+r-1}}{s!}=(-1)^r\left\{\zeta^{(r)}(0)-r\zeta^{(r-1)}(0)\right\}\qquad for\ \ r=1,2,3,\cdots \tag{6.r}$$

$r=1$ のとき、(6.r) は

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}+1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}=(-1)^1\left\{\zeta^{(1)}(0)-1\zeta^{(0)}(0)\right\}$$

(g.0) より $\zeta^{(0)}(0)$ を求めこれを右辺に代入すると

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}+1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}=(-1)^1\left\{\zeta^{(1)}(0)-\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s!}-1\right)\right\}$$

i.e.

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}=(-1)^1\left\{1!+\zeta^{(1)}(0)\right\} \tag{g.1}$$

$r=2$ のとき、(6.r) は

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+2}}{s!}+2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}=(-1)^2\left\{\zeta^{(2)}(0)-2\zeta^{(1)}(0)\right\}$$

(g.1) より $\zeta^{(1)}(0)$ を求めこれを右辺に代入すると

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+2}}{s!}+2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}=(-1)^2\left\{\zeta^{(2)}(0)-2\left(-1!-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s!}\right)\right\}$$

i.e.

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+2}}{s\,!} = (-1)^2\left\{2\,! + \zeta^{(2)}(0)\right\} \tag{g.2}$$

r=3 のとき、(6.r) は

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+3}}{s\,!} + 3\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+2}}{s\,!} = (-1)^3\left\{\zeta^{(3)}(0) - 3\zeta^{(2)}(0)\right\}$$

(g.2) より $\zeta^{(2)}(0)$ を求めこれを右辺に代入すると

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+3}}{s\,!} + 3\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+2}}{s\,!} = (-1)^3\left\{\zeta^{(3)}(0) - 3\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+2}}{s\,!} - 2\,!\right)\right\}$$

i.e.

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+3}}{s\,!} = (-1)^3\left\{3\,! + \zeta^{(3)}(0)\right\} \tag{g.3}$$

以下帰納法により、所望の式を得る。

特殊値

リーマン・ゼータ関数について次の特殊値が知られている。

$$\zeta^{(0)}(0) = -\frac{1}{2}\ \ (=\zeta(0))\quad ,\quad \zeta^{(1)}(0) = -\frac{\log 2\pi}{2}\ \ (\textit{Glaisher-Kinkelin constant})$$

従って

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{s\,!} = (-1)^0\left\{0! + \zeta^{(0)}(0)\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+1}}{s\,!} = (-1)^1\left\{1! + \zeta^{(1)}(0)\right\} = \frac{\log 2\pi}{2} - 1 = -0.0810614667\cdots$$

2013.03.26
2013.12.18 リニューアル
2017.08.05 第6節 追加
2024.06.05 リニューアル

河野 和
広島市

宇宙人の数学