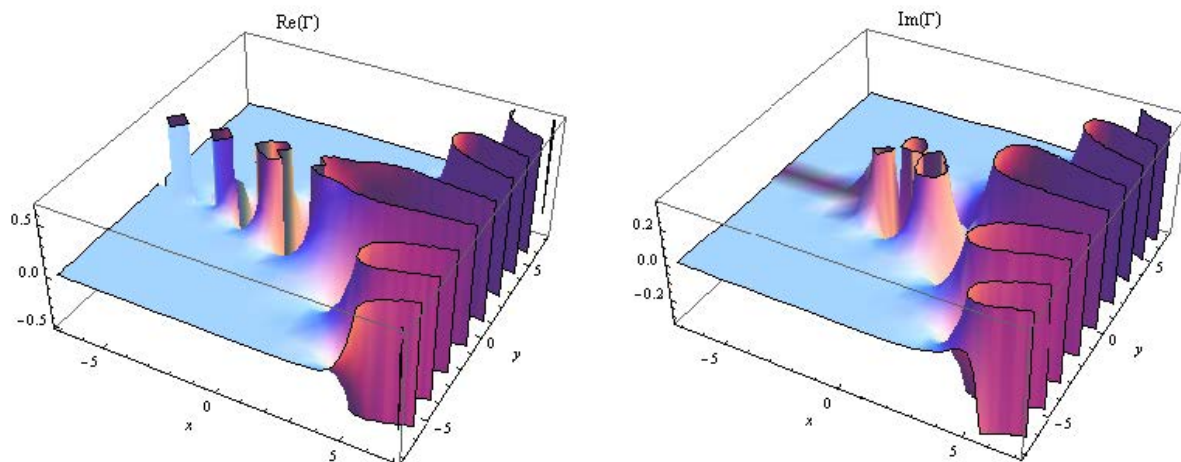
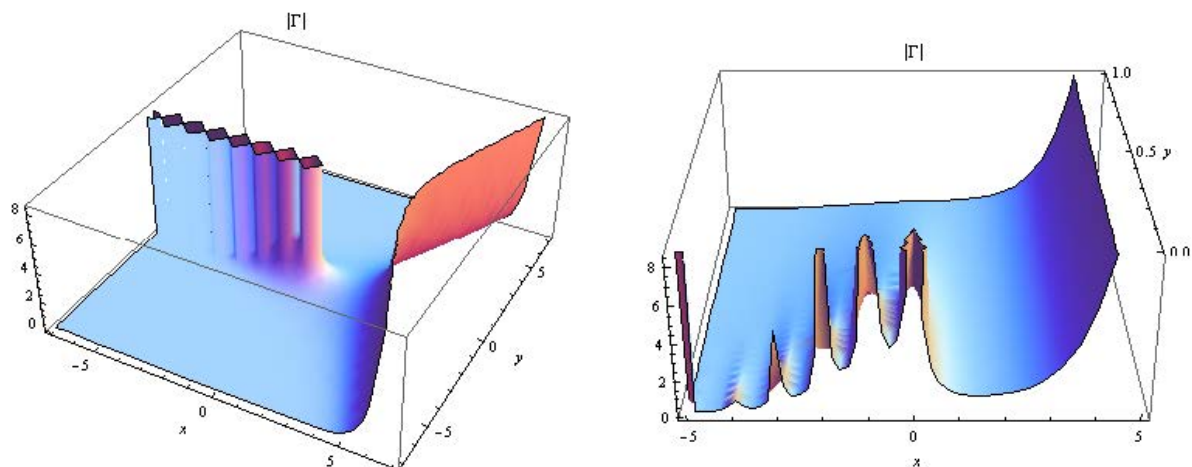


9 ガンマ関数の絶対値

複素平面上のガンマ関数は、次図に示すように、その実数部も虚数部も非常に複雑な形をしている。



ところがその絶対値に着目すれば、それは特に正の半平面においてより単純な形であるように見える。本章では、このことの真偽を解析的に検証する。



9・1 いくつかの無限乗積

公式9・1・1

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)} \quad (1.1)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r-x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)} \quad (1.2)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1+x-y)} \quad (1.3)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r-x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma^2(1-x)}{\Gamma(1-x+y)\Gamma(1-x-y)} \quad (1.4)$$

証明

「岩波数学公式Ⅱ」p86 によれば

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r\pi - x} \right) \left(1 - \frac{y}{r\pi + x} \right) = \frac{\sin(x-y)}{\sin x} / \left(1 - \frac{y}{x} \right)$$

x, y をそれぞれ $\pi x, \pi y$ に置換すれば

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r - x} \right) \left(1 - \frac{y}{r + x} \right) = \frac{\sin(\pi x - \pi y)}{\sin \pi x} / \left(1 - \frac{y}{x} \right)$$

y を $-y$ に置換して

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r + x} \right) \left(1 - \frac{y}{r - x} \right) = \frac{\sin(\pi x + \pi y)}{\sin \pi x} / \left(1 + \frac{y}{x} \right)$$

両式を掛け合わせると

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r + x} \right) \left(1 - \frac{y}{r - x} \right) \right\} \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r - x} \right) \left(1 - \frac{y}{r + x} \right) \right\} \\ &= \frac{\sin(\pi x - \pi y) \sin(\pi x + \pi y)}{\sin^2 \pi x} / \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.0)$$

ここで

$$\sin(\pi x + \pi y) = \frac{\pi(x+y)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)}$$

$$\sin(\pi x - \pi y) = \frac{\pi(x-y)}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)}, \quad \sin \pi x = \frac{\pi x}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$$

これらより

$$\frac{\sin(\pi x + \pi y) \sin(\pi x - \pi y)}{\sin^2 \pi x} = \frac{\frac{x+y}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)}}{\frac{x}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}} \cdot \frac{\frac{x-y}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)}}{\frac{x}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi x + \pi y) \sin(\pi x - \pi y)}{\sin^2 \pi x} &= \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)} \cdot \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \end{aligned}$$

これを (1.0) に代入して

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r + x} \right) \left(1 - \frac{y}{r - x} \right) \right\} \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r - x} \right) \left(1 - \frac{y}{r + x} \right) \right\} \\ &= \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)} \cdot \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)} \end{aligned} \quad (1.0')$$

これより

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r + x} \right) \left(1 - \frac{y}{r - x} \right) = \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x+y)\Gamma(1-x-y)} \quad (1.1)$$

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r - x} \right) \left(1 - \frac{y}{r + x} \right) = \frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x-y)\Gamma(1-x+y)} \quad (1.2)$$

次に(1.0')を次のように組み替える。

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) \right\} \left\{ \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r-x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) \right\} \\
 &= \frac{\Gamma(1+x) \Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x+y) \Gamma(1+x-y)} \cdot \frac{\Gamma(1-x) \Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x+y) \Gamma(1-x-y)} \\
 &= \frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(1+x+y) \Gamma(1+x-y)} \cdot \frac{\Gamma^2(1-x)}{\Gamma(1-x+y) \Gamma(1-x-y)} \quad (1.0'')
 \end{aligned}$$

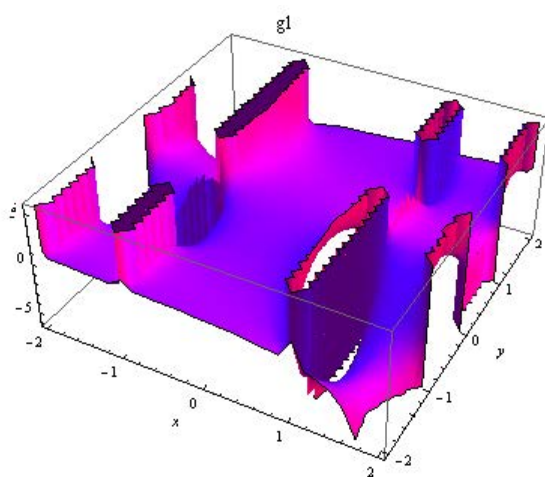
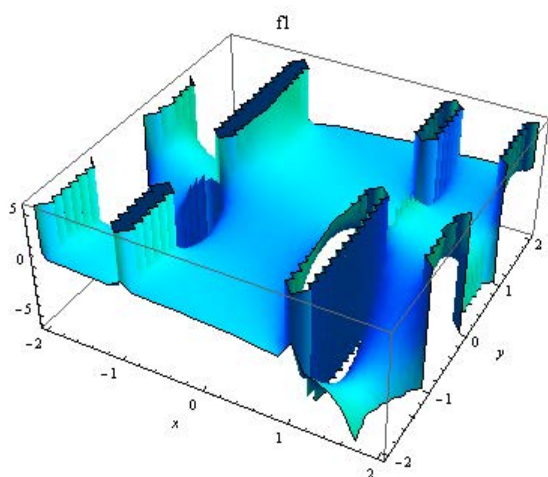
これより

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(1+x+y) \Gamma(1+x-y)} \quad (1.3)$$

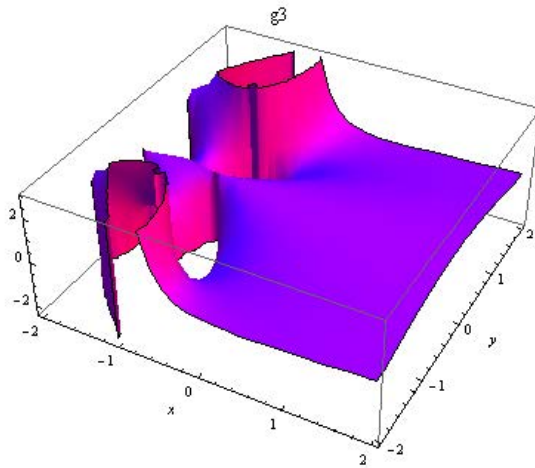
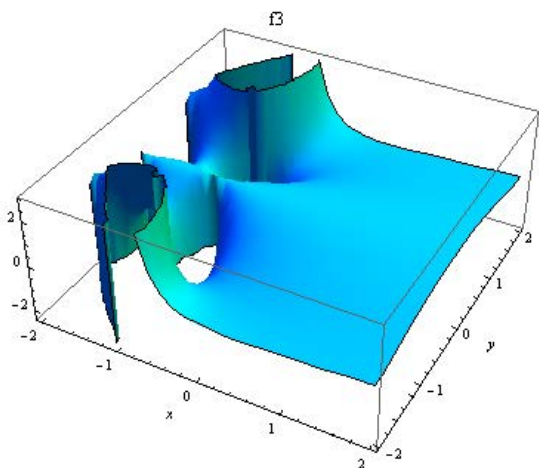
$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r-x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma^2(1-x)}{\Gamma(1-x+y) \Gamma(1-x-y)} \quad (1.4)$$

例1 $\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma(1+x) \Gamma(1-x)}{\Gamma(1+x+y) \Gamma(1-x-y)}$

左辺をシアンで右辺をマゼンタで図示すると次のとおり。(以下同じ。)



例2 $\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma^2(1+x)}{\Gamma(1+x+y) \Gamma(1+x-y)}$



公式9・1・1'

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(-x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(-x-y)} \quad (1.1')$$

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r-x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(-x)}{\Gamma(x-y)\Gamma(-x+y)} \quad (1.2')$$

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)} \quad (1.3')$$

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r-x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma^2(-x)}{\Gamma(-x+y)\Gamma(-x-y)} \quad (1.4')$$

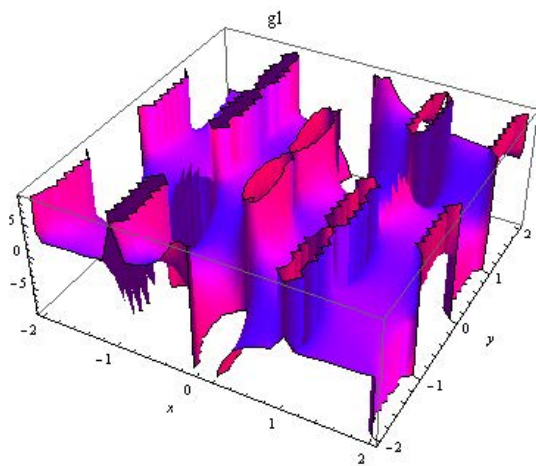
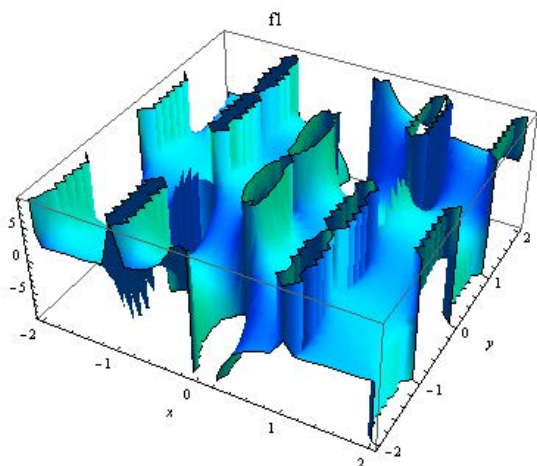
証明

(1.1) の両辺に $(1+y/x)^2$ を乗ずることにより (1.1') を得る。

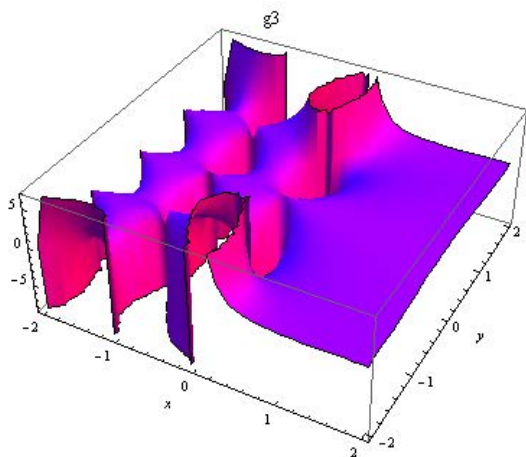
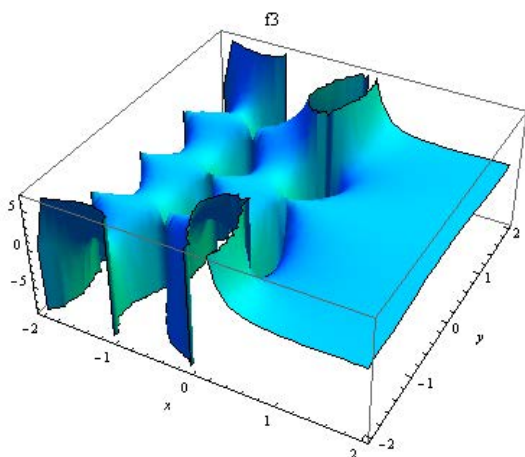
(1.2) の両辺に $(1-y/x)^2$ を乗ずることにより (1.2') を得る。

(1.3), (1.4) の両辺に $1-y^2/x^2$ を乗ずることにより (1.3'), (1.4') を得る。

$$\text{例1'} \quad \prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r-x} \right) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(-x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(-x-y)}$$



$$\text{例2'} \quad \prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}$$



9・2 絶対値の2乗

公式9・2・1

x, y を実数とし $\Gamma(x+iy)$ を複素平面 C におけるガンマ関数とすると、

$$|\Gamma(x+iy)|^2 = \Gamma^2(x) \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (1.1)$$

i.e.

$$|\Gamma(x+iy)| = |\Gamma(x)| \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1/2} \quad (1.1')$$

証明

公式9・1・1' (1.3') は次のようであった。

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{r+x} \right) \left(1 - \frac{y}{r+x} \right) = \frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}$$

y を iy に置換すれば

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{y^2}{(r+x)^2} \right\} = \frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(x+iy)\Gamma(x-iy)}$$

ここで $z=x+iy, \bar{z}=x-iy$ と置けば、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は複素共役性 $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$ を持つことが知られているから

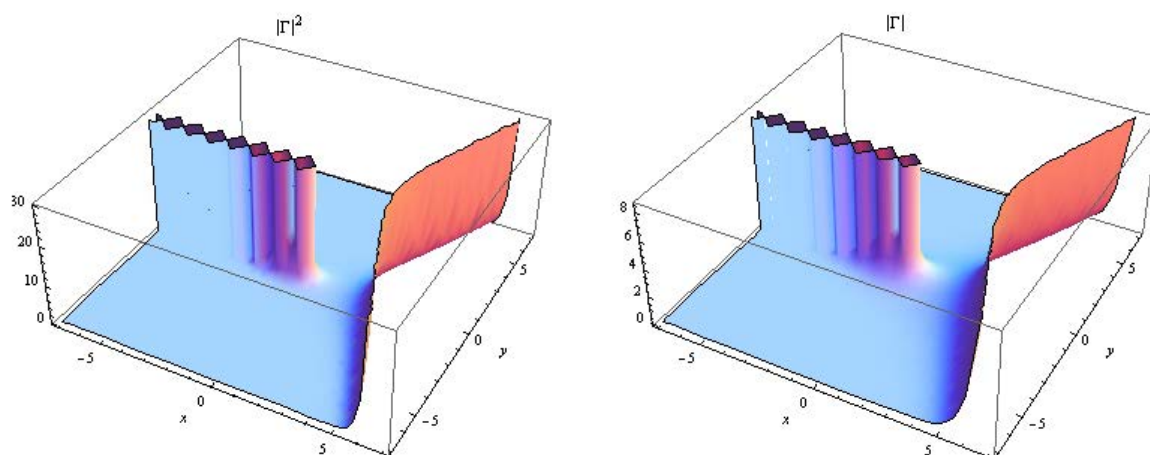
$$\Gamma(x+iy)\Gamma(x-iy) = \Gamma(z)\Gamma(\bar{z}) = \Gamma(z)\overline{\Gamma(z)} = |\Gamma(z)|^2 = |\Gamma(x+iy)|^2$$

よって

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{y^2}{(r+x)^2} \right\} = \frac{\Gamma^2(x)}{|\Gamma(x+iy)|^2}$$

これより (1.1) を得る。そしてこれの平方根を取って (1.1') を得る。

(1.1), (1.1') を図示すると次のとおり。右図は 前頁の $|\Gamma|$ の図 と同じであることが分かる。



両図は縦軸の尺度が異なるのみで、本質的に同じものである。それ故、以下の節では専ら $|\Gamma|^2$ について論ずる。

Note 1

公式9・2・1 から、 $\Gamma(z)$ の絶対値が0になり得ないこと、従って $\Gamma(z)$ が零点を持たないことが直ちに解る。

Note 2

公式9・2・1 は既出である。(Abramowitz & Stegun: Handbook of Mathematical Functions p256.)

9・3 虚軸に関する偏導関数

公式9・3・1

$\Gamma(z)$ ($z=x+iy$) を複素平面 C におけるガンマ関数とすると、

$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial y} = -2\Gamma^2(x) \left[\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \right] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y}{(s+x)^2 + y^2}$$

計算

公式9・2・1 は次のようであった。

$$|\Gamma(z)|^2 = \Gamma^2(x) \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

これを y で偏微分すると

$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial y} = \Gamma^2(x) \frac{\partial}{\partial y} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

右辺は、 $\left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = f_r$ と置くと

$$\frac{\partial}{\partial y} \prod_{r=0}^{\infty} f_r = f_0^{(1)} f_1 f_2 f_3 \cdots + f_0 f_1^{(1)} f_2 f_3 \cdots + f_0 f_1 f_2^{(1)} f_3 \cdots + \cdots$$

であるが、

$$f_r^{(1)} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = - \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-2} \cdot \frac{2y}{(r+x)^2} = - \frac{2y}{(r+x)^2} f_r^2$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \prod_{r=0}^{\infty} f_r &= - \frac{2y}{(0+x)^2} f_0^2 f_1 f_2 f_3 \cdots - \frac{2y}{(1+x)^2} f_0 f_1^2 f_2 f_3 \cdots - \frac{2y}{(2+x)^2} f_0 f_1 f_2^2 f_3 \cdots - \cdots \\ &= - \frac{2y f_0}{(0+x)^2} f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots - \frac{2y f_1}{(1+x)^2} f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots - \frac{2y f_2}{(2+x)^2} f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots + \cdots \\ &= - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2y f_s}{(s+x)^2} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} f_r \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial y} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2y}{(s+x)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{s+x} \right)^2 \right\}^{-1} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

ここで

$$\frac{y}{(s+x)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{s+x} \right)^2 \right\}^{-1} = \frac{y}{(s+x)^2 + y^2}$$

であるから

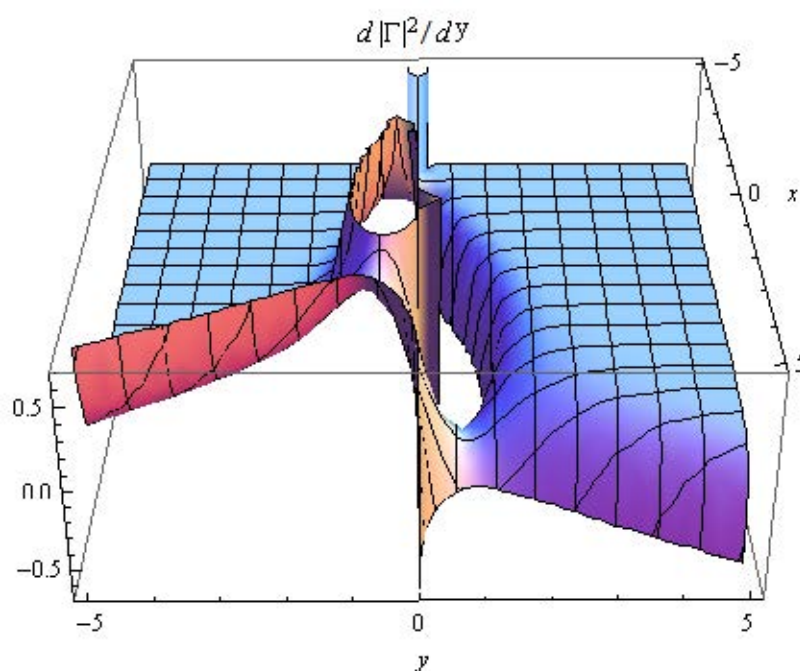
$$\frac{\partial}{\partial y} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = -2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y}{(s+x)^2 + y^2} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

かくして

$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial y} = -2\Gamma^2(x) \left[\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \right] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{y}{(s+x)^2 + y^2}$$

Q. E. D

公式9・3・1を図示すると次のとおりである。



yに関する偏導関数の符号

この図を見ると、 $|\Gamma(z)|^2$ の y に関する偏導関数は $y > 0$ のとき負で $y < 0$ のとき正のように見える。実際そうである。以下、このことを解析的に証明する。

x, y は実数であるから、 $r, s = 0, 1, 2, \dots$ について

$$\Gamma^2(x) > 0, \quad \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} > 0, \quad \frac{1}{(s+x)^2} > 0$$

よってこの偏導関数の符号は y の符号のみに依存する。即ち、

$$y > 0 \text{ のとき、 } \frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial y} < 0$$

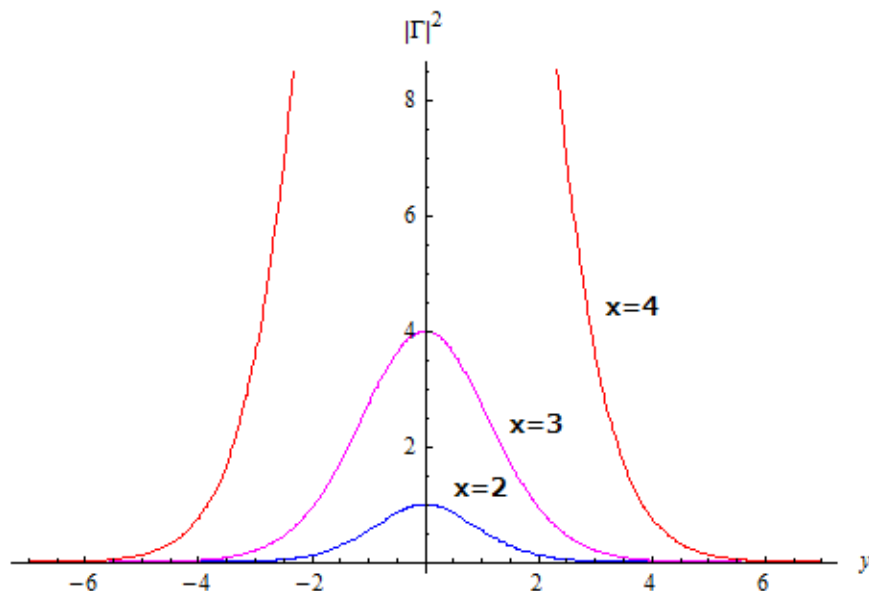
$$y < 0 \text{ のとき、 } \frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial y} > 0$$

かくて次が成り立つ。

定理9・3・2

$\Gamma(z)$ ($z=x+iy$) を複素平面 C におけるガンマ関数とすると、
 x の如何に関わらず、 $y>0$ ならば $|\Gamma(z)|^2$ は y に関して単調減少であり、
 $y<0$ ならば $|\Gamma(z)|^2$ は y に関して単調増加である。

例えば、 $|\Gamma(z)|^2$ の $x=2, 3, 4$ での切断図は次のようになる。



9・4 実軸に関する偏導関数

Lemma 9.4.1

x, y を実数、 $\psi(x)$ をディガンマ関数とし、2変数実関数 $h(x, y)$ を次のように定義する。

$$h(x, y) = \psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \quad (1.1)$$

この関数について次が成立する。

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} > 0 \quad \text{for } y > 0, x \geq 0$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} < 0 \quad \text{for } y < 0, x \geq 0$$

証明

$h(x, y)$ を y で偏微分すると次のとおり。

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{(s+x)y} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \right\}$$

$x \geq 0, y > 0$ のとき、 $s = 1, 2, 3, \dots$ について

$$\frac{2}{(s+x)y} > 0$$

$$\frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} > 0, \quad 1 - \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} > 0$$

故に

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} > 0 \quad \text{for } y > 0, x \geq 0$$

そしてこの偏導関数は y に関して奇関数、即ち

$$\frac{\partial h(x, -y)}{\partial y} = - \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}$$

であるから、

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} < 0 \quad \text{for } y < 0, x \geq 0$$

公式9・4・2

$\Gamma(z)$ ($z = x + iy$) を複素平面 C におけるガンマ関数とし $\psi(x)$ をディガンマ関数するとき、

$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial x} = 2\Gamma^2(x) \left[\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \right] \cdot \left[\psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \right]$$

計算

公式9・2・1 は次のようであった。

$$|\Gamma(z)|^2 = \Gamma^2(x) \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

これを x で偏微分すると

$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial x} = \{\Gamma^2(x)\}^{(1)} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} + \Gamma^2(x) \frac{\partial}{\partial x} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

右辺第1項は、 $\psi(x)$ をディ・ガンマ関数とすると

$$\{\Gamma^2(x)\}^{(1)} = 2\Gamma(x) \cdot \Gamma^{(1)}(x) = 2\Gamma(x) \cdot \Gamma(x) \psi(x) = 2\Gamma^2(x) \psi(x)$$

これを用いて

$$\{\Gamma^2(x)\}^{(1)} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = 2\Gamma^2(x) \psi(x) \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

右辺第2項は、 $\left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = f_r$ と置くと

$$\frac{\partial}{\partial x} \prod_{r=0}^{\infty} f_r = f_0^{(1)} f_1 f_2 f_3 \cdots + f_0 f_1^{(1)} f_2 f_3 \cdots + f_0 f_1 f_2^{(1)} f_3 \cdots + \cdots$$

であるが、

$$f_r^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = \frac{2y^2}{(r+x)^3} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-2} = \frac{2y^2}{(r+x)^3} f_r^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \prod_{r=0}^{\infty} f_r &= \frac{2y^2}{(0+x)^3} f_0^2 f_1 f_2 f_3 \cdots + \frac{2y^2}{(1+x)^3} f_0 f_1^2 f_2 f_3 \cdots + \frac{2y^2}{(2+x)^3} f_0 f_1 f_2^2 f_3 \cdots + \cdots \\ &= \frac{2y^2 f_0}{(0+x)^3} f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots + \frac{2y^2 f_1}{(1+x)^3} f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots + \frac{2y^2 f_2}{(2+x)^3} f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots + \cdots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2y^2 f_s}{(s+x)^3} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} f_r \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2y^2}{(s+x)^3} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{s+x} \right)^2 \right\}^{-1} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

ここで

$$\frac{y^2}{(s+x)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{s+x} \right)^2 \right\}^{-1} = \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2}$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x} \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

これらを上式に代入すると

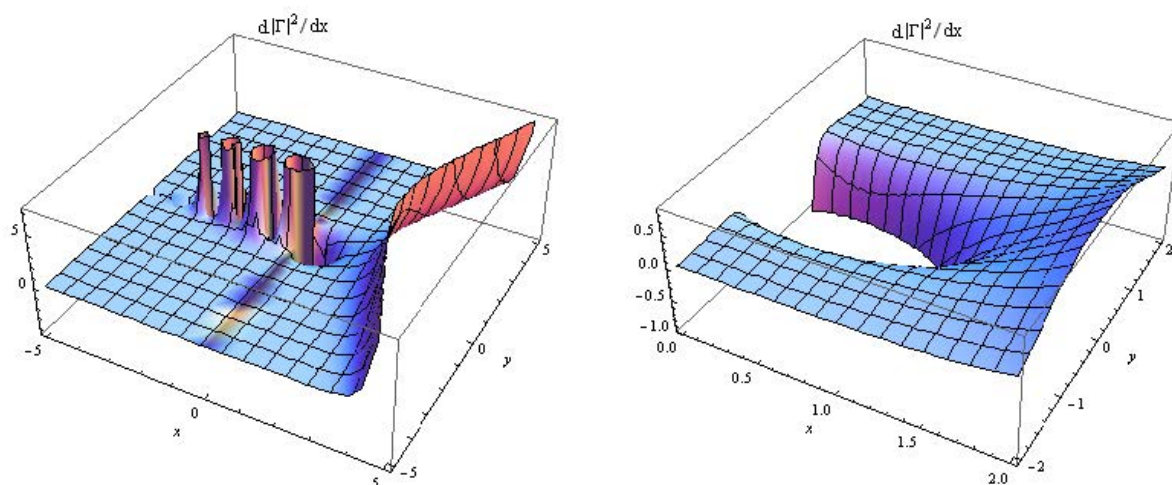
$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial x} = 2\Gamma^2(x) \psi(x) \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \\ + 2\Gamma^2(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \cdot \prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1}$$

i.e.

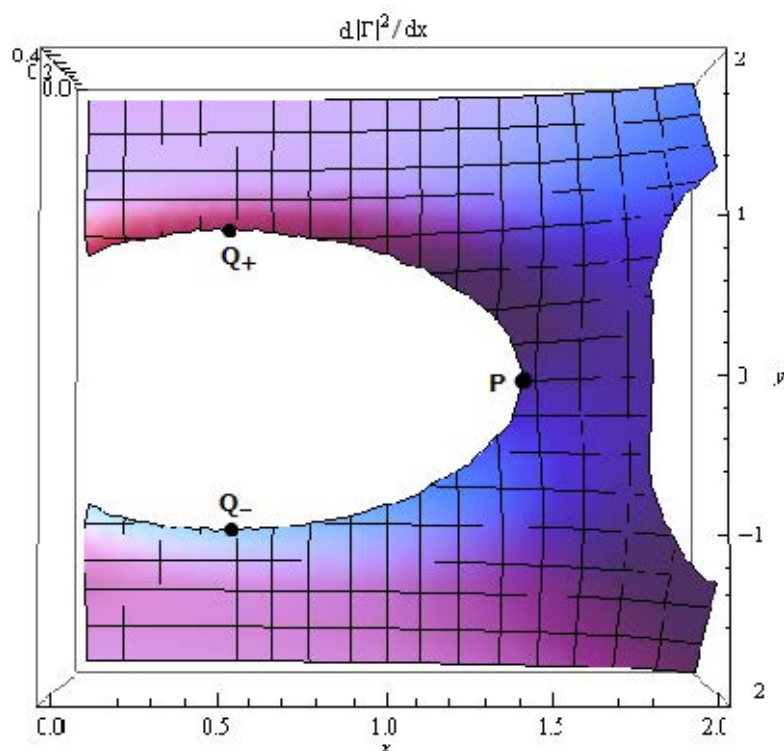
$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial x} = 2\Gamma^2(x) \left[\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \right] \cdot \left[\psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \right]$$

Q. E. D

公式9・4・2 を図示すると次のとおりである。右図は原点付近の拡大図である。



そしてこの右図の負の部分を除くして上から眺めたのが次図である。



x に関する偏導関数の符号

この図を見ると、 $|I(z)|^2$ の x に関する偏導関数は P 点 ($x \doteq 1.5$) より右では正であり、 Q_+ 、 Q_- 点 ($y \doteq \pm 1$) より上もしくは下では正であるように見える。実際そうである。以下、このことを解析的に証明する。

公式9・4・2 は次のように分割して書ける。

$$\frac{\partial |I(z)|^2}{\partial x} = 2\Gamma^2(x) \left[\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} \right] \times h(x, y)$$

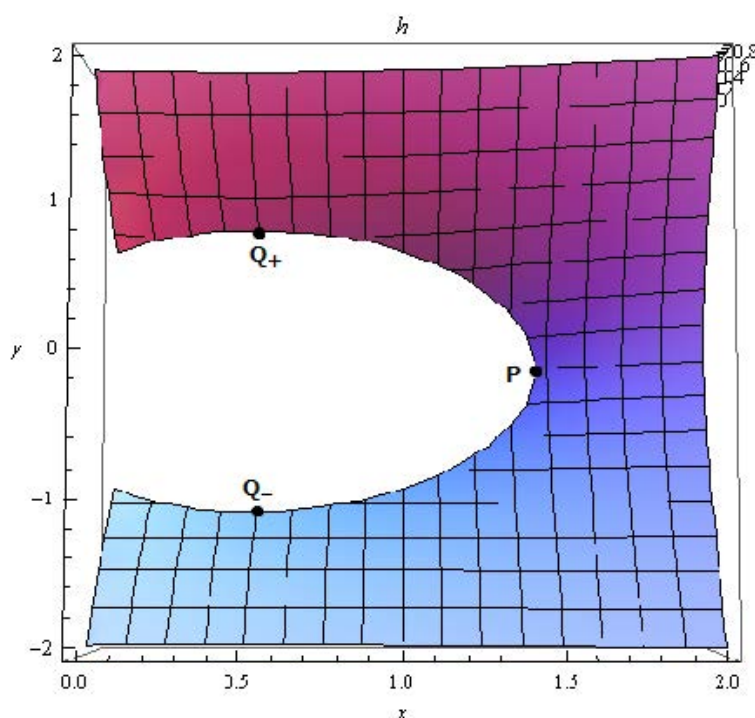
$$h(x, y) = \psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \quad (1.1)$$

この $[]$ の符号は

$$\prod_{r=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{y}{r+x} \right)^2 \right\}^{-1} > 0 \quad \text{for any } x, y$$

よってこの公式の符号は $h(x, y)$ の符号で決定される。即ち、 $\partial |I(z)|^2 / \partial x$ の代わりに $h(x, y)$ の符号を調べれば良い。

そこで $h(x, y)$ を図示すれば次のようである。これは上の図とそっくりで、 P 、 Q_+ 、 Q_- の位置は完全に一致する。



P 点の右側

数値計算によると、原点から最も遠い零点 P の座標は $x = 1.461632144968 \dots$ 、 $y = 0$ である。これは $h(x, y)$ の第1項 $\psi(x)$ の零点に一致する。即ち、

$$\psi(x) > 0 \quad \text{for } x > 1.461632144968 \dots$$

そして

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} \geq 0 \quad \text{for any } x, y$$

よって

$$h(x, y) = \psi(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+x} \frac{y^2}{(s+x)^2 + y^2} > 0 \quad \text{for } x > 1.461632144968 \dots$$

$\partial |\Gamma(z)|^2 / \partial x$ の符号及び零点は $h(x, y)$ のそれらと一致する。従って

$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial x} > 0 \quad \text{for } x > 1.461632144968 \dots \text{ and any } y$$

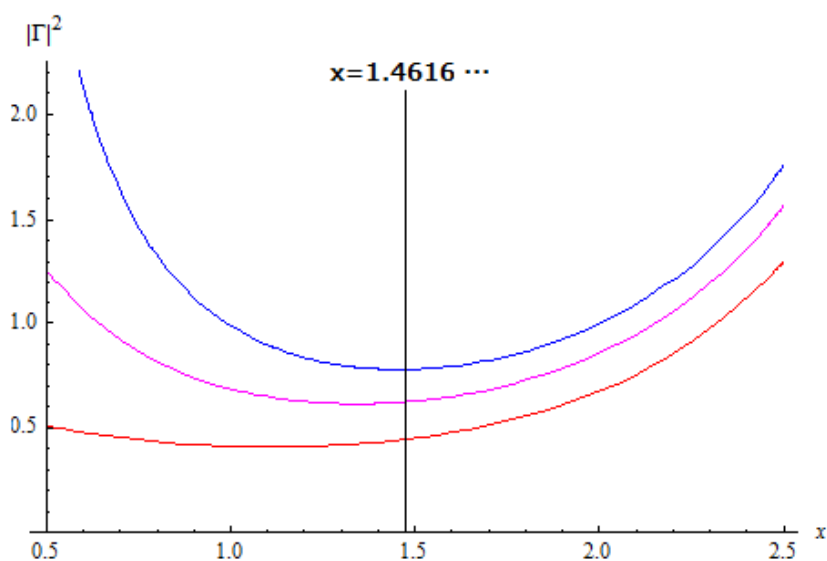
かくて次が成り立つ。

定理9・4・3

$\Gamma(z)$ ($z = x + iy$) を複素平面 C におけるガンマ関数とすると、
 y の如何に関わらず、

$x > 1.461632144968 \dots$ ならば $|\Gamma(z)|^2$ は x に関して単調増加である。

例えば、 $|\Gamma(z)|^2$ の $y = 0.1, 0.5, 0.8$ での切断図は次のようになる。
いずれも $x > 1.461632144968 \dots$ では x に関して単調増加となっている。



Q_+ 点の上と Q_- 点の下

数値計算によると、 y 軸に沿って最も距離の長い2つの零点 Q_+, Q_- の座標はそれぞれ $x = 1/2, y = \pm 1.047662675461731 \dots$ である。**Lemma 9.4.1** によれば

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} > 0 \quad \text{for } y > 0, x \geq 0$$

であるから、 $y > 0, x \geq 0$ のとき $h(x, y)$ は y に関して単調増加であり、従って

$$h(x, y) > 0 \quad \text{for } y > 1.047662675461731 \dots, x \geq 0$$

そして $h(x, y)$ は y に関して偶関数、即ち $h(x, y) = h(x, -y)$ であるから、

$$h(x, y) > 0 \quad \text{for } y < -1.047662675461731\cdots, x \geq 0$$

$\partial |\Gamma(z)|^2 / \partial x$ の符号及び零点は $h(x, y)$ のそれらと一致する。従って

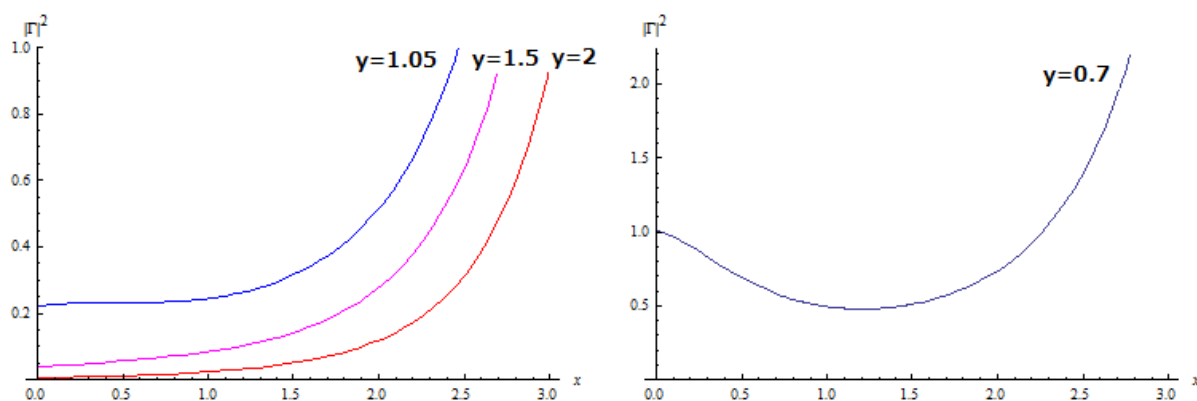
$$\frac{\partial |\Gamma(z)|^2}{\partial x} > 0 \quad \text{for } |y| > 1.047662675461731\cdots, x \geq 0$$

かくて次が成り立つ。

定理9・4・3'

$\Gamma(z)$ ($z = x + iy$) を複素平面 C におけるガンマ関数とすると、
 $x \geq 0$ かつ $|y| > 1.047662675461731\cdots$ ならば、 $|\Gamma(z)|^2$ は x に関して単調増加である。

例えば、 $|\Gamma(z)|^2$ の $y = 1.05, 1.5, 2$ での切断図は次の左図ようになる。いずれも x に関して単調増加関数となっている。これに対し右図は $y = 0.7$ のとき $|\Gamma(z)|^2$ が x の単調関数でないことを示している。



Note 1

数値計算の結果では、条件 $x \geq 0$ は不要と思われる。即ち x の如何に関わらず次式が成立しそうである。

$$h(x, y) > 0 \quad \text{for } y > 1.047662675461731\cdots$$

残念ながら、筆者はついにこれを証明出来なかった。

Note 2

y 軸に沿って最も距離の長い2つの零点 Q_+, Q_- の x 座標が $1/2$ であることは非常に興味深い。何故ならば、ガンマ関数はリーマンゼータの関数等式の主要な要素だからである。

2014.03.14

K. kono

宇宙人の数学