10 二重関数項級数による収束加速と総和法

概要

関数項級数はある二重関数項級数の累次関数項級数(行和または列和)と考えることができる。一方、この二重関数項級数から対角関数項級数が作られる。1つの関数項級数に対してこの二重関数項級数は一意ではなく、従ってその対角関数項級数も一意ではない。オイラー・クノップ変換はこのような対角関数項級数の一つである。

一般的に累次関数項級数よりも対角関数項級数が速く収束する。そこで、ある領域において両者が一致している場合、対角関数項級数を採用することによって元の関数項級数の収束を加速することができる。

ある領域において、累次関数項級数と対角関数項級数のうち、一方が絶対収束し他方が発散する場合、その発散する関数項級数は総和法によって収束すると解釈されなければばならない。

累次関数項級数と対角関数項級数の収束範囲が異なり且つ共通部分がある場合、解析接続が生じ得る。

10・1 二重関数項級数と総和法

最初に、二重級数に関する定理を述べる。

Lemma 10.1.1

a_{mn} $(m,n=0,1,2,\cdots)$ を複素数すれば、次の4つの2重級数が存在する。

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \ , \ \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\right) \ , \ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right) \ , \ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_{m-n\,n}$$

このとき、これらのいづれか1つが絶対収束するならば、ある数 S が存在して次式が成立する。

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m} a_{m-n\,n}\right) = S$$

証明

Eissa D. Habil "Double Sequences and Double Series" による。

この *Lemma* は二重関数項級数に拡張できる。

Lemma 10.1.2

$a_{mn}(z)$ $(m,n=0,1,2,\cdots)$ を領域 D 上の複素関数とすれば、次の4つの二重関数項級数が存在する。

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(z) \ , \ \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(z)\right) \ , \ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(z)\right) \ , \ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} a_{m-n\,n}(z)$$

このとき、これらのいづれか1つが領域 D 上で絶対収束するならば、ある関数 $S(z)$ が D 上に存在して次式が成立する。

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(z)\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m} a_{m-n\,n}(z)\right) = S(z)$$

この補助定理を用いれば、次の定理が証明できる。

定理10･1･3

$b(s)$ を実関数、D_1 , D_2 を小領域 、$f_1(z)$, $f_2(z)$ はそれぞれ次式で定義される関数項級数とする、。

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} b_{rs} = 1 \qquad s=0,1,2,\cdots \tag{b}$$

$$f_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{3.1}$$

$$f_2(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z) \tag{3.2}$$

(1) $f_1(z)$ が絶対収束するとき、

ⅰ $f_2(z)$ が D_1 において収束するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{3.1$_1$}$$

ⅱ $f_2(z)$ が D_1 において発散するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = "\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z)" \qquad z \in D_1 \tag{3.1$_2$}$$

但し $= "S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。

(2) $f_2(z)$ が D_1 において絶対収束するとき、

ⅰ $f_1(z)$ が収束するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{3.2$_1$}$$

ⅱ $f_1(z)$ が発散するならば

$$"\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{3.2$_2$}$$

但し $= "S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。

(3) $f_2(z)$ が D_2 $\left(\neq D_1\right)$ において絶対収束するとき、

$$"\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z) \qquad z \in D_2 \tag{3.3}$$

但し $= "S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。

証明

次なる二重関数項級数を考える。

$$\begin{aligned}\sum_{s=0,\, r=s}^{\infty} b_{rs}\, a_s(z) = \;& b_{00}\, a_0(z) + b_{10}\, a_0(z) + b_{20}\, a_0(z) + b_{30}\, a_0(z) + \cdots \\ & + b_{11}\, a_1(z) + b_{21}\, a_1(z) + b_{31}\, a_1(z) + b_{41}\, a_1(z) + \cdots \\ & + b_{22}\, a_2(z) + b_{32}\, a_2(z) + b_{42}\, a_2(z) + b_{52}\, a_2(z) + \cdots \\ & \vdots \end{aligned}$$

この累次関数項級数を計算すると

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=s}^{\infty} b_{rs}\,a_s(z) = \left(b_{00}+b_{10}+b_{20}+b_{30}+\cdots\right)a_0(z)$$
$$+\left(b_{11}+b_{21}+b_{31}+b_{41}+\cdots\right)a_1(z)$$
$$+\left(b_{22}+b_{32}+b_{42}+b_{52}+\cdots\right)a_2(z)$$
$$\vdots$$

(b) をこれに代入すれば

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=s}^{\infty} b_{rs}\,a_s(z) = a_0(z)+a_1(z)+a_2(z)+\cdots = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) \tag{3.1'}$$

一方、上の二重関数項級数の対角関数項級数を計算すると

$$b_{00}\,a_0(z)$$
$$+b_{10}\,a_0(z)+b_{11}\,a_1(z)$$
$$+b_{20}\,a_0(z)+b_{21}\,a_1(z)+b_{22}\,a_2(z)$$
$$+b_{30}\,a_0(z)+b_{31}\,a_1(z)+b_{32}\,a_2(z)+b_{33}\,a_3(z)$$
$$\vdots$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\,a_s(z) \tag{3.2'}$$

(1) $f_1(z)$ が絶対収束するとき、(3.1') の左辺も絶対収束する。すると*Lemma* 10.1.2 により (3.1') と (3.2') は D_1 において等しくなる。このとき $f_2(z)$ が D_1 において収束するならば直ちに (3.1$_1$) が成立する。 $f_2(z)$ が発散するならばそれは収束すると解釈されなければならない。そうでないと*Lemma* 10.1.2 に反するからである。かくて (3.1$_2$) が成立する。

(2) $f_2(z)$ が D_1 において絶対収束するならば、*Lemma* 10.1.2 により (3.1') と (3.2') は D_1 において等しくなる。このとき $f_1(z)$ が収束するならば直ちに (3.2$_1$) が成立する。このとき $f_1(z)$ が発散するならば、それは収束すると解釈されなければならない。そうでないと *Lemma* 10.1.2 に反するからである。かくて (3.2$_2$) が成立する。

(3) $f_2(z)$ が $D_2\left(\neq D_1\right)$ において絶対収束するならば、*Lemma* 10.1.2 により (3.1') と (3.2') は D_2 において等しくなる。このとき $f_1(z)$ は収束すると否とに関わらず D_2 において収束すると解釈されなければならない。そうでないと*Lemma* 10.1.2 に反するからである。かくて (3.3) が成立する。 Q.E.D.

Remark

この定理は発散級数の総和法をしばしば強要している。総和法にはチェザロ総和法やアーベル総和法などがあるが、ここで要求されているのは 行列総和法 (シルバーマン・テープリッツ)ではないかと思われる。

10・2　加速因子

前節では次なる等式が得られた。

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\, a_s(z) \tag{1.1}$$

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} b_{rs} = 1 \qquad \mathit{for}\ s=0,1,2,\cdots \tag{b}$$

ここで (b) の収束速度が (1.1) の左辺のよりも速いとき、これを (1.1) の右辺のように変換することによって左辺の収束を加速することができる。この場合、我々は級数(b)を加速因子(**accelerator**)と呼ぶことができる。

当然ながら加速因子はなるべく収束の速いものが良い。これには色々考えられるが、筆者は次のものを推奨する。

公式10・2・1(クノップの加速因子)

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \binom{r}{s} = 1 \qquad \mathit{for}\quad \begin{array}{l} s = 0,1,2,\cdots \\ q > 0 \end{array}$$

証明

$$\begin{aligned} b(0) &= \frac{q^0{}_0C_0}{(q+1)^1} + \frac{q^1{}_1C_0}{(q+1)^2} + \frac{q^2{}_2C_0}{(q+1)^3} + \frac{q^3{}_3C_0}{(q+1)^4} + \cdots \\ &= \frac{q^0}{(q+1)^1} + \frac{q^1}{(q+1)^2} + \frac{q^2}{(q+1)^3} + \frac{q^3}{(q+1)^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{q+1}\left\{1+\left(\frac{q}{q+1}\right)^1 + \left(\frac{q}{q+1}\right)^2 + \left(\frac{q}{q+1}\right)^3 + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{q+1}\frac{q+1}{1} = 1 \end{aligned}$$

次に、${}_nC_1 = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kC_0 \quad n=1,2,3,\cdots$ であるから、

$$\begin{aligned} b(1) &= \frac{q^0{}_1C_1}{(q+1)^2} + \frac{q^1{}_2C_1}{(q+1)^3} + \frac{q^2{}_3C_1}{(q+1)^4} + \frac{q^3{}_4C_1}{(q+1)^5} + \cdots \\ &= \frac{q^0{}_0C_0}{(q+1)^2} + \frac{q^1{}_1C_0}{(q+1)^3} + \frac{q^2{}_2C_0}{(q+1)^4} + \frac{q^3{}_3C_0}{(q+1)^5} + \cdots \\ &\qquad + \frac{q^1{}_0C_0}{(q+1)^3} + \frac{q^2{}_1C_0}{(q+1)^4} + \frac{q^3{}_2C_0}{(q+1)^5} + \frac{q^4{}_3C_0}{(q+1)^6} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \frac{q^2{}_0C_0}{(q+1)^4} + \frac{q^3{}_1C_0}{(q+1)^5} + \frac{q^4{}_2C_0}{(q+1)^6} + \frac{q^5{}_3C_0}{(q+1)^7} + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{q^0{}_0C_0}{(q+1)^2}+\frac{q^1{}_1C_0}{(q+1)^3}+\frac{q^2{}_2C_0}{(q+1)^4}+\frac{q^3{}_3C_0}{(q+1)^5}+\cdots=\frac{q^0}{(q+1)^1}b(0)$$

$$\frac{q^1{}_0C_0}{(q+1)^3}+\frac{q^2{}_1C_0}{(q+1)^4}+\frac{q^3{}_2C_0}{(q+1)^5}+\frac{q^4{}_3C_0}{(q+1)^6}+\cdots=\frac{q^1}{(q+1)^2}b(0)$$

$$\frac{q^2{}_0C_0}{(q+1)^4}+\frac{q^3{}_1C_0}{(q+1)^5}+\frac{q^4{}_2C_0}{(q+1)^6}+\frac{q^5{}_3C_0}{(q+1)^7}+\cdots=\frac{q^2}{(q+1)^3}b(0)$$

$$\vdots$$

であるからこれらを上に代入すれば

$$b(1)=\left\{\frac{q^0}{(q+1)^1}+\frac{q^1}{(q+1)^2}+\frac{q^2}{(q+1)^3}+\frac{q^3}{(q+1)^4}+\cdots\right\}b(0)$$

$$=\frac{1}{q+1}\left\{1+\left(\frac{q}{q+1}\right)^1+\left(\frac{q}{q+1}\right)^2+\left(\frac{q}{q+1}\right)^3+\cdots\right\}b(0)$$

$$=\frac{1}{q+1}\,\frac{q+1}{1}b(0)=1$$

次に、${}_nC_2=\sum_{k=1}^{n-1}{}_kC_1 \quad n=2,3,4,\cdots$ であるから、

$$b(2)=\frac{q^0{}_2C_2}{(q+1)^3}+\frac{q^1{}_3C_2}{(q+1)^4}+\frac{q^2{}_4C_2}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_5C_2}{(q+1)^6}+\cdots$$

$$=\frac{q^0{}_1C_1}{(q+1)^3}+\frac{q^1{}_2C_1}{(q+1)^4}+\frac{q^2{}_3C_1}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_4C_1}{(q+1)^6}+\cdots$$

$$+\frac{q^1{}_1C_1}{(q+1)^4}+\frac{q^2{}_2C_1}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_3C_1}{(q+1)^6}+\frac{q^4{}_4C_1}{(q+1)^7}+\cdots$$

$$+\frac{q^2{}_1C_1}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_2C_1}{(q+1)^6}+\frac{q^4{}_3C_1}{(q+1)^7}+\frac{q^5{}_4C_1}{(q+1)^8}+\cdots$$

$$\vdots$$

ここで

$$\frac{q^0{}_1C_1}{(q+1)^3}+\frac{q^1{}_2C_1}{(q+1)^4}+\frac{q^2{}_3C_1}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_4C_1}{(q+1)^6}+\cdots=\frac{q^0}{(q+1)^1}b(1)$$

$$\frac{q^1{}_1C_1}{(q+1)^4}+\frac{q^2{}_2C_1}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_3C_1}{(q+1)^6}+\frac{q^4{}_4C_1}{(q+1)^7}+\cdots=\frac{q^1}{(q+1)^2}b(1)$$

$$\frac{q^2{}_1C_1}{(q+1)^5}+\frac{q^3{}_2C_1}{(q+1)^6}+\frac{q^4{}_3C_1}{(q+1)^7}+\frac{q^5{}_4C_1}{(q+1)^8}+\cdots=\frac{q^2}{(q+1)^3}b(1)$$

$$\vdots$$

であるからこれらを上に代入すれば

$$b(2) = \left\{ \frac{q^0}{(q+1)^1} + \frac{q^1}{(q+1)^2} + \frac{q^2}{(q+1)^3} + \frac{q^3}{(q+1)^4} + \cdots \right\} b(1)$$

$$= \frac{1}{q+1} \left\{ 1 + \left(\frac{q}{q+1} \right)^1 + \left(\frac{q}{q+1} \right)^2 + \left(\frac{q}{q+1} \right)^3 + \cdots \right\} b(1)$$

$$= \frac{1}{q+1} \frac{q+1}{1} b(1) = 1$$

以下、帰納法により与式を得る。

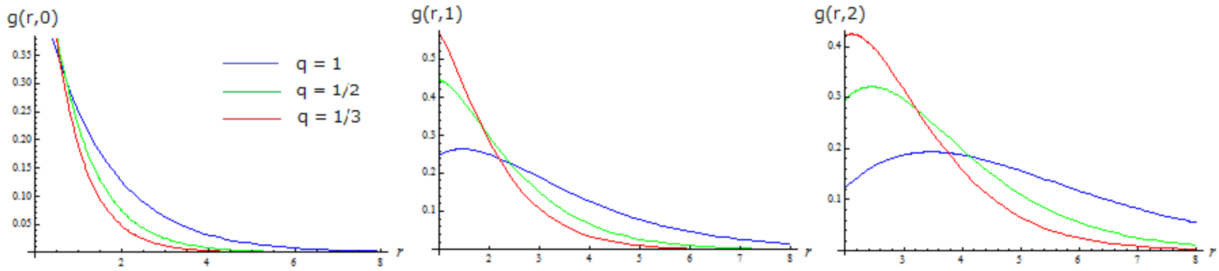
性質

公式10･2･1において$q=1$を採ればこれはオイラー変換を与えることになる。しかし、クノップの加速因子の優れているところは、より小さなqを採ることによってより大きな加速効果が得られるところにある。以下、このことを示す。

$b(s)$ の各項を次の関数で表そう。

$$g(r,s,q) = \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \binom{r}{s}$$

これを図示すると次のようになる。左から$s=0,1,2$。 各図において$q=1, 1/2, 1/3$ が青、緑、赤で描かれている。



いづれの図においても、q が小さくなるほど g はより速く0に収束している。これは加速要因である。一方、q が小さくなるほど g の初期値は0から大きく乖離する。これは減速要因である。加速される級数にも依るが、多くの場合、$q=1\sim1/3$ が適当であるように思える。

c.f.

筆者が 2014.08 に発見した加速因子は次のようなものであった。

$$b_1(s) = \sum_{r=s}^{\infty} \frac{q^{s+1}}{(q+1)^{r+1}} \binom{r}{s} = 1 \quad \textit{for} \quad \begin{array}{l} s = 0,1,2,\cdots \\ q > 0 \end{array}$$

これは 公式10･2･1と非常に良く似ている。実はこの式はqを$1/q$ に置換すれば公式10･2･1帰着する。筆者はこのことに気付かず両者は異なる式だと誤認した。そしてこの誤認が本稿の出発点となった。

Note

筆者は他に次のような加速因子も発見した。

$$b_2(s) = \sum_{r=s}^{\infty} e^{-1}\frac{s!}{r!}\binom{r}{s} = 1 \qquad for\ \ s = 0,1,2,\cdots$$

$$b_3(s) = \sum_{r=s}^{\infty} \frac{e^{s+1} - e^{s}}{e^{r+1}} = 1 \qquad for\ \ s = 0,1,2,\cdots$$

残念ながらこれらは 公式10・2・1 に比べてかなり加速度が小さい。しかしこれらの存在はより良い加速因子が存在する可能性を残している。

10・3 クノップ変換と二重関数項級数

クノップの加速因子を用いた級数の変換は**クノップ変換**と呼ばれる。先ずはクノップ変換についての *Lemma* を用意する。

***Lemma* 10.3.1**

q は正数、$f_1(z)=\sum_{s=0}^{\infty}a_s(z)$ は小領域 D_1 上の関数項級数とし、これのクノップ変換を次のようであるとする。

$$f_2(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}a_s(z)$$

すると、もし $f_1(z)$ が有界ならば、$f_2(z)$ は D_1 において絶対収束する。

証明

ダランベールの収束判定法によれば

$$\rho(r,z,q)=\frac{\dfrac{1}{(q+1)^{r+2}}\left|\sum_{s=1}^{r+1}q^{r+1-s}\binom{r+1}{s}a_s(z)\right|}{\dfrac{1}{(q+1)^{r+1}}\left|\sum_{s=1}^{r}q^{r-s}\binom{r}{s}a_s(z)\right|}$$

$$=\frac{q}{q+1}\left|\frac{\sum_{s=1}^{r+1}q^{r-s}\binom{r+1}{s}a_s(z)}{\sum_{s=1}^{r}q^{r-s}\binom{r}{s}a_s(z)}\right|$$

ここで

$$\binom{r+1}{s}=\frac{r+1}{r+1-s}\binom{r}{s}$$

であるからこれを用いて

$$\rho(r,z,q)=\frac{q}{q+1}\left|\frac{\sum_{s=1}^{r+1}\frac{r+1}{r+1-s}q^{r-s}\binom{r}{s}a_s(z)}{\sum_{s=1}^{r}q^{r-s}\binom{r}{s}a_s(z)}\right|$$

｜｜内の分子は

$$\sum_{s=1}^{r+1}\frac{r+1}{r+1-s}q^{r-s}\binom{r}{s}a_s(z)=\sum_{s=1}^{r}\frac{r+1}{r+1-s}q^{r-s}\binom{r}{s}a_s(z)$$
$$+\frac{r+1}{r+1-(r+1)}q^{r-(r+1)}\binom{r}{r+1}a_{r+1}(z)$$

であるが非負整数 r については

$$\binom{r}{r+1}=0$$

であるから

$$\rho(r,z,q) = \frac{q}{q+1}\left| \frac{\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{s}{r+1}} q^{r-s}\binom{r}{s} a_s(z)}{\sum_{s=1}^{r} q^{r-s}\binom{r}{s} a_s(z)} \right|$$

$r \to \infty$ とすれば $\frac{s}{r+1} \to 0$ 且つ $a_s(z)$ は有界であるから

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r,z,q) = \frac{q}{q+1} < 1 \qquad for\ \ q>0$$

よって $f_2(z)$ は小領域 D_1 に定義された $a_s(z)\quad s=0,1,2,\cdots$ について絶対収束する。

定理10・3・2（クノップ変換）

q は正数、D_1, D_2 を小領域、$f_1(z), f_2(z)$ はそれぞれ次式で定義される関数項級数とする。

$$f_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{2.1}$$

$$f_2(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s} a_s(z) \tag{2.2}$$

(1) $f_1(z)$ が収束するとき、

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s} a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{3.1}$$

(2) $f_2(z)$ が D_1 において絶対収束するとき、$f_1(z)$ が発散するならば

$$"\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s} a_s(z) \qquad z \in D_1 \tag{3.2}$$

但し $="S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。

(3) $f_2(z)$ が $D_2\ (\neq D_1)$ において絶対収束するとき、

$$"\sum_{s=0}^{\infty} a_s(z)" = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s} a_s(z) \qquad z \in D_2 \tag{3.3}$$

但し $="S(z)"$ は $S(z)$ が収束すると解釈されることを意味する。

証明

公式10・2・1 により、

$$b(s) = \sum_{r=s}^{\infty} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s} = 1 \qquad for\ \ \begin{array}{l} s=0,1,2,\cdots \\ q>0 \end{array}$$

よってこの $b(s)$ は定理10・1・3 の要件を満たす。

$f_1(z)$ が収束するとき、*Lemma* 10.3.1 により $f_2(z)$ は D_1 において絶対収束する。すると **定理10・1・3**（1）i により本定理（1）が成立する。(2),(3) は **定理10・1・3** より直ちに従う。

クノップ変換におけるパラメータ

クノップ変換はパラメータ q を持つ。そして定理で見たようにこれは正数でさえあれば何でも良い。本当は $Re(q)>0$ なる複素数でも良いのである。それ故、無限においてはパラメータ q の存在意義は無い。これが正にクノップ変換がオイラー変換ほどに有名でない所以である。

しかし、我々は無限級数を計算することはできない。どこかで級数を打ち切らねばならない。すると俄然パラメータ q は大きな役割を演じ始める。即ち、

クノップ変換の部分和を採ったとき、

q が大きくなれば、近似範囲は拡大し 収束速度は低下する。

q が小さくなれば、近似範囲は縮小し 収束速度は上昇する。

このようにクノップ変換におけるパラメータは数値計算においては非常に有用である。そのことは以下の節において確認されるであろう。クノップ変換はオイラー変換と一緒にされてオイラー・クノップ変換と呼ばれているが、パラメータを持つことの意義はもっと評価されて然るべきである。

10・4　ベキ級数の加速

　ベキ級数は一般的に収束が速いので、クノップ変換による加速効果は余り期待できない。しかし、収束円の周辺では著しい加速効果及び漸近効果が見られる。

10・4・1　メルカトール級数の加速

$$f(z) = \log(z+1) \tag{1.0}$$

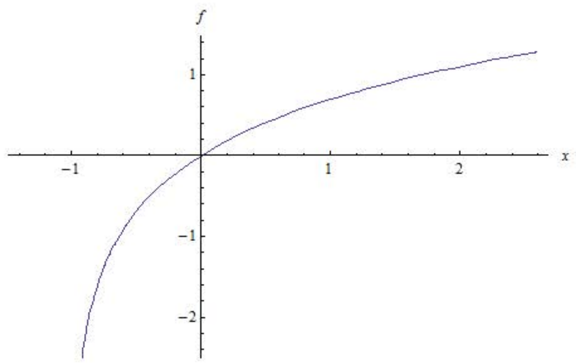
とすれば、そのマクローリン級数はメルカトール級数と呼ばれ、次のように表される。

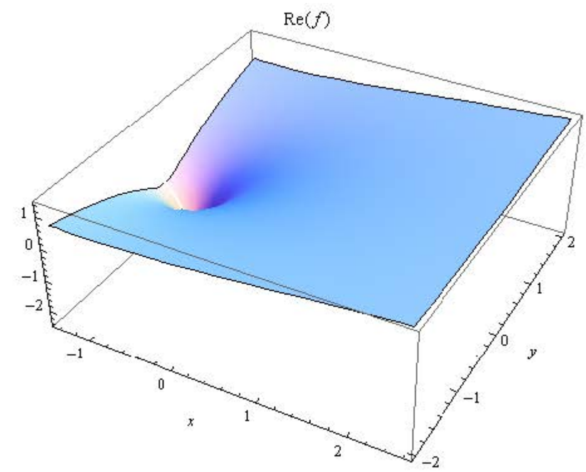
$$f_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{z^s}{s} \qquad |z| \le 1 \tag{1.1}$$

これにクノップ変換を施せば次式を得る。

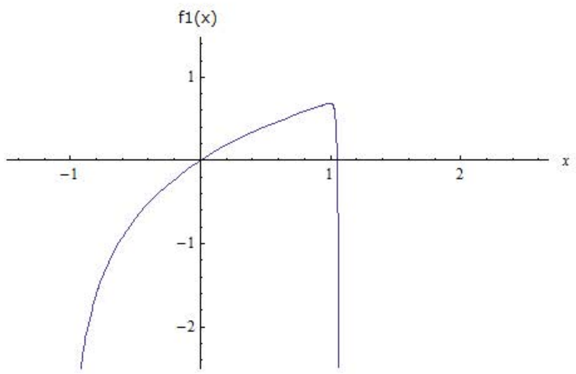
$$f_2(z,q) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^{s-1}\frac{z^s}{s} \qquad |z| \le 1 \tag{1.2}$$

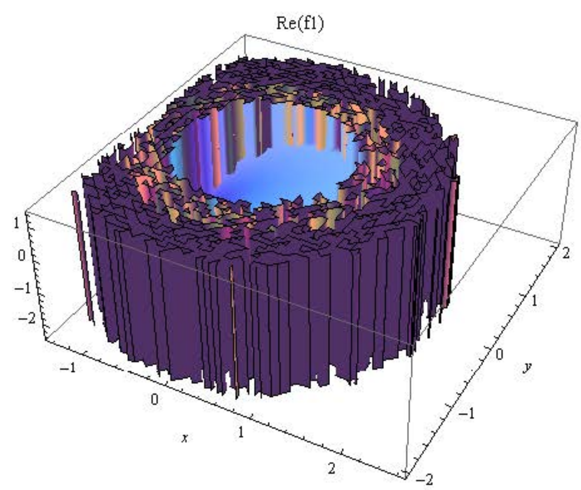
　最初に、対数関数 $f(z)$ を図示する。左は2D図で右は実数部の3D図である。





次に、マクローリン級数 $f_1(z)$ を図示する。左は2D図で右は実数部の3D図である。





両図から $f_1(z)$ の収束半径が1であることが目視できる。この級数 $f_1(z)$ はこの円内で絶対収束する。従って **定理10・3・2 (1)** により次式が成り立つ。

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{z^s}{s} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^{s-1}\frac{z^s}{s} \qquad |z| \le 1 \tag{1.3}$$

加速効果

(1.3) の右辺は左辺を加速する効果が期待される。これを調べるため、(1.1), (1.2) の部分和を次のように記述する。

$$f_1(z,m) = \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s-1} \frac{z^s}{s} \qquad |z| \le 1 \tag{1.1'}$$

$$f_2(z,q,m) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \binom{r}{s} (-1)^{s-1} \frac{z^s}{s} \tag{1.2'}$$

そこで z, q に適当な値を与え、有効数字6桁に必要な項数 m を計算したところ次表を得た。

有効桁数6桁に必要な項数 m

z	$f(z)$	$f_1(z,m)$	$f_2(z,q,m)$		加速効果
		m	m	q	
-0.9	-2.30258	93	96	1/30	-
			97	1/25	-
			98	1/20	-
0.1	0.0953101	6	5	1/20	0
			7	1/10	-
			9	1/5	-
1	0.693147	約 10^6	15	1/2	+++
			24	1	+++
			41	2	+++

漸近効果

我々は (1.2) によって $|z|>1$ における値を得ることはできない。このような z に対して(1.2) は発散するからである。ところが (1.2') を用いれば、我々は $|z|>1$ における値を極めて高精度で得ることができる。実際、 z, q に適当な値(但し $|z|>1$)を与え、有効数字6桁に必要な項数 m を計算したところ次表を得た。

この結果から、(1.2) は $|z|>1$ においては漸近級数であると考えられる。

有効桁数6に必要な項数 m

z	$f(z)$	$f_1(z)$	$f_2(z,q,m)$	
			m	q
2	1.09861	$\pm\infty$	20	1
			28	3/2
			35	2
$3+i$	$1.41660+0.244978\,i$	$\pm\infty$	40	4/3
			26	3/2
			33	2

10･4･2　マーダヴァ級数の加速

マーダヴァ級数（グレゴリー･ライプニッツ級数）は次のように表される。

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1} \tag{2.1}$$

そしてこの右辺にクノップ変換を施せば

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^s}{2s+1} \tag{2.2}$$

特に $q=1$ のとき、(2.2) は

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^1}\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^1}\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{1}{2^3}\frac{8}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{2^4}\frac{48}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^1}\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{1}{2^3}\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{2^4}\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$$

i.e.

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^1}\frac{0!!}{1!!}+\frac{1}{2^2}\frac{2!!}{3!!}+\frac{1}{2^3}\frac{4!!}{5!!}+\frac{1}{2^4}\frac{6!!}{7!!}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r+1}}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}$$

この公式はオイラーによって発見されたものである。かくして円周率 π は

$$\pi=4\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1} \tag{2.1'}$$

$$=2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} \tag{2.2'}$$

(2.2') の加速効果を調べるため、これらの級数の部分和をそれぞれ次のように記述する。

$$f_1(m)=4\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s}{2s+1}$$

$$f_2(m)=2\sum_{r=0}^{m}\frac{1}{2^r}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}$$

そして π の有効数字 1,001 桁に必要な項数 m を計算したところ、次のようになった。

	$f_1(m)$	$f_2(m)$
m	約 $10^{1000}/2$	3,330

これらの計算から、有効桁数 $k+1$ に必要な項数 m は $\frac{10}{3}k$ で与えられることが推測される。

10・5 フーリエ級数の加速

フーリエ級数は一般的に収束が遅いので、クノップ変換により大きな加速効果が得られる。さらに収束区間の両側では強い漸近効果も見られる。ここでは例として $-log(2sin(z/2))$ のフーリエ級数を取り上げる。

$$f(z) = -log\left(2sin\frac{z}{2}\right) \tag{1.0}$$

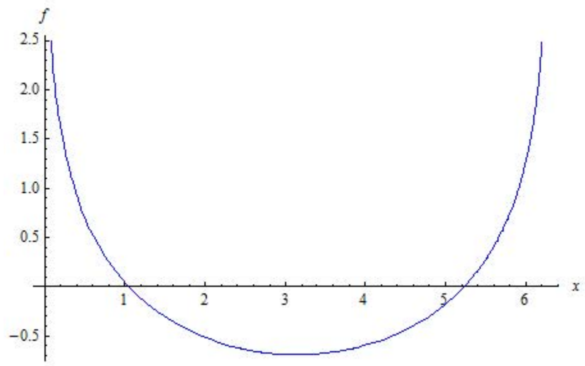
とすれば、そのフーリエ級数は

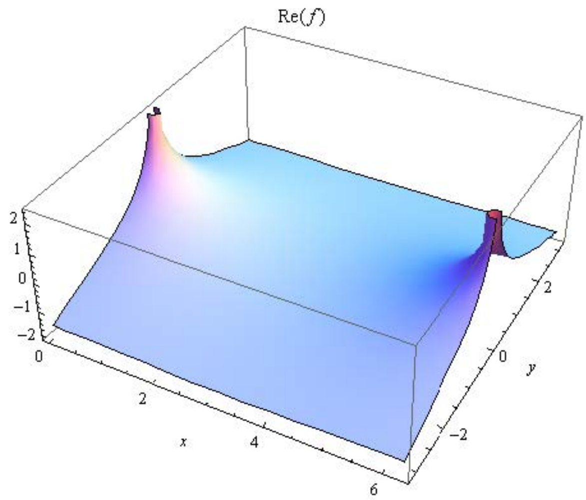
$$f_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{cos(sz)}{s} \qquad \begin{array}{l} 0<Re(z)<2\pi \\ Im(z)=0 \end{array} \tag{1.1}$$

これにクノップ変換を施せば次式を得る。

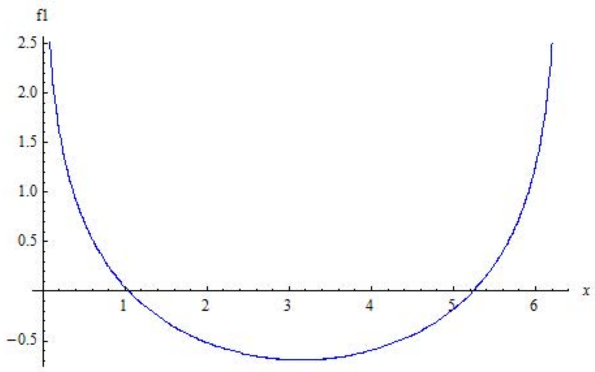
$$f_2(z,q) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{cos(sz)}{s} \tag{1.2}$$

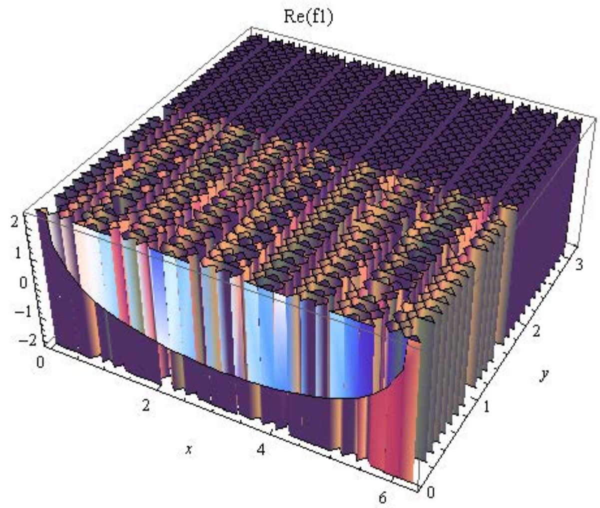
最初に、関数 $f(z)$ を図示する。左は2D図で右は実数部の3D図である。





次に、フーリエ級数 $f_1(z)$ を図示する。左は2D図で右は実数部の3D図である。





2D図は上図と全く同じであるが、3D図が大きく異なっている。この図はフーリエ級数 $f_1(z)$ が実数区間でしか展開されないことを示している。このフーリエ級数 $f_1(z)$ は (1.1) の区間において条件収束する。従って **定理10・3・2 (1)** により次式が成り立つ。

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(sz)}{s}=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{\cos(sz)}{s}\qquad \begin{array}{l}0<Re(z)<2\pi\\ Im(z)=0\end{array} \tag{1.3}$$

加速効果

(1.3) の右辺は左辺を加速する効果が期待される。これを調べるため、(1.1), (1.2) の部分和を次のように記述する。

$$f_1(z,m)=\sum_{s=1}^{m}\frac{\cos(sz)}{s}\qquad \begin{array}{l}0<Re(z)<2\pi\\ Im(z)=0\end{array} \tag{1.1'}$$

$$f_2(z,q,m)=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{\cos(sz)}{s} \tag{1.2'}$$

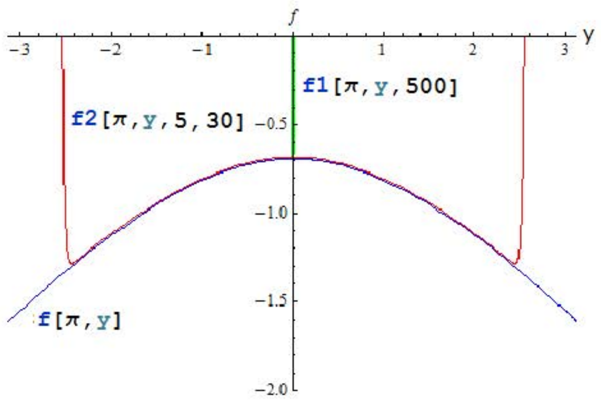
そこで z,q に適当な値を与え、有効数字6桁に必要な項数 m を計算したところ次表を得た。

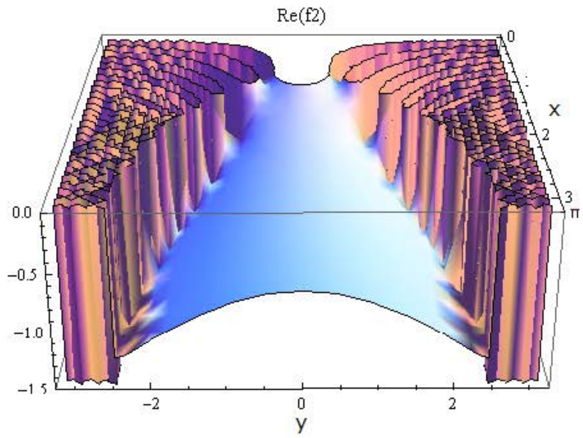
有効桁数6桁を得るに必要な項数 m

z	$f(z)$	$f_1(z,m)$	$f_2(z,q,m)$		加速効果
		m	m	q	
1	0.0420195	約 10^7	102	1/2	++
			89	1	++
			101	2	++
π	-0.693147	約 10^6	15	1/2	+++
			22	1	+++
			41	2	+++
5	-0.179771	約 10^6	50	1/2	++
			45	1	++
			51	2	++

漸近効果

我々は (1.2) によって複素域おける値を得ることはできない。複素数 z に対して (1.2) は発散するからである。ところが (1.2') を用いれば、我々は複素域における値を得ることができる。このことを示すため、$z=x+iy$ と置いて $f(x,y), f_1(x,y,m), f_2(x,y,q,m)$ を図示すると次のとおり。





右は3D図で$f_2(x,y,5,30)$の実数部が$0<x\le\pi$ について描かれている。
左にはyを虚軸として $f(\pi), f_1(\pi,y,500), f_2(\pi,y,5,30)$ がそれぞれ青、緑、赤で描かれている。左図は$f_2(z,q,m)$が$f(z)$の漸近展開であることを示している。勿論、 $m\to\infty$ とすれば$f_2(x,y,5,m)$（赤）は中央に移動して$f_1(\pi,y,m)$（緑）に重なる。

漸近展開とは言え、$f_2(z,q,m)$は非常に高精度の近似値を得ることができる。実際、zに複素数を与え q に適当な値を与え、有効桁数6桁を得るのに必要な項数mを計算したところ、次表を得た。

有効桁数6桁を得るに必要な項数m

z	$f(z)$	$f_2(z,q,m)$	
		m	q
$3+i$	-0.811290-0.0327592 i	67	1
		41	2
		57	3

10･6　ディリクレ級数の加速

ディリクレ級数をクノップ変換すると収束軸付近で大きな加速効果が見られる。さらに、収束軸を超えた所では解析接続が生じる。ここでは例としてディリクレ・イータ級数を取り上げる。

$\zeta(z)$ をリーマン・ゼータ関数として

$$\eta(z) = \begin{cases} \left(1-2^{1-z}\right)\zeta(z) & z \neq 1 \\ \log 2 & z = 1 \end{cases} \tag{1.0}$$

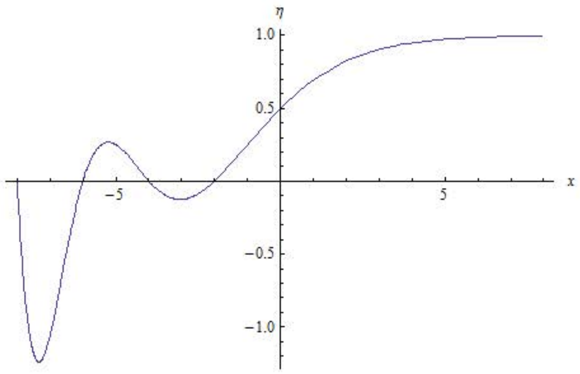
とすれば、その級数はディリクレ級数と呼ばれる次のようなものである。

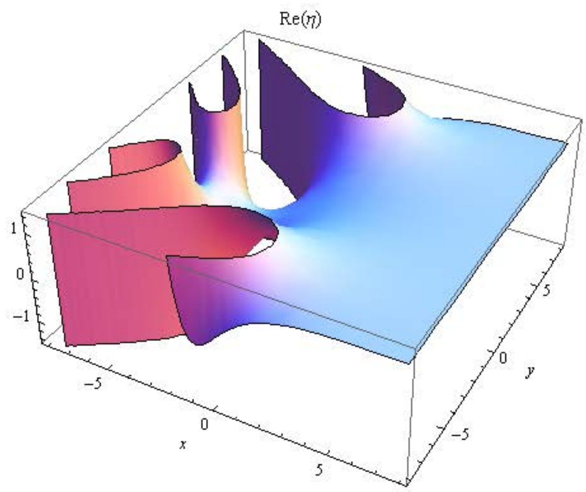
$$f_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^z} \qquad Re(z) \geq 0 \tag{1.1}$$

これにクノップ変換を施せば次式を得る。

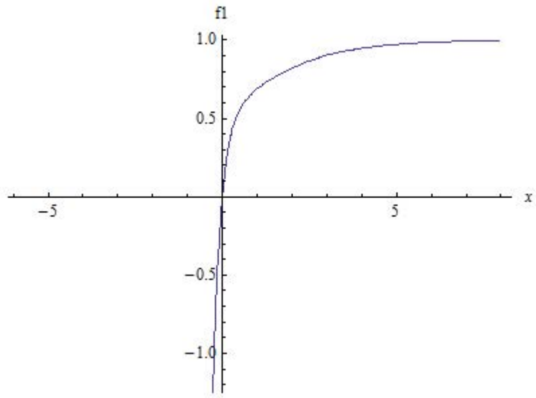
$$f_2(z,q) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \binom{r}{s} \frac{(-1)^{s-1}}{s^z} \tag{1.2}$$

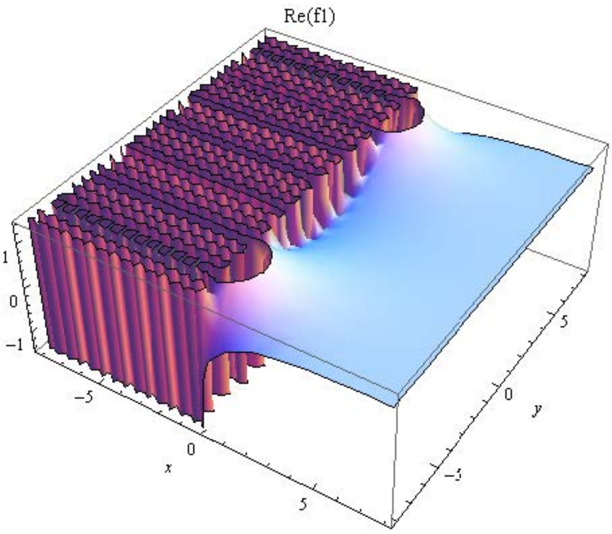
最初に、ディリクレ・イータ関数 (1.0) を図示する。左は2D図で右は実数部の3D図である。





次に、ディリクレ・イータ級数 $f_1(z)$ を図示する。左は2D図で右は実数部の3D図である。





これらの図は $x=0$ がこのディリクレ・イータ級数の収束軸であることを示している。

このディリクレ・イータ級数は複素半平面 $Re(z) \geq 0$ で条件収束する。従って 定理10･3･2 (1)

により次式が成り立つ。

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s^{z}} = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{s^{z}} \qquad Re(z)\geq 0 \tag{1.3}$$

加速効果

(1.3) の右辺は左辺を加速する効果が期待される。これを調べるため、(1.1), (1.2) の部分和を次のように記述する。

$$f_1(z,m) = \sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{s-1}}{s^{z}} \qquad Re(z)\geq 0 \tag{1.1'}$$

$$f_2(z,q,m) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{s^{z}} \tag{1.2'}$$

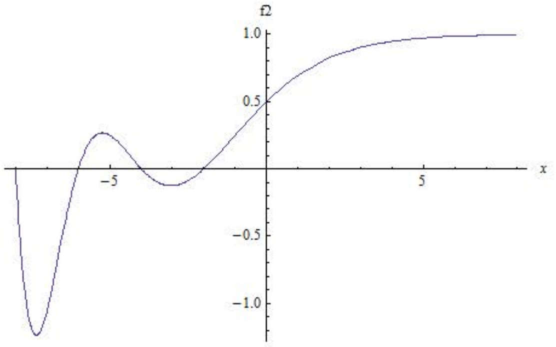
そこで z,q に適当な値を与え、有効数字6桁に必要な項数 m を計算したところ次表を得た。

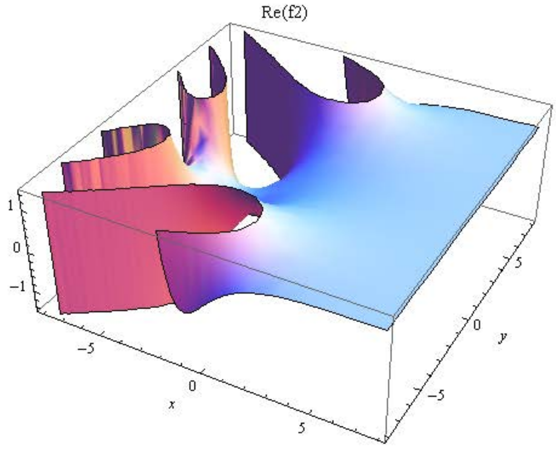
有効桁数6桁を得るに必要な項数 m

z	$\eta(z)$	$f_1(z,m)$	$f_2(z,q,m)$		加速効果
		m	m	q	
5	0.972119	18	9	1/6	+
			15	6/13	0
			24	1	-
1	0.693147	約 10^6	15	1/2	+++
			24	1	+++
			41	2	+++
$\frac{1}{2}$	0.604898	約 10^{12}	13	1/2	+++
			21	1	+++
			36	2	+++

解析接続

級数が収束すればそのクノップ変換はその級数の収束域で絶対収束する。ところが本例の場合、(1.2) は全複素平面で絶対収束する。実際、(1.2) を図示すると次のようになる。





この図はディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ の図と全く同じである。収束軸がどこにも見つからない。この図は **定理10・3・2 (3)** により次式が成立していることを示している。

$$"\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s^z}" = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{s^z} \qquad z \in C \tag{1.4}$$

$Re(z)<0$ において、右辺は漸近級数ではなく収束級数である。。これは $f_1(z)$ と $f_1(1-z)$ が $0 \le Re(z) \le 1$ に共通領域を持ち且つ関数等式で結ばれているからに違いない。実際、(1.2')によって $Re(z)<0$ における値も次のように計算することができる。

有効桁数6桁を得るに必要な項数 m

z	$\eta(z)$	$"f_1(z)"$	$f_2(z,q,m)$	
			m	q
-1	0.250000	$"\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}s^1"$	15	1/2
			1	1
			18	2
-3	-0.125000	$"\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}s^3"$	22	1/2
			3	1
			19	2
$-3+i$	$-0.268443+0.0300057i$	$"\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}s^{3+i}"$	25	1/2
			21	1
			36	2

従って、$f_1(z)$ は次のように解釈されなければならない。

$$"1^1-2^1+3^1-4^1+-\cdots" = \frac{1}{4}$$

$$"1^3-2^3+3^3-4^3+-\cdots" = -\frac{1}{8}$$

ディリクレ・イータ関数等の定義式

この故に、(1.4) の右辺はディリクレ・イータ関数 $\eta(p)$ の定義式として使うことができる。

$$\eta(p) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{s^p} \qquad q>0$$

従って、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(p)$ は次のように定義できる。

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{s^p} \qquad \begin{array}{l} p \ne 1 \\ q>0 \end{array}$$

また、タンジェント数 T_p と ベルヌイ数 B_p は複素平面上でそれぞれ次のように定義することもできる。（「6 ゼータ関数のグローバル定義と諸係数の一般化」参照。）

$$T_p = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ 2^{p+1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{r} \dfrac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} (-1)^{s-1} s^p & \begin{matrix} p \neq 0 \\ q > 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$B_p = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & p = 1 \\ \dfrac{p}{2^p - 1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{r} \dfrac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} (-1)^{s-1} s^{p-1} & \begin{matrix} p \neq 1 \\ q > 0 \end{matrix} \end{cases}$$

10・7　発散級数への適用

クノップ変換は発散級数にも適用できる。勿論、どんな発散級数にでも適用できる訳ではない。例えばこれを発散正項級数に適用しても何事も起こらない。候補となる発散級数は振動級数や交代級数である。以下、2例を示す。

10・7・1　振動級数への適用

関数を

$$f(z) = \frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} \tag{1.0}$$

とすれば、そのフーリエ級数(?)は

$$f_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sin(sz) \qquad \begin{array}{l} 0 < Re(z) < 2\pi \\ Im(z) = 0 \end{array} \tag{1.1}$$

これにクノップ変換を施せば次式を得る。

$$f_2(z,q) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r} \frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\sin(sz) \tag{1.2}$$

なお、(1.0), (1.1) は 10・5 の

$$-\log\left(2\sin\frac{z}{2}\right) = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos(sz)}{s} \qquad \begin{array}{l} 0 < Re(z) < 2\pi \\ Im(z) = 0 \end{array}$$

の両辺を z で微分したものである。

総和法

フーリエ級数 (1.1) は振動して値が定まらず、従って収束しない。当然、$f(z) \neq f_1(z)$ である。それなのにこれのクノップ変換 (1.2) は任意の $q>0$ について (1.1) の区間において絶対収束する。従って **定理10・3・2 (2)** により次式が成り立つ。

$$"\sum_{s=1}^{\infty}\sin(sz)" = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\sin(sz) \qquad \begin{array}{l} 0 < Re(z) < 2\pi \\ Im(z) = 0 \end{array} \tag{1.3}$$

これを調べるため、(1.2) の部分和を次のように記述する。

$$f_2(z,q,m) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}\sin(sz) \tag{1.2'}$$

そこで z に適当な値を与え、有効数字6桁を得るに最適な m,q を計算したところ次表を得た。

有効桁数6桁を得るに最適な m,q

z	$f(z)$	$"f_1(z)"$	$f_2(z,q,m)$	
			m	q
$\frac{\pi}{4}$	1.20710	$"\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{s\pi}{4}"$	155	1
$\frac{\pi}{3}$	0.866025	$"\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{s\pi}{3}"$	98	1

z	$f(z)$	$"f_1(z)"$	$f_2(z,q,m)$	
			m	q
$\frac{\pi}{2}$	0.500000	$"\sum_{s=1}^{\infty} \sin\frac{s\pi}{2}"$	42	1
1	0.915243	$"\sum_{s=1}^{\infty} \sin s"$	121	1

$"f_1(z)" = f_2(z,q) = f(z)$ であるから、これらは次のことを意味する。

$$"\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+0-\frac{1}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}-0\ ++++----\ \cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$"\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-0\ +++---\ \cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$"1+0-1-0\ ++--\ \cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$"\sin 1+\sin 2+\sin 3+\sin 4+\cdots" = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}$$

即ち、フーリエ級数(?) $f_1(z)$ は何らかの総和法によってこのように解釈されねばならない。

漸近効果

10·5 と同様、(1.2') は複素平面では (1.0) の漸近展開となる。そしてそれは非常に高精度の近似値を得ることができる。実際、z に適当な複素数を与え、有効数字6桁を得るに最適な m,q を計算したところ次表を得た。

有効桁数6桁を得るに最適な m,q

z	$f(z)$	$f_2(z,q,m)$	
		m	q
$2+i$	$0.232055-0.299914\,i$	50	3

10·7·2 発散交代級数への適用

次の級数を考える。

$$f_1(n) = \sum_{s=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{(2s+1-n)!} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$n=3,4$ のとき、

$$f_1(3) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{(2s-2)!} = -1\cdot 2 + 3\cdot 4 - 5\cdot 6 + 7\cdot 8 -+ \cdots$$

$$f_1(4) = \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \frac{(2s)!}{(2s-3)!} = 2\cdot 3\cdot 4 - 4\cdot 5\cdot 6 + 6\cdot 7\cdot 8 - 8\cdot 9\cdot 10 +- \cdots$$

であるから、これらは明らかに発散級数である。

然るに、これらのクノップ変換は任意の$q>0$について絶対収束し、次のようになる。

$$f_2(3,q)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^s\frac{(2s)!}{(2s-2)!}=\frac{1}{2}$$

$$f_2(4,q)=\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{r}\frac{q^{r-s}}{(q+1)^{r+1}}\binom{r}{s}(-1)^s\frac{(2s)!}{(2s-3)!}=0$$

これらの定義域は全自然数であるから、**定理10・3・2 (2)** により

$$"1\cdot 2-3\cdot 4+5\cdot 6-7\cdot 8+-\cdots"=-\frac{1}{2}$$

$$"2\cdot 3\cdot 4-4\cdot 5\cdot 6+6\cdot 7\cdot 8-8\cdot 9\cdot 10+-\cdots"=0$$

と解釈されなければならない。

実はこれらは、次式において収束条件を無視して$x=1$と置いても得ることができる。
(「 11 項別高階微分(逆三角・逆双曲線) 」参照。)

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)}=\sum_{k=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n}\qquad |x|<1$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{(n-1)!}{\left(x^2+1\right)^n}\sum_{r=1}^{\lceil n/2\rceil}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\,x^{n+1-2r}$$

本例はこの条件無視に正当性を与えるものである。

2014.10.04

Kano. kono

宇宙人の数学