11 ガンマ関数の逆数の級数展開

11・1　整数を根とする関数

負整数 $x=-1,-2,-3,\cdots$ を根とする関数 $f(z)$ は次のように記述できる。

$$f(z)=\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

しかしながら、この無限乗積は発散する。即ち、このような関数は単独では存在できない。
そこで、各因子に補正を加えた次のような関数を考える。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

すると、この無限乗積は任意の z について一様収束し、$e^{\gamma z}/\Gamma(1+z)$ なる関数に帰着する。
このことはワイエルシュトラウスによって示された。これを含めて色々な整数を根とする関数を示せば、次のようである。

なお、これらの左辺は z のベキ級数に展開できる。よって我々は、この公式を 0 の周りの因数分解 と呼ぶことにする。

公式 11・1・1（0の周りの因数分解）

γ をオイラー・マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=\frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)} \tag{1.1-}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}=\frac{e^{\gamma z}}{\Gamma(1-z)} \tag{1.1+}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n}\right)e^{-\frac{z}{2n}}=\frac{1}{\Gamma(1+z/2)}e^{-\frac{\gamma z}{2}} \tag{1.2-}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n}\right)e^{\frac{z}{2n}}=\frac{1}{\Gamma(1-z/2)}e^{\frac{\gamma z}{2}} \tag{1.2+}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)e^{-\frac{z}{2n-1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z} \tag{1.3-}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n-1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1-z)/2\}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z} \tag{1.3+}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)e^{-\frac{z}{2n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\frac{\gamma z}{2}} \tag{1.4-}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1-z)/2\}}e^{\frac{\gamma z}{2}} \tag{1.4+}$$

証明

ガンマ関数に関するワイエルシュトラウスの表示式は次のようであった。

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

これより、(1.1_-) が得られ、z の符号を反転して (1.1_+) が得られる。

(1.1_-), (1.1_+) において、z を $z/2$ に置換して (1.2_-), (1.2_+) が得られる。

次に、(1.1_-) を (1.2_-) で除せば

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)e^{-\frac{z}{2n-1}}=\frac{\Gamma(1+z/2)}{\Gamma(1+z)}\frac{e^{-\gamma z}}{e^{-\gamma z/2}}=\frac{\Gamma(z/2)}{2\Gamma(z)}e^{-\frac{\gamma z}{2}}$$

ここでル・ジャンドルの2倍公式により

$$\frac{\Gamma(z/2)}{2\Gamma(z)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^z}\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}=\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-z\log 2}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}$$

これを上に代入して

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)e^{-\frac{z}{2n-1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)z} \tag{1.3$_-$}$$

そして、z の符号を反転して (1.3_+) が得られる。

次に、

$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{z}{2n-1}}\cdot e^{-\frac{z}{2n}}=e^{z\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots\right)}=e^{z\log 2}$$

であるから、これを (1.3_-) に辺々乗じれば

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)e^{-\frac{z}{2n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}e^{-\frac{\gamma z}{2}} \tag{1.4$_-$}$$

そして、z の符号を反転して (1.4_+) を得る。

これらの公式に $z=1$ を与えることによって次の特殊値を得る。

特殊値

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}=e^{-\gamma}=0.56145948\cdots \tag{1.1$_-^1$}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\gamma}{2}}=0.84550128\cdots \tag{1.2$_-^1$}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)e^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{\gamma}{2}}=0.75294950\cdots \tag{1.2$_+^1$}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)e^{-\frac{1}{2n-1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}}=0.66405515\cdots \tag{1.3$_-^1$}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)e^{-\frac{1}{2n}}=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\gamma}{2}}=1.32811030\cdots \tag{1.4$_-^1$}$$

公式 11･1･1 より、次の系が従う。

系 11･1･1

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}\right)=\frac{1}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)}=\frac{\sin\pi z}{\pi z} \tag{1.1}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n}\right)\left(1-\frac{z}{2n}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\frac{2}{\pi z}\sin\frac{\pi z}{2} \tag{1.2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)\left(1-\frac{z}{2n-1}\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}=\cos\frac{\pi z}{2} \tag{1.3}$$

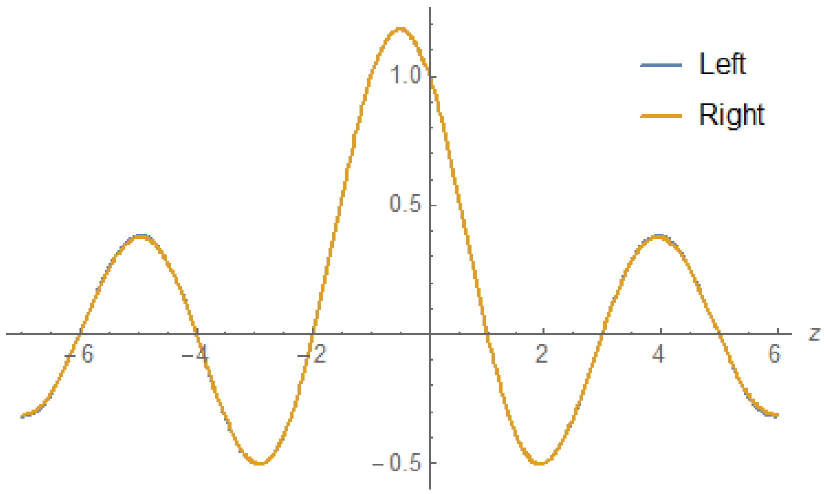
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)\left(1-\frac{z}{2n}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)} \tag{1$_-$2$_+$}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n-1}\right)\left(1+\frac{z}{2n}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)} \tag{1$_+$2$_-$}$$

(1.1) は全整数を根とする関数である。(1.2) は全偶数を根とする関数であり、(1.3) は全奇数を根とする関数である。これらは初等関数で表される。

(1$_-$2$_+$) は負の奇数と正の偶数を根とする関数であり、(1$_+$2$_-$) は正の奇数と負の偶数を根とする関数である。これらは初等関数では表すことができない。

(1$_+$2$_-$) の両辺を図示すれば次のとおり。積は500項計算しているが、両辺はぴったり重なっていて左辺(青)は見えない。



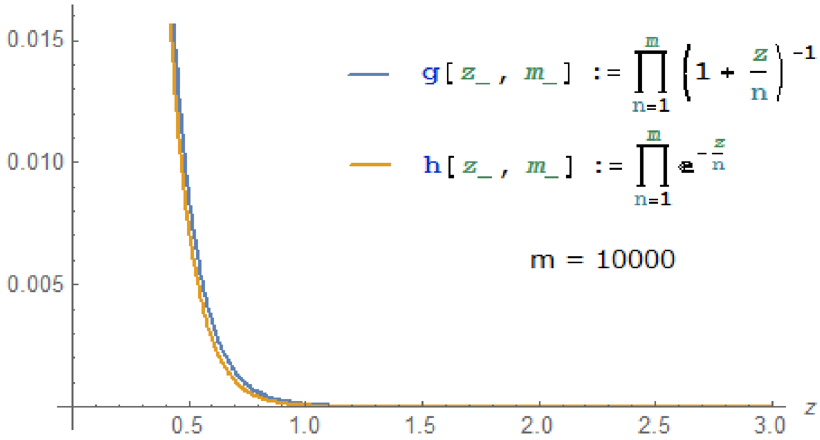
補正項

(1.1$_-$) を例にとって議論する。

$$\frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{1.1$_-$}$$

これの補正項は $e^{-z/n}$ であるが、この補正項はこれに限られる必要はない。そもそも右辺の完全な補正項は $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}$ である。ところが、このような補正項を採用すれば、左辺の関数は定数関数となり、利用価値がなくなる。これが $e^{-z/n}$ のような補正項が採用される理由である。

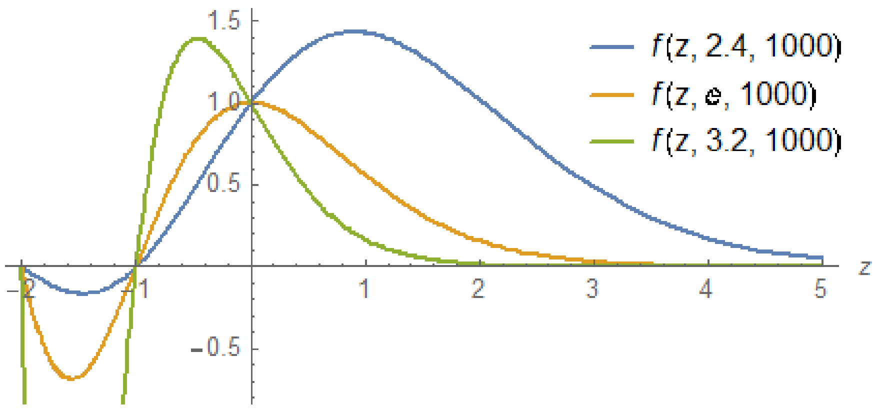
実際、本体と補正項を描くと次のようである。積はそれぞれ 10000 項採っている。両者は非常に接近しているが重なってはいない。



この図から考えても、指数関数以外の関数が補正項になり得るとは考え難い。しかし、指数関数でさえあればこれ以外でも良さそうである。そこで次のような指数関数を考える。

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)c^{-\frac{z}{n}} \qquad c>1$$

条件 $c>1$ の必要性は明らかであり、これさえ満たせば何でもOKである。例えば、$c=2.4$, $c=2.71828\cdots$, $c=3.2$ について $f(z)$ を図示すると次のとおりである。



$c=e$ のときに $f(z)$ の最大値が最小であることが分かる。実際、c が e から大きく乖離すると $f(z)$ の最大値はとんでもない大きさになる。これを勘案すれば、$e^{-z/n}$ は補正項として最適と思われる。

11·2 マクローリン展開

ガンマ関数の逆数は全複素平面で正則であるから、マクローリン展開が可能な筈である。本節では、発散乗積や発散級数を関数または数として扱うことによって、ガンマ関数の逆数のマクローリン展開を目指す。

公式 11·2·1

γ をオイラー・マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、H_n を調和数、H を調和級数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1+\gamma z+\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)z^2 + \left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)z^3+\cdots \tag{2.1-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = 1-\gamma z+\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)z^2 - \left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)z^3+-\cdots \tag{2.1+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = 1+\frac{\gamma}{2}z+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)z^2 + \frac{1}{2^3}\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)z^3+\cdots \tag{2.2-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z/2)} = 1-\frac{\gamma}{2}z+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)z^2 - \frac{1}{2^3}\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)z^3+-\cdots \tag{2.2+}$$

証明

ワイエルシュトラウスの表示式より

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{2.1-}$$

調和数を H_n、調和級数を H と表すことにすれば、補正項は

$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z}{n}} = e^{-z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}} = e^{-Hz}$$

よって

$$e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z}{n}} = e^{(\gamma-H)z} = 1+\frac{\gamma-H}{1!}z^1+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}z^2+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}z^3+\cdots \tag{2.1e}$$

次に、本体が次のように級数展開されると仮定する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right) = \left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\cdots$$
$$= 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

すると、根と係数の関係から、

$$a_1 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots = H$$

$$a_2 = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)+\cdots$$

$$= \frac{H-H_1}{1}+\frac{H-H_2}{2}+\frac{H-H_3}{3}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}$$

$$a_3 = \frac{1}{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)+\frac{1}{1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\right)+\cdots$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{1}\frac{1}{2}(H-H_2)+\frac{1}{1}\frac{1}{3}(H-H_3)+\frac{1}{1}\frac{1}{4}(H-H_4)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{3}(H-H_3)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}(H-H_4)+\frac{1}{2}\frac{1}{5}(H-H_5)+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}\frac{1}{4}(H-H_4)+\frac{1}{3}\frac{1}{5}(H-H_5)+\frac{1}{3}\frac{1}{6}(H-H_6)+\cdots$$

$$+$$

$$\vdots$$

対角線に沿って並べ替えると

$$a_3 = \left(\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2}(H-H_2)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}(H-H_3)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}(H-H_4)+\cdots$$

$$= H_1\frac{1}{2}(H-H_2)+H_2\frac{1}{3}(H-H_3)+H_3\frac{1}{4}(H-H_4)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}$$

かくて、

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right) = 1+zH+z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}+z^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}+\cdots \tag{2.1p}$$

(2.1-) の右辺は (2.1e) と (2.1p) の積である。即ち、

$$e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z}{n}} = 1+\frac{\gamma-H}{1!}z^1+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}z^2+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}z^3+\cdots \tag{2.1e}$$

$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right) = 1+zH+z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}+z^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}+\cdots \tag{2.1p}$$

これらのコーシー積を取れば、

z^1 の係数は

$$H+\frac{\gamma-H}{1!}=\gamma$$

z^2 の係数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}+\frac{H(\gamma-H)}{1!}+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}=H^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}+\frac{H\gamma}{1!}-\frac{H^2}{1!}+\frac{\gamma^2-2\gamma H+H^2}{2!}$$

$$=\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}$$

z^3 の係数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}+\frac{\gamma-H}{1!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}+\frac{H(\gamma-H)^2}{2!}+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}+\frac{\gamma-H}{1!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma-H)H_n}{n}+\frac{H(\gamma-H)^2}{2!}+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}$$

$$=\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)$$

よって

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=1+\gamma z+\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)z^2$$

$$+\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)z^3+\cdots \tag{2.1-}$$

(2.1+), (2.2-) (2.2+) はこれから容易に得られる。

検算

(2.1-) の左辺の普通のマクローリン展開は次のようである。$\psi_n(z)$ はポリガンマ関数である。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=1+\gamma z+\left(\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\pi^2}{12}\right)z^2+\left(\frac{\gamma^3}{3!}-\frac{\gamma\pi^2}{12}-\frac{\psi_2(1)}{6}\right)z^3+\cdots$$

$$=1+0.5772157\,z-0.6558781\,z^2-0.04200264\,z^3+\cdots$$

従って、次式が成立しなければならない。

$$\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}=\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\pi^2}{12}=-0.655878\cdots$$

$$\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)=\frac{\gamma^3}{3!}-\frac{\gamma\pi^2}{12}-\frac{\psi_2(1)}{6}$$

$$=-0.0420026\cdots$$

調和級数は無限大であるから、検算に際しては次の極限値を使用する。

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_m^2}{2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n}\right)$$

数式処理ソフト*Mathematica* でこれらを計算したところ次の結果を得た。各項の係数はほぼ上の数値に一致しており、よって本公式の正しさが数値的に検証された。

```
H[m_] := HarmonicNumber[m]        γ := EulerGamma
```

$$c2[m\_] := \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{H[m]^2}{2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{H[n]}{n}$$

```
N[c2[20 000]]
-0.655853
```

```
Limit[c2[m], m → ∞]
```

$$\frac{1}{12}\left(6\,\text{EulerGamma}^2 - \pi^2\right)$$

$$c3[m\_] := \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma H[m]^2}{2} - \frac{2H[m]^3}{3} + \sum_{n=1}^{m} H[n]\left(\frac{H[m]-H[n+1]}{n+1} - \frac{\gamma - H[m]}{n}\right)$$

```
N[c3[40 000]]
-0.0419954
```

また、次の特殊値が得られた。

特殊値

$$H^2 - 2!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n} = -\frac{\pi^2}{6} = -\zeta(2) \qquad : \textit{Riemann Zeta} \tag{2.3}$$

$$4H^3 - 3!\sum_{n=1}^{\infty} H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1} + \frac{H}{n}\right) = \psi_2(1) = -2.404113\cdots \tag{2.4}$$

より簡単な (2.3) を書き下すと次のとおり。

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)^2 - 2!\left\{\frac{1}{1}\left(1\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\right\} = -\zeta(2)$$

Note

z^4 の係数中には H や H_n の2重級数が現れ、z^5 の係数中には3重級数が現れる。これらはポリガンマ関数による表記よりも遥かに複雑ある。よって、本章ではこれらを計算しない。

11･3　1 の周りの因数分解

第1節 公式 11･1･1 において z を $z-1$ に置換して次の公式を得る。これらの左辺は $z-1$ のベキ級数に展開できる。よって我々は、この公式を 1 の周りの因数分解 と呼ぶことにする。

公式 11･3･1

γ をオイラー･マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{-\frac{z-1}{n}} \tag{3.1-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-z)} = e^{-\gamma(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{z-1}{n}} \tag{3.1+}$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}} = e^{\frac{\gamma(z-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n}\right)e^{-\frac{z-1}{2n}} \tag{3.2-}$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}} = e^{-\frac{\gamma(z-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{2n}\right)e^{\frac{z-1}{2n}} \tag{3.2+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n-1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n-1}} \tag{3.3-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{2n-1}\right)e^{\frac{z-1}{2n-1}} \tag{3.3+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{\gamma(z-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n-1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n}} \tag{3.4-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\gamma(z-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{2n-1}\right)e^{\frac{z-1}{2n}} \tag{3.4+}$$

この公式から、更に次の公式が得られる。

公式 11･3･2

γ をオイラー･マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{(\gamma-1)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{n+1}} \tag{3.5-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -(z-1)e^{-\gamma(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{z-1}{n}} \tag{3.5+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-1\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n+1}} \tag{3.6-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{\gamma(z-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n}} \tag{3.7-}$$

証明

(3.1_-) の両辺を z で除せば

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma(z-1)}\frac{1}{z}\left(1+\frac{z-1}{1}\right)e^{-\frac{z-1}{1}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{n+1}}$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{(\gamma-1)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{n+1}} \qquad (3.5_-)$$

(3.1_+) の両辺に $(1-z)$ を乗じれば

$$\frac{1-z}{\Gamma(2-z)} = -(z-1)e^{-\gamma(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{z-1}{n}}$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -(z-1)e^{-\gamma(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z-1}{n}\right)e^{\frac{z-1}{n}} \qquad (3.5_+)$$

(3.3_-) の両辺を $z/2$ で除せば

$$\frac{1}{(z/2)\Gamma(z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\frac{1}{z}\left(1+\frac{z-1}{2\cdot1-1}\right)e^{-\frac{z-1}{2\cdot1-1}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n+1}}$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-1\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n+1}} \qquad (3.6_-)$$

(3.4_-) の両辺を $z/2$ で除せば

$$\frac{1}{(z/2)\Gamma(z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{\gamma(z-1)}{2}}\frac{1}{z}\left(1+\frac{z-1}{2\cdot1-1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n}}$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{\gamma(z-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n}} \qquad (3.7_-)$$

この公式の (3.5_-), (3.6_-), (3.7_-) に $z=2$ を与えることによって次の特殊値を得る。

特殊値

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)e^{-\frac{1}{n+1}} = \frac{e^{1-\gamma}}{2} = 0.763102\cdots \qquad (3.5^2_-)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)e^{-\frac{1}{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)} = 0.902544\cdots \qquad (3.6^2_-)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)e^{-\frac{1}{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}} = 0.664055\cdots \qquad (3.7^2_-)$$

11・4 テイラー展開（その1）

公式 11・4・1

γ をオイラー・マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、H_n を調和数、H を調和級数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=1+\gamma(z-1)+\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^2+\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)(z-1)^3+\cdots \tag{4.1-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-z)}=1-\gamma(z-1)+\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^2-\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)(z-1)^3+-\cdots \tag{4.1+}$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}=1+\frac{\gamma}{2}(z-1)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^2+\frac{1}{2^3}\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)(z-1)^3+\cdots \tag{4.2-}$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}=1-\frac{\gamma}{2}(z-1)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^2-\frac{1}{2^3}\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)(z-1)^3+-\cdots \tag{4.2+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=-(z-1)+\gamma(z-1)^2-\left(\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^3+\left(\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{\gamma H^2}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}-\frac{\gamma-H}{n}\right)\right)(z-1)^4-+\cdots \tag{4.5+}$$

証明

第2節 公式 11・2・1 の (2.1-) ～ (2.2+) において z を $z-1$ に置換して (4.1-) ～ (4.2+) を得る。(4.5+) は (4.1+) の両辺に $1-z$ を乗じて得られる。

公式 11・4・2

γ をオイラー・マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、H_n を調和数、H を調和級数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=1-\left(1-\frac{\gamma}{1!}\right)(z-1)+\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^2-\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{H^2(1-\gamma)}{2}+\frac{2H^3}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1-\gamma+H}{n}\right)\right)(z-1)^3+\cdots \tag{4.5-}$$

証明

公式 11･3･2 (3.5-) は次のようであった。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=e^{(\gamma-1)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)e^{-\frac{z-1}{n+1}} \tag{3.5-}$$

先ず、補正項は

$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{n+1}}=e^{-(z-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}}=e^{(z-1)-(z-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}=e^{-(H-1)(z-1)}$$

よって

$$e^{(\gamma-1)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{n+1}}=e^{(\gamma-1)(z-1)}e^{-(H-1)(z-1)}=e^{(\gamma-H)(z-1)}$$

これを展開して

$$e^{(\gamma-1)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{n+1}}=1+\frac{\gamma-H}{1!}(z-1)^1+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}(z-1)^2+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}(z-1)^3+\cdots \tag{4.1e}$$

本体は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)=\left(1+\frac{z-1}{2}\right)\left(1+\frac{z-1}{3}\right)\left(1+\frac{z-1}{4}\right)\left(1+\frac{z-1}{5}\right)\cdots$$
$$=1+a_1(z-1)^1+a_2(z-1)^2+a_3(z-1)^3+\cdots$$

とするとき、根と係数の関係から、

$$a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=H-1$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\cdots$$
$$=\frac{H-H_1}{1}+\frac{H-H_2}{2}+\frac{H-H_3}{3}+\cdots-\frac{H-1}{1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}-\frac{H-1}{1}$$

$$a_3=\frac{1}{2}\frac{1}{3}(H-H_3)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}(H-H_4)+\frac{1}{2}\frac{1}{5}(H-H_5)+\cdots$$
$$+\frac{1}{3}\frac{1}{4}(H-H_4)+\frac{1}{3}\frac{1}{5}(H-H_5)+\frac{1}{3}\frac{1}{6}(H-H_6)+\cdots$$
$$+\frac{1}{4}\frac{1}{5}(H-H_5)+\frac{1}{4}\frac{1}{6}(H-H_6)+\frac{1}{4}\frac{1}{7}(H-H_7)+\cdots$$
$$+$$
$$\vdots$$
$$=\frac{1}{1}\frac{1}{2}(H-H_2)+\frac{1}{1}\frac{1}{3}(H-H_3)+\frac{1}{1}\frac{1}{4}(H-H_4)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{3}(H-H_3)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}(H-H_4)+\frac{1}{2}\frac{1}{5}(H-H_5)+\cdots$$
$$+\frac{1}{3}\frac{1}{4}(H-H_4)+\frac{1}{3}\frac{1}{5}(H-H_5)+\frac{1}{3}\frac{1}{6}(H-H_6)+\cdots$$

$$+$$
$$\vdots$$
$$-\frac{1}{1}\frac{1}{2}(H-H_2)-\frac{1}{1}\frac{1}{3}(H-H_3)-\frac{1}{1}\frac{1}{4}(H-H_4)-\cdots$$

対角線に沿って並べ替えると

$$a_3=\left(\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2}(H-H_2)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}(H-H_3)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}(H-H_4)+\cdots$$
$$-\frac{1}{1}\frac{1}{2}(H-H_2)-\frac{1}{1}\frac{1}{3}(H-H_3)-\frac{1}{1}\frac{1}{4}(H-H_4)-\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n-1)(H-H_{n+1})}{n+1}$$

かくて、

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)=1+(z-1)(H-1)+(z-1)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}-\frac{H-1}{1}\right)$$
$$+(z-1)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n-1)(H-H_{n+1})}{n+1}+\cdots \tag{4.1p}$$

(3.5-) の右辺は (4.1e) と (4.1p) の積である。即ち、

$$e^{(\gamma-1)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{n+1}}=1+\frac{\gamma-H}{1!}(z-1)^1+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}(z-1)^2+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}(z-1)^3+\cdots$$
$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{n+1}\right)=1+(z-1)(H-1)+(z-1)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}-\frac{H-1}{1}\right)$$
$$+(z-1)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n-1)(H-H_{n+1})}{n+1}+\cdots$$

これらのコーシー積を取れば、

$(z-1)^1$ の係数は

$$\frac{\gamma-H}{1!}+H-1=-\left(1-\frac{\gamma}{1!}\right)$$

$(z-1)^2$ の係数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}-\frac{H-1}{1}+\frac{(\gamma-H)(H-1)}{1!}+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}+H^2-\frac{H-1}{1}+\frac{\gamma(H-1)}{1!}-\frac{H(H-1)}{1!}+\frac{(\gamma-H)^2}{2!}$$
$$=1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}$$

$(z-1)^3$ の係数は次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n-1)(H-H_{n+1})}{n+1}+\frac{\gamma-H}{1!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}-\frac{H-1}{1}\right)+\frac{(\gamma-H)^2(H-1)}{2!}+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}=H^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n-1)(H-H_{n+1})}{n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H-H_{n+1})}{n+1}-H\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}-\frac{H_1}{1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n}\right)-H^2+H-1\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n-1)(H-H_{n+1})}{n+1}+\frac{\gamma-H}{1!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H-H_n}{n}-\frac{H-1}{1}\right)+\frac{(\gamma-H)^2(H-1)}{2!}+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n}\right)-H^2+H-1+\frac{\gamma-H}{1!}\left(H^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}-\frac{H-1}{1}\right)\\&\qquad+\frac{(\gamma-H)^2(H-1)}{2!}+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1-r+H}{n}\right)-H^2+H-1+\frac{\gamma-H}{1!}\left(H^2-\frac{H-1}{1}\right)\\&\qquad+\frac{(\gamma-H)^2(H-1)}{2!}+\frac{(\gamma-H)^3}{3!}\\&=-\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}\right)-\frac{H^2(1-\gamma)}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1-\gamma+H}{n}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1+z)}&=1-\left(1-\frac{\gamma}{1!}\right)(z-1)+\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\right)(z-1)^2\\&-\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}+\frac{H^2(1-\gamma)}{2}+\frac{2H^3}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1-\gamma+H}{n}\right)\right)(z-1)^3+\cdots\end{aligned}$$

検算

(4.5-) の左辺の普通のテイラー展開は次のようである。なお、$\psi_n(z)$ はポリガンマ関数である。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1+z)}&=1-\left(1-\frac{\gamma}{1!}\right)(z-1)+\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\pi^2}{12}\right)(z-1)^2\\&\qquad-\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}-\frac{(1-\gamma)\pi^2}{12}+\frac{\psi_2(1)}{6}\right)(z-1)^3+-\cdots\\&=1-0.4227843(z-1)-0.2330937(z-1)^2+0.1910911(z-1)^3+\cdots\end{aligned}$$

従って、次式が成立しなければならない。

$$1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{H^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}=1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\pi^2}{12}=-0.233093\cdots$$

$$-\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}\right)-\frac{H^2(1-\gamma)}{2}-\frac{2H^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{H-H_{n+1}}{n+1}+\frac{1-\gamma+H}{n}\right)$$

$$=-\left(1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}\right)+\frac{(1-\gamma)\pi^2}{12}-\frac{\psi_2(1)}{6}=0.191091\cdots$$

数式処理ソフト *Mathematica* でこれらを計算したところ次の結果を得た。各項の係数はほぼ上の数値に一致している。

```
H[m_] := HarmonicNumber[m]        γ := EulerGamma
```

$$\texttt{c2[m\_]} := 1-\frac{\gamma}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{\texttt{H[m]}^2}{2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\texttt{H[n]}}{n}$$

```
N[c2[20000]]                Limit[c2[m], m → ∞]
-0.233069
```

$$1-\text{EulerGamma}-\frac{\text{EulerGamma}^2}{2}-\frac{\pi^2}{12}$$

$$\texttt{c3[m\_]} := -\left(1-\frac{\gamma^1}{1!}+\frac{\gamma^2}{2!}-\frac{\gamma^3}{3!}\right)-\frac{\texttt{H[m]}^2\,(1-\gamma)}{2}-\frac{2\,\texttt{H[m]}^3}{3}+\sum_{n=1}^{m}\texttt{H[n]}\left(\frac{\texttt{H[m]}-\texttt{H[n+1]}}{n+1}+\frac{1-\gamma+\texttt{H[m]}}{n}\right)$$

```
N[c3[20000]]
0.191081
```

11･5 テイラー展開(その2)

奇調和数と奇調和級数(定義)

奇調和数 h_n と奇調和級数 h をそれぞれ次のように定義する。

$$h_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} = H_{2n-1} - \frac{H_{n-1}}{2} \tag{5.hn}$$

$$h = h_\infty = \frac{H}{2}+\log 2 \tag{5.h}$$

公式 11･5･1

γ をオイラー･マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、h_n を奇調和数、h を奇調和級数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2)} = 1 + c_1(z-1)^1 + c_2(z-1)^2 + c_3(z-1)^3 + \cdots \tag{5.3-}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-z/2)} = 1 - c_1(z-1)^1 + c_2(z-1)^2 - c_3(z-1)^3 +- \cdots \tag{5.3+}$$

但し

$$c_1 = \frac{\gamma}{2}+\log 2$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2+\frac{h^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1}$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)-\frac{2h^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{h-h_{n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)\right)$$

$$\vdots$$

証明

公式 11･3･1 (3.3-) より

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2)} = e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n-1}\right)e^{-\frac{z-1}{2n-1}} \tag{5.3-}$$

先ず、補正項は

$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{2n-1}} = e^{-(z-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}} = e^{-h(z-1)}$$

よって

$$e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{2n-1}} = e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}e^{-h(z-1)} = e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)(z-1)}$$

これを展開して

$$e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{2n-1}} = 1+\frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)(z-1)^1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)^2(z-1)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)^3(z-1)^3+\cdots \tag{5.1e}$$

本体は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n-1}\right) = \left(1+\frac{z-1}{1}\right)\left(1+\frac{z-1}{3}\right)\left(1+\frac{z-1}{5}\right)\left(1+\frac{z-1}{7}\right)\cdots$$
$$= 1 + a_1(z-1)^1 + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \cdots$$

とするとき、根と係数の関係から、

$$a_1 = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots = h$$

$$a_2 = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots\right)+\cdots$$
$$= \frac{h-h_1}{1}+\frac{h-h_2}{3}+\frac{h-h_3}{5}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h-h_n}{2n-1}$$

$$a_3 = \frac{1}{1}\frac{1}{3}(h-h_2)+\frac{1}{1}\frac{1}{5}(h-h_3)+\frac{1}{1}\frac{1}{7}(h-h_4)+\cdots$$
$$+\frac{1}{3}\frac{1}{5}(h-h_3)+\frac{1}{3}\frac{1}{7}(h-h_4)+\frac{1}{3}\frac{1}{9}(h-h_5)+\cdots$$
$$+\frac{1}{5}\frac{1}{7}(h-h_4)+\frac{1}{5}\frac{1}{9}(h-h_5)+\frac{1}{5}\frac{1}{11}(h-h_6)+\cdots$$
$$+$$
$$\vdots$$

対角線に沿って並べ替えると

$$a_3 = \left(\frac{1}{1}\right)\frac{1}{3}(h-h_2)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{5}(h-h_3)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{7}(h-h_4)+\cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n(h-h_{n+1})}{2n+1}$$

かくて、

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n-1}\right) = 1 + (z-1)h + (z-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h-h_n}{2n-1} + (z-1)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n(h-h_{n+1})}{2n+1} + \cdots \tag{5.1p}$$

(5.3-) の右辺は (5.1e) と (5.1p) の積である。即ち、

$$e^{\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{z-1}{2n-1}} = 1+\frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)(z-1)^1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)^2(z-1)^2$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)^3(z-1)^3+\cdots$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{2n-1}\right) = 1 + (z-1)h + (z-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h-h_n}{2n-1} + (z-1)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n(h-h_{n+1})}{2n+1} + \cdots$$

これらのコーシー積を取れば、

$(z-1)^1$ の係数は

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)+h=\frac{\gamma}{2}+\log 2$$

$(z-1)^2$ の係数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h-h_n}{2n-1}+\frac{h}{1!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)^2$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1}+h^2+\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)h-h^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2-\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)h+\frac{h^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2+\frac{h^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1}$$

$(z-1)^3$ の係数は、同様に計算して、次のようになる。

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)-\frac{2h^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{h-h_{n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)\right)$$

よって

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2)}=1+\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)(z-1)+\left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2+\frac{h^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1}\right\}(z-1)^2$$

$$+\left\{\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)-\frac{2h^3}{3}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{h-h_{n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)\right)\right\}(z-1)^2+\cdots$$

そして、これを交代級数にしたものが (5.3+) となる。

検算

(5.3-) の左辺の普通のテイラー展開は次のようである。なお、$\psi_n(z)$ はポリガンマ関数である。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2)}=1-\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)(z-1)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}\psi_0^2\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi^2}{8}\right)(z-1)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{3}{16}\pi^2\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\psi_0^3\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)(z-1)^3+\cdots$$

$$=1+0.981755(z-1)-0.134928(z-1)^2-0.097286(z-1)^3+\cdots$$

従って、次式が成立しなければならない。

$$\frac{\gamma}{2}+\log 2=-\frac{1}{2}\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)=0.981755$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2+\frac{h^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1}=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}\psi_0^2\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi^2}{8}\right)=-0.134928\cdots$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)-\frac{2h^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{h-h_{n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2-h\right)\right)$$

$$=\frac{1}{3!}\left(\frac{3}{16}\pi^2\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\psi_0^3\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=-0.0972863\cdots$$

数式処理ソフト *Mathematica* でこれらを計算したところ次の結果を得た。各項の係数はほぼ上

の数値に一致している。

```
H[m_] := HarmonicNumber[m]        γ := EulerGamma
```

$$c2[m\_] := \frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{Log}[2]\right)^2+\frac{h[m]^2}{2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{h[n]}{2n-1}$$

```
N[c2[20000]]
-0.134923
```

$$c3[m\_] := \frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{Log}[2]\right)^3+\frac{h[m]^2}{2}\left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{Log}[2]\right)-\frac{2h[m]^3}{3}$$
$$+\sum_{n=1}^{m}h[n]\left(\frac{h[m]-h[n+1]}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{Log}[2]-h[m]\right)\right)$$

```
N[c3[20000]]
-0.0972802
```

また、次の特殊値が得られた。

特殊値

$$h^2-2!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1} = -\frac{\pi^2}{8} = -\lambda(2) \quad : \textit{Dirichlet Lambda} \tag{5.4}$$

$$4h^3-3!\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{h-h_{n+1}}{2n+1}+\frac{h}{2n-1}\right) = \frac{1}{2^3}\psi_2\left(\frac{1}{2}\right) = -2.10359958\cdots \tag{5.5}$$

簡単な方の (5.4) を書き下すと次のとおり。

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)^2-2!\left\{\frac{1}{1}\left(1\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right\} = -\lambda(2)$$

公式 11･5･2

γ をオイラー･マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、h_n を奇調和数、h を奇調和級数とするとき、次式が成立する。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1+z/2)} = 1-c_1(z-1)^1+c_2(z-1)^2-c_3(z-1)^3+\cdots \tag{5.6-}$$

但し

$$c_1 = 1-\frac{\gamma}{2}-\log 2$$

$$c_2 = 1-\frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2+\frac{h^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2n-1}$$

$$c_3 = 1-\frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}+\log 2\right)^3+\frac{h^2}{2}\left(1-\frac{\gamma}{2}-\log 2\right)$$
$$+\frac{2h^3}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}h_n\left(\frac{h-h_{n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\left(1-\frac{\gamma}{2}-\log 2+h\right)\right)$$

⋮

証明

前節 公式 11･4･2 の証明と類似の方法で与式を得る。

検算

(5.6-) の左辺を数式処理ソフトで1の周りでテイラー展開すると次のようになる。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1+z/2)} = 1 - 0.01824(z-1)^1 - 0.11668(z-1)^2 + 0.01939(z-1)^3 + \cdots$$

他方、公式に従い係数 c_1, c_2, c_3 を計算したところ次の結果を得た。両者はほぼ一致している。

```
H[n_] := HarmonicNumber[n]        h[n_] := H[2 n - 1] - H[n - 1]/2
γ := EulerGamma
```

$$\text{c1} := 1 - \frac{\gamma}{2} - \text{Log}[2]$$

```
N[-c1]
-0.018245
```

$$\text{c2}[m\_] := 1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right)^2 + \frac{\text{h}[m]^2}{2} - \sum_{n=1}^{m}\frac{\text{h}[n]}{2\,n - 1}$$

```
N[c2[30 000]]
-0.116678
```

$$\begin{aligned}\text{c3}[m\_] := {} & 1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right)^2 \\ & - \frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2} + \text{Log}[2]\right)^3 + \frac{\text{h}[m]^2}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{2} - \text{Log}[2]\right) + \frac{2\,\text{h}[m]^3}{3} \\ & - \sum_{n=1}^{m}\text{h}[n]\left(\frac{\text{h}[m] - \text{h}[n+1]}{2\,n+1} + \frac{1}{2\,n-1}\left(1 - \frac{\gamma}{2} - \text{Log}[2] + \text{h}[m]\right)\right)\end{aligned}$$

```
N[-c3[5000]]
0.019397
```

11･6 オイラー･マスケロ二定数関数

前節まで、発散級数や発散乗積を関数または数として扱うことによって、ガンマ関数の逆数の級数展開を行った。無限乗積からベキ級数を導出することには成功したが、一般式を得ることは出来なかった。

しかしながら、発散乗積や発散級数を関数または数として扱うことには少なからぬメリットがある。本節ではその1例を示す。

公式 11･6･1

γ をオイラー･マスケロ二の定数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、次式が成立する。

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{z}\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}-\frac{\log\Gamma(1+z)}{z} \equiv g(z) \qquad Re(z)>-1 \tag{6.1}$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{6.1'}$$

$$\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{z}\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}=0 \tag{6.2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\log\Gamma(1+z)}{z}=-\gamma \tag{6.3}$$

証明

公式 11･1･1 (1.1-) は次のようであった。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=\frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)} \tag{1.1-}$$

左辺は次のように変形できる。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=e^{\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)}\cdot e^{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n}}=e^{\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n}}$$

右辺も次のように変形できる。

$$\frac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)}=e^{-\log\Gamma(1+z)}e^{-\gamma z}=e^{-\log\Gamma(1+z)-\gamma z}$$

よって

$$e^{\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n}}=e^{-\log\Gamma(1+z)-\gamma z}$$

両辺の対数を取って符号を反転すれば

$$\gamma z+\log\Gamma(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n}-\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

これより

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{z}\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}-\frac{\log\Gamma(1+z)}{z} \qquad Re(z)>-1 \tag{6.1}$$

特に $z=1$ のとき、

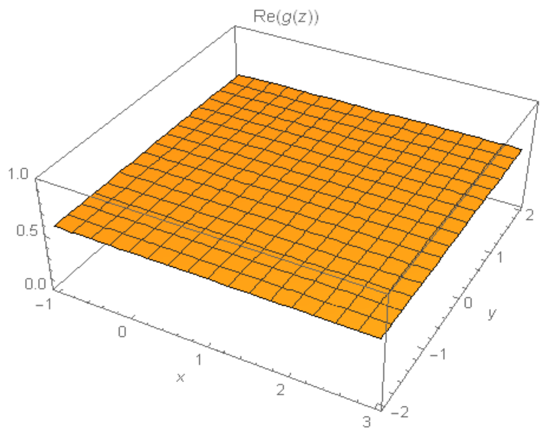
$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{6.1'}$$

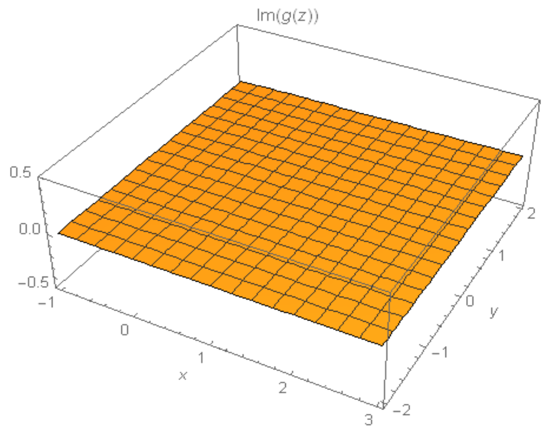
次に、(6.3) の左辺において z を Δz に置換すれば

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\log\Gamma(1+\Delta z)}{\Delta z} = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z)\bigg|_{z=1} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \psi(1) = -\gamma$$

よって (6.3) が成立する。そしてこれと (6.1) より (6.2) が従う。

(6.1) の3D図は次のとおり。左図は実数部で右図は虚数部である。



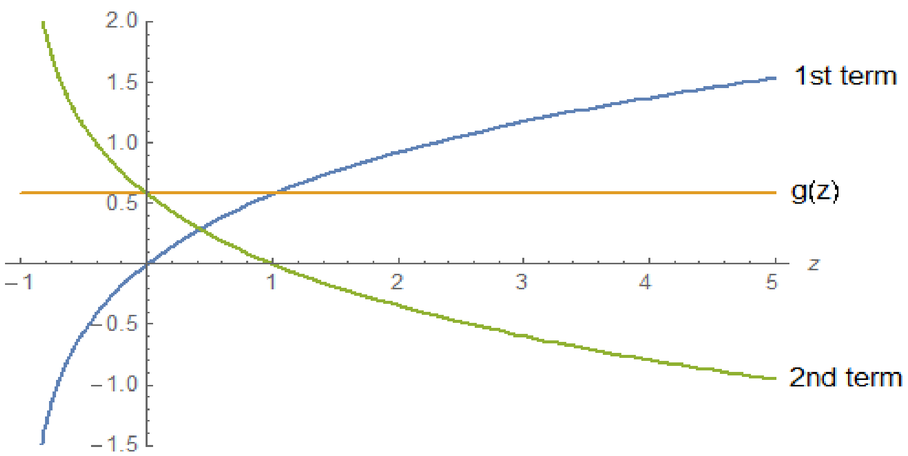


定義域は $Re(z) > -1$ である。この半平面のどこでも実数部は 0.57721566… であり、虚数部は 0 である。つまり、この関数 $g(z)$ はオイラー・マスケロニの定数 γ を与える定数関数である。

γ を得るためにはこの半平面上のどの値を選んでも良く、(6.1') はその1つである。しかしながら、収束速度を考えれば (6.1') は良い選択とは言えない。次は有効桁数5桁を得るために必要な z の値と項数を調べたものである。

```
N[{g[2, 70000], g[1, 35000], g[0.001, 34], g[0.0001, 3]}
  {0.577201    , 0.577201    , 0.577201    , 0.577201}
```

これによると、有効数字5桁を得るのに $z=1$ のときは 35000 項が必要なのに対し、$z=0.0001$ のときは 3 項で足りている。その理由が (6.2) と (6.3) である。解りやすく図示すると次のとおり。



関数 $g(z)$ の第1項が青で第2項が黄緑である。これらは $g=\gamma/2$ を挟んで線対称である。それ故 $g(z)$ の関数値は z の値に関わらず γ である。我々はこの関数 $g(z)$ を**オイラー・マスケロニ定数関数** と呼ぶことにする。

$Re(z) > -1$ なる任意の z について $g(z)=\gamma$ であるが、特に $z=0$ のときは第1項が 0 で第2項が γ である。即ち、0 の近傍においては級数である第1項の役割は小さいのである。それが 0 の近傍において第1項の収束が速い理由である。

ちなみに、(6.3) に $z=0.000018$ を与えれば上と同精度の -0.577201 が得られる。

Note

(6.1') はオイラーの定義から直接得ることもできる。

$$\gamma = \lim_{m \to \infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \log m\right) = \lim_{m \to \infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{m}{m-1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{m \to \infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m-1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

2016.12.20

Kano Kono

宇宙人の数学