12 ガンマ関数とその逆数の級数展開

12・1　ガンマ関数とその逆数のテイラー展開

ガンマ関数の高階微分

2016年12月に宇井正幸氏により発見された公式(超微積分篇 22・3)を再掲すると次のとおり。

公式12・1・0 (宇井の公式)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ を Bell 多項式とするとき、次式が成立する。

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \Gamma(z)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)\right) \tag{0.1+}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)\right) \tag{0.1-}$$

証明

$f(z) = log\Gamma(z)$ のとき、

$$f_1 = \frac{d}{dz}log\Gamma(z) = \psi_0(z) \quad , \quad f_2 = \frac{d}{dz}\psi_0(z) = \psi_1(z) \quad , \quad \cdots$$

$$f_n = \frac{d}{dz}\psi_{n-2}(z) = \psi_{n-1}(z)$$

これらと $g_k = e^f \;\; k=1,2,3,\cdots$ を合成関数に関する $Fa\grave{a}\ di\ Bruno$ の公式

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} g_k B_{n,k}\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)$$

に代入すれば、

$$\left\{e^{log\Gamma(z)}\right\}^{(n)} = e^{log\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)\right) \tag{0.1+}$$

$f(z) = -log\Gamma(z)$ のとき、類似の方法で次式を得る。

$$\left\{e^{-log\Gamma(z)}\right\}^{(n)} = e^{-log\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)\right) \tag{0.1-}$$

この公式を用いて、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ とその逆数 $1/\Gamma(z)$ のテイラー展開が出来る。但し、$a=0,-1,-2,-3,\cdots$ の周りではテイラー展開できない。これらの点では微分係数が ∞ 又は 0 となるからである。

公式12・1・1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ を Bell 多項式とするとき、$a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ なる a について次式が成立する。

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(a)}{n!}(z-a)^n \tag{1.1}$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \dots, \psi_{n-1}(a)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$\Gamma(z)$ は $a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ の周りで次のようにテイラー展開できる。

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

これに 公式12･1･0 (0.1+) を適用し $\Gamma^{(n)}(a)$ を $c_n(a)$ に置換して与式を得る。

例　2の周りのテイラー展開(記号計算)

公式に従い $\Gamma(z)$ を2の周りでテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。3項まで展開すると次のとおり。

$$\text{Tbl}\psi[n\_, z\_] := \text{Table}[\psi_k[z], \{k, 0, n-1\}]$$

$$c[n\_, z\_] := \text{Gamma}[z]\sum_{k=1}^{n}\text{BellY}[n, k, \text{Tbl}\psi[n, z]]$$

$$\text{ft}[z\_, a\_, m\_] := \text{Gamma}[a] + \sum_{n=1}^{m}\frac{c[n, a]}{n!}(z-a)^n$$

$$\text{ft}[z, 2, 3]$$

$$1 + (-2+z)\,\psi_0[2] + \frac{1}{2}(-2+z)^2\left(\psi_0[2]^2 + \psi_1[2]\right) + \frac{1}{6}(-2+z)^3\left(\psi_0[2]^3 + 3\,\psi_0[2]\,\psi_1[2] + \psi_2[2]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series* [ ] を用いて $\Gamma(z)$ を2の周りで展開すると次のとおり。

```
Series[Gamma[z], {z, 2, 3}];
ReplaceAll[%, {EulerGamma → γ, PolyGamma[2, 2] -> ψ2[2]}];
Collect[%, (z - 2), Simplify]
```

$$1 + (-2+z)(1-\gamma) + \frac{1}{12}(-2+z)^2\left(\pi^2 + 6(-2+\gamma)\gamma\right) + \frac{1}{12}(-2+z)^3\left(-4-\pi^2(-1+\gamma) + 6\gamma^2 - 2\gamma^3 + 2\,\psi_2[2]\right)$$

両者は異なっているように見えるが同じものである。実際、$\psi_0[2] = 1-\gamma$, $\psi_1[2] = \pi^2/6 - 1$ を $f_t(z,2,3)$ に代入すると次のようになる。

$$\text{ReplaceAll}\left[\text{ft}[z, 2, 3], \left\{\psi_0[2] \to 1-\gamma, \psi_1[2] \to -1 + \frac{\pi^2}{6}\right\}\right];$$

```
Collect[%, (z - 2), Simplify]
```

$$1 + (-2+z)(1-\gamma) + \frac{1}{12}(-2+z)^2\left(\pi^2 + 6(-2+\gamma)\gamma\right) + \frac{1}{12}(-2+z)^3\left(-4-\pi^2(-1+\gamma) + 6\gamma^2 - 2\gamma^3 + 2\,\psi_2[2]\right)$$

公式12･1･2

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$ なる a について次式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(a)}{n!} (z-a)^n \tag{1.2}$$

但し

$$c_n(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_{n-1}(a)\right)$$

証明

$1/\Gamma(z)$ は $a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$ の周りで次のようにテイラー展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \right\}_{z=a}^{(n)} \frac{(z-a)^n}{n!}$$

これに 公式12･1･0 (0.1-) を適用し微分係数を $c_n(a)$ に置換して与式を得る。

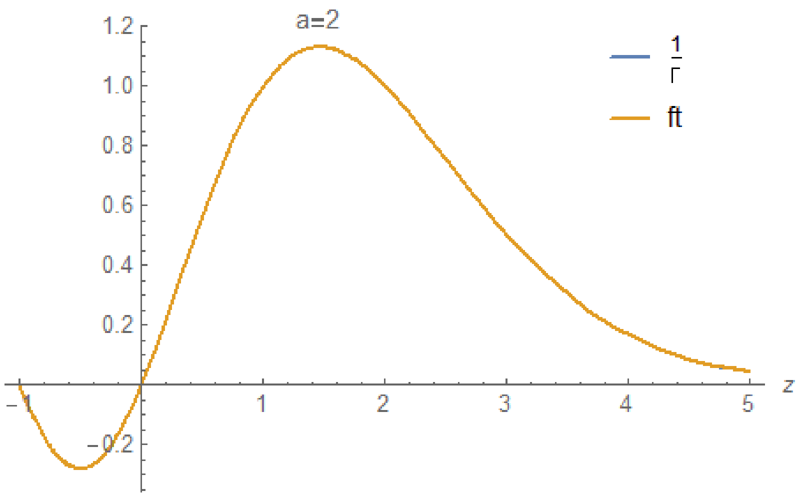
例　2 の周りのテイラー展開(数値計算)

公式に従い $1/\Gamma(z)$ を2の周りでテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。右辺を20項まで展開して左辺と共に図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)は見えない。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$\texttt{c[n\_, z\_]} := \frac{1}{\texttt{Gamma[z]}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, \texttt{BellY[n, k, Tbl}\psi\texttt{[n, z]]}$$

$$\texttt{ft[z\_, a\_, m\_]} := \frac{1}{\texttt{Gamma[a]}} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\texttt{c[n, a]}}{\texttt{n!}} (z - a)^n$$



12・2 ガンマ関数とその逆数のローラン展開

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ もその逆数 $1/\Gamma(z)$ もマクローリン展開は出来ない。しかしながら $\Gamma(1+z)$ や $1/\Gamma(1+z)$ はマクローリン展開ができる。このことを利用して $\Gamma(z)$ や $1/\Gamma(z)$ の 0 の周りのローラン展開が可能である。

公式12・2・1 (ローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^{n-1} \tag{2.1}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

証明

$\Gamma(1+z)$ は次のようにマクローリン展開できる。

$$\Gamma(1+z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^{(n)}(1)}{n!} z^n$$

$$\Gamma^{(n)}(1) = \Gamma(1) \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1))$$

$\Gamma^{(n)}(1)$ を c_n に置換し、両辺を z で除せば、

$$\frac{\Gamma(1+z)}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^{n-1}$$

$$c_n = \Gamma(1) \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1))$$

$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 1$ であるから、与式を得る。

数値計算

公式に従い $\Gamma(z)$ を0 の周りでローラン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。4項まで展開すると次のとおり。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$\texttt{c[n\_]} := \sum_{k=1}^{n} \texttt{BellY[n, k, Tbl}\psi\texttt{[n, 1]]}$$

$$\texttt{ft[z\_, m\_]} := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\texttt{c[n]}}{n!} z^{n-1}$$

```
ft[z, 4];
ReplaceAll[%, {EulerGamma → γ, PolyGamma[2, 1] -> ψ2[1]}]
```

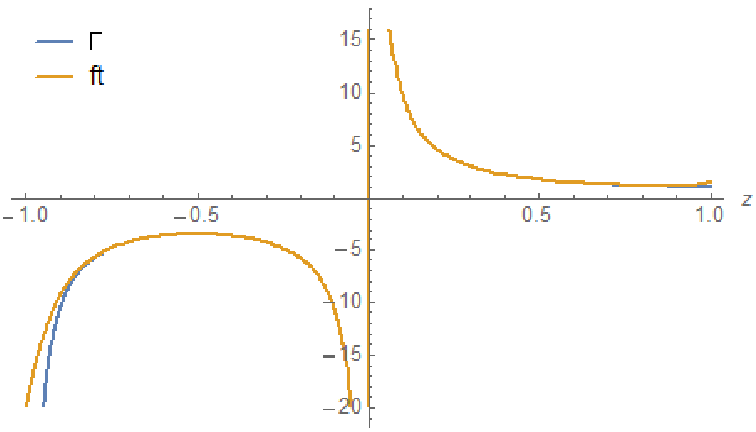
$$\frac{1}{z} - \gamma + \frac{1}{2} z \left(\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2\right) + \frac{1}{6} z^2 \left(-\frac{\pi^2 \gamma}{2} - \gamma^3 + \psi_2[1]\right) + \frac{1}{24} z^3 \left(\frac{3\pi^4}{20} + \pi^2 \gamma^2 + \gamma^4 - 4\gamma \psi_2[1]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series* [ ] を用いて $\Gamma(z)$ を0 の周りで展開すると次のとおり。これは上とぴったり一致している。

```
Series[Gamma[z], {z, 0, 3}];
ReplaceAll[%, {EulerGamma → γ, PolyGamma[2, 1] -> ψ2[1]}]
```

$$\frac{1}{z}-\gamma+\frac{1}{12}\left(\pi^2+6\gamma^2\right)z+\frac{1}{6}\left(-\frac{\pi^2\gamma}{2}-\gamma^3+\psi_2[1]\right)z^2$$
$$+\frac{1}{24}\left(\frac{3\pi^4}{20}+\pi^2\gamma^2+\gamma^4-4\gamma\,\psi_2[1]\right)z^3+O[z]^4$$

ついでに、f_t を20項まで展開して Γ と共に図示すると次のとおり。両者はほぼ一致している。



公式12･2･2 (逆ローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n\,!}z^{n+1} \tag{2.2}$$

但し

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma(1+z)$ は次のようにマクローリン展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right\}_{z=0}^{(n)}\frac{z^n}{n\,!}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right\}_{z=0}^{(n)}=\frac{1}{\Gamma(1)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)\right)$$

微分係数を c_n に置換し、両辺に z を乗じれば

$$\frac{z}{\Gamma(1+z)}=z+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{z^{n+1}}{n\,!}$$

$$c_n=\frac{1}{\Gamma(1)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)\right)$$

$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 1$ であるから、与式を得る。

記号計算

公式に従い $1/\Gamma(z)$ を0 の周りで展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。4項まで展開すると次のとおり。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[ψ_k[z], {k, 0, n - 1}]
```

$$\mathtt{c[n\_]} := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\mathtt{BellY[n, k, Tbl\psi[n, 1]]}$$

$$\mathtt{f[z\_]} := \frac{1}{\mathtt{Gamma[z]}} \qquad \mathtt{ft[z\_, m\_]} := z + \sum_{n=1}^{m} \frac{\mathtt{c[n]}}{n!} z^{n+1}$$

```
ft[z, 4]
```

$$z - z^2 \psi_0[1] + \frac{1}{2} z^3 \left(\psi_0[1]^2 - \psi_1[1]\right) + \frac{1}{6} z^4 \left(-\psi_0[1]^3 + 3\psi_0[1]\psi_1[1] - \psi_2[1]\right) + \frac{1}{24} z^5 \left(\psi_0[1]^4 - 6\psi_0[1]^2 \psi_1[1] + 3\psi_1[1]^2 + 4\psi_0[1]\psi_2[1] - \psi_3[1]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series*[ ] を用いて $1/\Gamma(z)$ を0の周りで展開すると次のとおり。

```
Series[f[z], {z, 0, 5}];
ReplaceAll[%, {EulerGamma → γ, PolyGamma[2, 1] -> ψ2[1]}];
Collect[%, z, Expand]
```

$$z + z^2\gamma + z^3\left(-\frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}\right) + z^4\left(-\frac{\pi^2\gamma}{12} + \frac{\gamma^3}{6} - \frac{\psi_2[1]}{6}\right) + z^5\left(\frac{\pi^4}{1440} - \frac{\pi^2\gamma^2}{24} + \frac{\gamma^4}{24} - \frac{1}{6}\gamma\psi_2[1]\right)$$

両者は異なっているように見えるが同じものである。

実際、$\psi_0[1] = -\gamma$, $\psi_1[1] = \pi^2/6$, $\psi_3[1] = \pi^4/15$ を $f_t(z,4)$ に代入すると次のようになる。

$$\mathtt{ReplaceAll}\left[\mathtt{ft[z, 4]}, \left\{\psi_0[1] \to -\gamma,\ \psi_1[1] \to \frac{\pi^2}{6},\ \psi_3[1] \to \frac{\pi^4}{15}\right\}\right];$$

```
Collect[%, z, Expand]
```

$$z + z^2\gamma + z^3\left(-\frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}\right) + z^4\left(-\frac{\pi^2\gamma}{12} + \frac{\gamma^3}{6} - \frac{\psi_2[1]}{6}\right) + z^5\left(\frac{\pi^4}{1440} - \frac{\pi^2\gamma^2}{24} + \frac{\gamma^4}{24} - \frac{1}{6}\gamma\psi_2[1]\right)$$

12･3 マクローリン展開

公式 12･3･1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n \tag{3.1-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!} z^n \tag{3.1+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!} z^n \tag{3.2-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!} z^n \tag{3.2+}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma(1+z)$ は次のようにマクローリン展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right\}_{z=0}^{(n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right\}_{z=0}^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(1)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)\right)$$

微分係数を c_n に置換して (3.1-) を得る。そしてその符号を反転して (3.1+) を得る。
(3.1-) において z を $z/2$ に置換して (3.2-) を得、そしてその符号を反転して (3.2+) を得る。

例 $1/\Gamma(1+z/2)$ (記号計算)

公式に従い $1/\Gamma(1+z/2)$ をマクローリン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。4項まで展開すると次のとおり。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[ψk[z], {k, 0, n - 1}]

c[n_] := Sum[(-1)^k BellY[n, k, Tblψ[n, 1]], {k, 1, n}]

f[z_] := 1/Gamma[1 + z/2]          fm[z_, m_] := 1 + Sum[c[n]/(2^n n!) z^n, {n, 1, m}]

fm[z, 4]
```

$$1 - \frac{1}{2} z\,\psi_0[1] + \frac{1}{8} z^2 \left(\psi_0[1]^2 - \psi_1[1]\right) + \frac{1}{48} z^3 \left(-\psi_0[1]^3 + 3\,\psi_0[1]\,\psi_1[1] - \psi_2[1]\right)$$
$$+ \frac{1}{384} z^4 \left(\psi_0[1]^4 - 6\,\psi_0[1]^2\,\psi_1[1] + 3\,\psi_1[1]^2 + 4\,\psi_0[1]\,\psi_2[1] - \psi_3[1]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series*[ ] を用いて $f(z)$ を0の周りで展開すると次のとおり。

```
Series[f[z], {z, 0, 4}];
ReplaceAll[%, {EulerGamma → γ, PolyGamma[2, 1] -> ψ2[1]}];
Collect[%, z, Expand]
```

$$1+\frac{z\gamma}{2}+z^2\left(-\frac{\pi^2}{48}+\frac{\gamma^2}{8}\right)+z^3\left(-\frac{\pi^2\gamma}{96}+\frac{\gamma^3}{48}-\frac{\psi_2[1]}{48}\right)+z^4\left(\frac{\pi^4}{23040}-\frac{\pi^2\gamma^2}{384}+\frac{\gamma^4}{384}-\frac{1}{96}\gamma\psi_2[1]\right)$$

両者は異なっているように見えるが同じものである。

実際、$\psi_0[1]=-\gamma$, $\psi_1[1]=\pi^2/6$, $\psi_3[1]=\pi^4/15$ を $f_m(z,4)$ に代入すると次のようになる。

$$\text{ReplaceAll}\left[\text{fm}[z,4],\left\{\psi_0[1]\to-\gamma,\ \psi_1[1]\to\frac{\pi^2}{6},\ \psi_3[1]\to\frac{\pi^4}{15}\right\}\right];$$

```
Collect[%, z, Expand]
```

$$1+\frac{z\gamma}{2}+z^2\left(-\frac{\pi^2}{48}+\frac{\gamma^2}{8}\right)+z^3\left(-\frac{\pi^2\gamma}{96}+\frac{\gamma^3}{48}-\frac{\psi_2[1]}{48}\right)+z^4\left(\frac{\pi^4}{23040}-\frac{\pi^2\gamma^2}{384}+\frac{\gamma^4}{384}-\frac{1}{96}\gamma\psi_2[1]\right)$$

公式 12·3·2

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1+z)/2\}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2^n n!}z^n \tag{3.3-}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\{(1-z)/2\}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{c_n}{2^n n!}z^n \tag{3.3+}$$

但し

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,\psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma\{(1+z)/2\}$ は次のようにマクローリン展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(n)}\frac{z^n}{n!}$$

初項は

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(0)}=\frac{1}{\Gamma\{(1+0)/2\}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

第2項以降は、公式12·1·0 (宇井の公式)

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}(\psi_0(z),\psi_1(z),\ldots,\psi_{n-1}(z))$$

を用いて

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}\right\}^{(1)}_{z=0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{1}(-1)^k B_{1,k}\left(\psi_0\left(\frac{1+0}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}\right\}^{(2)}_{z=0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k B_{1,k}\left(\psi_0\left(\frac{1+0}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1+0}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}\right\}^{(n)}_{z=0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\cdots,\psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{1}{2^n}$$

$$n=1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right),\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\cdots,\psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{z^n}{2^n n!}\right\}$$

両辺に $\sqrt{\pi}$ を乗じ内側の Σ を c_n に置換して (3.3-) を得る。
類似の方法で (3.3+) も得られる。(次の 公式 12·3·3の証明 を参照。)

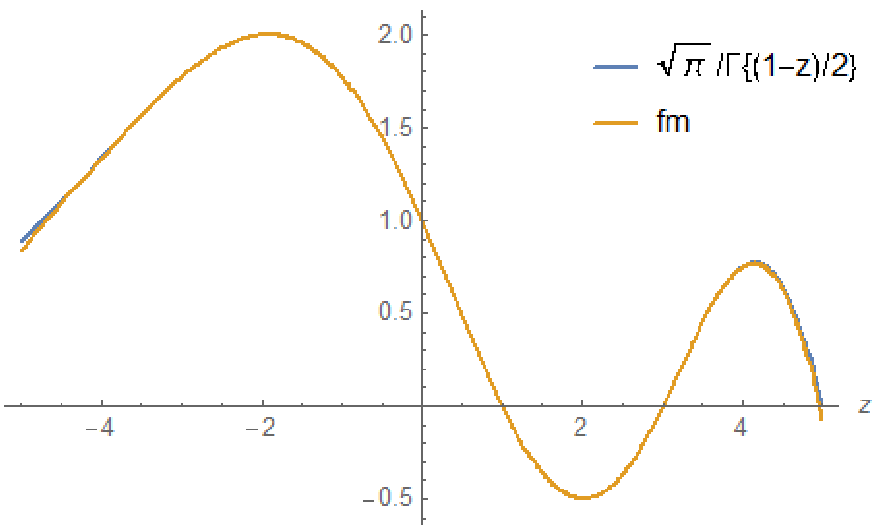
例 $\sqrt{\pi}/\Gamma\{(1-z)/2\}$ (数値計算)

公式に従い $\sqrt{\pi}/\Gamma\{(1-z)/2\}$ をマクローリン展開する。多項式 $B_{n,r}(f_1,f_2,\ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。右辺を15項まで展開して左辺と共に図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)はほとんど見えない。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]

c[n_] := Sum[(-1)^k BellY[n, k, Tblψ[n, 1/2]], {k, 1, n}]

f[z_] := Sqrt[π] / Gamma[(1 - z) / 2]        fm[z_, m_] := 1 + Sum[(-1)^n c[n]/(2^n n!) z^n, {n, 1, m}]
```



公式 12･3･3

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\{(3-z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{c_n}{2^n n!} z^n \tag{3.4+}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma\{(3-z)/2\}$ は次のようにマクローリン展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(n)} \frac{z^n}{n!}$$

初項は

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(0)} = \frac{1}{\Gamma\{(3-0)/2\}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

第2項以降は、公式12･1･0 (宇井の公式)

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)\right)$$

を用いて

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{1}(-1)^k B_{1,k}\left(\psi_0\left(\frac{3-0}{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k B_{2,k}\left(\psi_0\left(\frac{3-0}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3-0}{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}}\right\}_{z=0}^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$n = 1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\frac{(-1)^n z^n}{2^n n!}\right\}$$

両辺に $\sqrt{\pi}/2$ を乗じ内側の Σ を c_n に置換して (3.4+) を得る。

記号計算

公式に従い $\sqrt{\pi}/2\Gamma\{(3-z)/2\}$ をマクローリン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。4項まで展開すると次のとおり。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[ψk[z], {k, 0, n - 1}]
c[n_] := Sum[(-1)^k BellY[n, k, Tblψ[n, 3/2]], {k, 1, n}]
```

```
f[z_] := √π / (2 Gamma[(3 - z) / 2])        fm[z_, m_] := 1 + Sum[(-1)^n c[n]/(2^n n!) z^n, {n, 1, m}]
fm[z, 4]
```

$$1+\frac{1}{2}z\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]+\frac{1}{8}z^2\left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2-\psi_1\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$
$$-\frac{1}{48}z^3\left(-\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3+3\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]\psi_1\left[\frac{3}{2}\right]-\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$
$$+\frac{1}{384}z^4\left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^4-6\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2\psi_1\left[\frac{3}{2}\right]+3\,\psi_1\left[\frac{3}{2}\right]^2+4\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]-\psi_3\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series*[ ] を用いて $f(z)$ を0の周りで展開すると次のとおり。

```
Series[f[z], {z, 0, 4}];
ReplaceAll[%, {PolyGamma[0, 3/2] -> ψ0[3/2], PolyGamma[2, 3/2] -> ψ2[3/2]}];
Collect[%, z, Expand]
```

$$1+\frac{1}{2}z\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]+z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{8}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2\right)+$$
$$z^3\left(\frac{1}{4}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]-\frac{1}{32}\pi^2\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]+\frac{1}{48}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3+\frac{1}{48}\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)+$$
$$z^4\left(\frac{3}{8}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^4}{1536}+\frac{1}{16}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2-\frac{1}{128}\pi^2\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2+\frac{1}{384}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^4+\frac{1}{96}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

両者は異なっているように見えるが同じものである。

実際、$\psi_1[3/2]=\pi^2/2-4$ ， $\psi_3[3/2]=\pi^4-96$ を $f_m(z,4)$ に代入すると次のようになる。

```
ReplaceAll[fm[z, 4], {ψ1[3/2] -> π^2/2 - 4, ψ3[3/2] -> π^4 - 96}];
Collect[%, z, Expand]
```

$$1+\frac{1}{2}z\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]+z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{8}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2\right)+$$
$$z^3\left(\frac{1}{4}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]-\frac{1}{32}\pi^2\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]+\frac{1}{48}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3+\frac{1}{48}\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)+$$
$$z^4\left(\frac{3}{8}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^4}{1536}+\frac{1}{16}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2-\frac{1}{128}\pi^2\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2+\frac{1}{384}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^4+\frac{1}{96}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

12·4 1 の周りのテイラー展開(その1)

公式 12·4·1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(z-1)^n \tag{4.1-}$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!}(z-1)^n \tag{4.1+}$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(1+z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n \tag{4.2-}$$

$$\frac{1}{\Gamma\{(3-z)/2\}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n \tag{4.2+}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -(z-1) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{n!}(z-1)^{n+1} \tag{4.5+}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

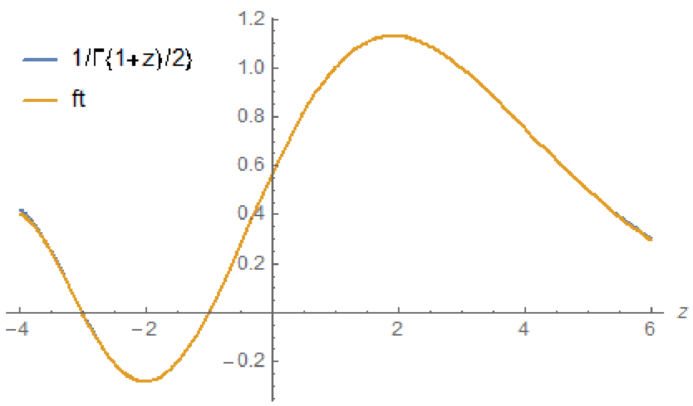
証明

公式 12·3·1 の (3.1-) ~ (3.2+) において z を $z-1$ に置換して (4.1-) ~ (4.2+) を得る。(4.5+) は (4.1+) の両辺に $1-z$ を乗じて得られる。厳密には、(4.5+) は逆ローラン展開と言うべきかも知れない。

例 $1/\Gamma\{(1+z)/2\}$ (数値計算)

公式に従い $1/\Gamma\{(1+z)/2\}$ を1の周りでテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。右辺を15項まで展開して左辺と共に図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)はほとんど見えない。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
c[n_] := Sum[(-1)^k BellY[n, k, Tblψ[n, 1]], {k, 1, n}]
ft[z_, m_] := 1 + Sum[c[n]/(2^n n!) (z - 1)^n, {n, 1, m}]
```



公式 12･4･2

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}(z-1)^n \tag{4.5-}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(2), \psi_1(2), \ldots, \psi_{n-1}(2)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma(1+z)$ は次のようにテイラー展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right\}_{z=1}^{(n)} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right\}_{z=1}^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(2)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(2), \psi_1(2), \ldots, \psi_{n-1}(2)\right)$$

微分係数を c_n に置換して (4.5-) を得る。

記号計算

公式に従い $1/\Gamma(1+z)$ をテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。3項まで展開すると次のとおり。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[ψk[z], {k, 0, n - 1}]
```

$$\texttt{c[n\_]} := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\texttt{BellY[n, k, Tbl}\psi\texttt{[n, 2]]}$$

$$\texttt{ft[z\_, m\_]} := 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\texttt{c[n]}}{n!} (z-1)^n$$

```
ft[z, 3]
```

$$1 - (-1+z)\,\psi_0[2] + \frac{1}{2}(-1+z)^2 \left(\psi_0[2]^2 - \psi_1[2]\right) + \frac{1}{6}(-1+z)^3 \left(-\psi_0[2]^3 + 3\,\psi_0[2]\,\psi_1[2] - \psi_2[2]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series* [ ] を用いて $1/\Gamma(1+z)$ を1の周りで展開すると次のようになる。

```
Series[1 / Gamma[1 + z], {z, 1, 3}];
ReplaceAll[%, {EulerGamma → γ, PolyGamma[2, 2] -> ψ2[2]}];
Collect[%, (z - 1), Expand]
```

$$1 + (-1+z)(-1+\gamma) + (-1-z)^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} - \gamma + \frac{\gamma^2}{2}\right) + (-1+z)^3 \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{12} + \gamma - \frac{\pi^2\gamma}{12} - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^3}{6} - \frac{\psi_2[2]}{6}\right)$$

両者は異なっているように見えるが同じものである。実際 $\psi_0[2]=1-\gamma$, $\psi_1[2]=\pi^2/6-1$ を $f_t(z,3)$ に代入すれば次のようになる

```
ReplaceAll[ft[z, 3], {ψ0[2] → 1 - γ, ψ1[2] -> π^2/6 - 1}];
Collect[%, (z - 1), Expand]
```

$$1+(-1+z)(-1+\gamma)+(-1-z)^2\left(1-\frac{\pi^2}{12}-\gamma+\frac{\gamma^2}{2}\right)$$
$$+(-1+z)^3\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi^2}{12}+\gamma-\frac{\pi^2\gamma}{12}-\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\gamma^3}{6}-\frac{\psi_2[2]}{6}\right)$$

12･5 1 の周りのテイラー展開(その2)

公式 12･5･1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、次式が成立する。

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n \tag{5.3-}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n \tag{5.3+}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \dots, \psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma(z/2)$ は次のようにテイラー展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma(z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{\Gamma(z/2)}\right\}_{z=1}^{(n)} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(z/2)}\right\}_{z=1}^{(0)} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(z/2)}\right\}_{z=1}^{(n)} = \frac{1}{2^n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \dots, \psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$n = 1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(z/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{1}{2}\right), \psi_1\left(\frac{1}{2}\right), \dots, \psi_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{(z-1)^n}{2^n n!}\right\}$$

両辺に $\sqrt{\pi}$ を乗じ内側の Σ を c_n に置換して (5.3-) を得る。類似の方法で (5.3+) も得られる。

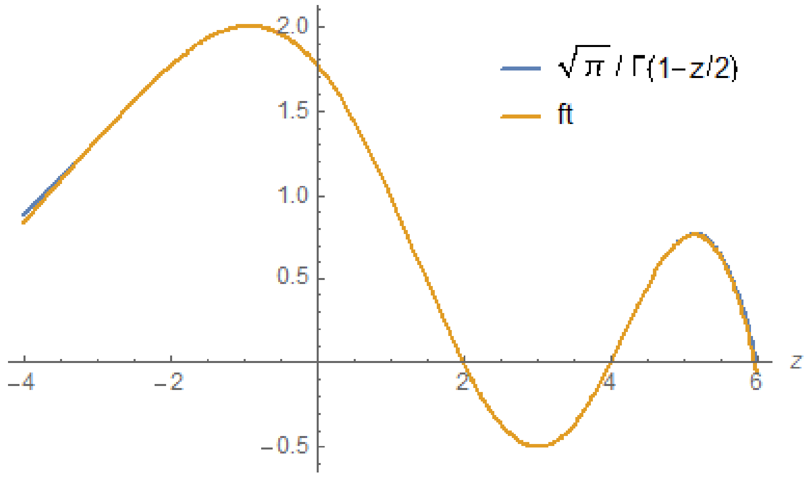
例 $\sqrt{\pi}/\Gamma(1-z/2)$ (数値計算)

公式に従い $\sqrt{\pi}/\Gamma(1-z/2)$ を1の周りでテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。右辺を15項まで展開して左辺と共に図示すると次のとおり。両辺はぴったり重なっていて左辺(青)はほとんど見えない。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]

c[n_] := Sum[(-1)^k BellY[n, k, Tblψ[n, 1/2]], {k, 1, n}]

ft[z_, m_] := 1 + Sum[(-1)^n c[n]/(2^n n!) (z - 1)^n, {n, 1, m}]
```



公式 12･5･2

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1+z/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n n!}(z-1)^n \tag{5.6-}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

証明

$1/\Gamma(1+z/2)$ は次のようにテイラー展開できる。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{(1+z/2)}\right\}_{z=1}^{(n)} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(1+z/2)}\right\}_{z=1}^{(0)} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(1+z/2)}\right\}_{z=1}^{(n)} = \frac{2}{2^n\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$n = 1,2,3,\cdots$$

i.e.

$$\frac{1}{\Gamma(1+z/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \ldots, \psi_{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\frac{(z-1)^n}{2^n n!}\right\}$$

両辺に $\sqrt{\pi}/2$ を乗じ内側の Σ を c_n に置換して (5.6-) を得る。

記号計算

公式に従い $\sqrt{\pi}/2\Gamma(1+z/2)$ をテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。3項まで展開すると次のとおり。

```
Tblψ[n_, z_] := Table[ψk[z], {k, 0, n - 1}]
```

$$c[n\_] := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\mathrm{BellY}\left[n, k, \mathrm{Tbl}\psi\left[n, \frac{3}{2}\right]\right]$$

$$f[z\_] := \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\mathrm{Gamma}[1 + z/2]} \qquad ft[z\_, m\_] := 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{c[n]}{2^n\, n!} (z-1)^n$$

```
ft[z, 3]
```

$$1 - \frac{1}{2}(-1+z)\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{8}(-1+z)^2\left(\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2 - \psi_1\left[\frac{3}{2}\right]\right) + \frac{1}{48}(-1+z)^3\left(-\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 + 3\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]\psi_1\left[\frac{3}{2}\right] - \psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

他方、*Mathematica* の関数 *Series* [ ] を用いて $f(z)$ を1の周りで展開すると、

```
Series[f[z], {z, 1, 3}];
ReplaceAll[%, {PolyGamma[0, 3/2] -> ψ0[3/2], PolyGamma[2, 3/2] -> ψ2[3/2]}];
Collect[%, (z - 1), Simplify]
```

$$1 - \frac{1}{2}\psi_0\left[\frac{3}{2}\right](z-1) + \frac{1}{16}\left(8 - \pi^2 + 2\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2\right)(z-1)^2 + \frac{1}{96}\left(3\left(-8+\pi^2\right)\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] - 2\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 - 2\,\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)(z-1)^3 + O[z-1]^4$$

両者は異なっているように見えるが同じものである。実際、$\psi_1[3/2] = \pi^2/2 - 4$ を $f_t(z,3)$ に代入すると次のようになる。

```
ReplaceAll[ft[z, 3], ψ1[3/2] -> π^2/2 - 4];
Collect[%, (z - 1), Simplify]
```

$$1 - \frac{1}{2}(-1+z)\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{8}(-1+z)^2\left(4 - \frac{\pi^2}{2} + \psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^2\right) + \frac{1}{96}(-1+z)^3\left(3\left(-8+\pi^2\right)\psi_0\left[\frac{3}{2}\right] - 2\,\psi_0\left[\frac{3}{2}\right]^3 - 2\,\psi_2\left[\frac{3}{2}\right]\right)$$

2017.01.15
2017.08.04　公式12･3･2と公式12･3･3 追加。

Kano Kono

宇宙人の数学