13 多重級数の収束加速

近時、使用される関数の高度化に伴い、二重級数や三重級数を計算する機会が増えた。ところがこのような多重級数の計算には大変な時間が掛かる。そこで本章ではこれらの収束加速法を論ずることにする。

13･1 直列加速法

多重級数は、何らかの方法でこれを1重級数に変換できたなら、これに加速法が適用できる。これは電気回路における直列回路と似ているので、**直列加速法** と呼ぶことにする。

13･1･1 半多重級数

「 **2 多重級数と指数関数** 」の 公式 2･1･0 によれば、絶対収束する多重級数は半多重級数に変換できた。半多重級数は1重級数である。

公式 2･1･0

(0) 多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}$ が絶対収束するとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n} = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n} \tag{0.0}$$

(1) 多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}$ が絶対収束するとき、次式が成り立つ。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{r_{n-1}} a_{1+r_1-r_2,1+r_2-r_3,\cdots,1+r_{n-1}-r_n,r_n} \tag{0.1}$$

Note

要するに、多重級数 $\displaystyle\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n}$ に対して次の操作をすれば良い。

r_{n-1} を $r_{n-1}-r_n$ に置換し、右から1番目の ∞ を r_{n-1} に置換する。

r_{n-2} を $r_{n-2}-r_{n-1}$ に置換し、右から2番目の ∞ を r_{n-2} に置換する。

⋮

r_1 を r_1-r_2 に置換し、右から $(n-1)$ 番目の ∞ を r_1 に置換する。

添字が1から始まる(即ち (1))場合は、1+ を付加するだけで良い。

例 1･0

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r}x^{2r+3}}{(2r-2s+1)(2s-2t+1)(2t+1)}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1 r_2 r_3 r_4} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3}\frac{(-1)^{1+r_1}}{(1+r_1-r_2)(1+r_2-r_3)(1+r_3-r_4)r_4}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{1+r}}{\{(1+r-s)s\}^x}\cos\left(y\log\frac{s}{1+r-s}\right)$$

13･1･2 半多重級数の加速

かくて多重級数が半多重級数（1重級数）に変換されたからには、これには加速法が適用可能である。加速法には多種あるが、本章では「 10 二重関数項級数による収束加速と総和法 」で述べた **クノップ変換** を用いることにする。

定理 13･1･2

(0) 多重関数項級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、

任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} \frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n}(z) \tag{1.0}$$

(1) 多重関数項級数 $\displaystyle\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、

任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{r_{n-1}} \frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1} \times a_{1+r_1-r_2,1+r_2-r_3,\cdots,1+r_{n-1}-r_n,r_n}(z) \tag{1.1}$$

証明

仮定により、多重関数項級数は次のように並び替えが出来る。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} a_{r_1-r_2,r_2-r_3,\cdots,r_{n-1}-r_n,r_n}(z)$$

右辺は r_1 に関して1重関数項級数であり かつ収束するから、「 10 二重関数項級数による収束加速と総和法 」の定理 10･3･2 (1) により、(1.0) が成立する。同様にして(1.1) も成立する。

総計算項数

定理においてΣの上限を m で打ち切ったとき、総計算項数 $T_1(n,m)$ は次式で与えられる。

(0) $$T_1(n,m) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{r_{n-1}} 1 = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n+1}(j+m)$$

(1) $$T_1(n,m) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\cdots\sum_{r_n=1}^{r_{n-1}} 1 = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(j+m)$$

例 1･1

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)} = \left(tan^{-1}x\right)^3 =: g(x)$$

この級数の $x=1$ における値を有効数字6桁まで求めたい。取り敢えず各Σの上限を 300 として計算し $g(1)$ と共に示すと次のようになる。

```
f[x_, m_] := Sum[Sum[Sum[(-1)^(r+s+t) x^(2r+2s+2t+3)/((2r+1)(2s+1)(2t+1)), {t,0,m}], {s,0,m}], {r,0,m}]
N[f[1, 300], 8]
0.48601170
```

```
g[x_] := ArcTan[x]^3
N[g[1]]
0.48447307
```

総計算項数は $301^3 = 27,270,901$ であるが、左辺は有効数字2桁しか得られていない。パソコンで目標精度を得ることは困難である。

そこでこの級数を加速を試みる。先ず、これを半三重級数に変換すると、例 1・0 で見たように次のようになる。

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r}x^{2r+3}}{(2r-2s+1)(2s-2t+1)(2t+1)}$$

次に、この右辺に「 10 二重関数項級数による収束加速と総和法 」で述べられたクノップ変換を施す。すると、

$$f(x,q)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{(-1)^{r}x^{2r+3}}{(2r-2s+1)(2s-2t+1)(2t+1)}$$

$q=1/2$、Σの上限を $m=12$ としてこれを計算すると次のようになる。

```
f[x_, q_, m_] := Sum[Sum[Sum[Sum[q^(k-r)/(q+1)^(k+1) Binomial[k, r] (-1)^r x^(2r+3)/((2r-2s+1)(2s-2t+1)(2t+1)), {t,0,s}], {s,0,r}], {r,0,k}], {k,0,m}]
SetPrecision[f[1, 1/2, 12], 8]
0.48447319
```

```
N[g[1]]
0.48447307
```

結果は目標精度の有効数字6桁に達している。なお、総計算項数 T_1 は次のとおり。

$$\sum_{k=0}^{12}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}1 \qquad 1820$$

例 1・2

$$f=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1 r_2 r_3 r_4}=(\log 2)^4=:g$$

この級数の値を有効数字6桁まで求めたい。取り敢えず Σの上限を各 100 として計算し g と共に示すと次のようになる。

```
f[m_] := Sum[Sum[Sum[Sum[(-1)^(r1+r2+r3+r4)/(r1 r2 r3 r4), {r4,1,m}], {r3,1,m}], {r2,1,m}], {r1,1,m}]
N[f[100], 8]
0.22427891
```

```
g := Log[2]^4
N[g, 8]
0.23083510
```

総計算項数は $100^4 = 100{,}000{,}000$ であるが、左辺は有効数字1桁しか得られていない。パソコンで目標精度を得ることはほとんど不可能である。

そこでこの級数を加速を試みる。先ず、これを半四重級数に変換すると、例 1･0 で見たように次のようになる。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1 r_2 r_3 r_4} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3}\frac{(-1)^{1+r_1}}{(1+r_1-r_2)(1+r_2-r_3)(1+r_3-r_4)r_4}$$

この右辺にクノップ変換を施すと、

$$f(q) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3}\frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1}\frac{(-1)^{1+r_1}}{(1+r_1-r_2)(1+r_2-r_3)(1+r_3-r_4)r_4}$$

$q=1/2$、Σの上限を $m=16$ としてこれを計算すると次のようになる。

$$\texttt{f[}q\_\texttt{, }m\_\texttt{] :=}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3}\frac{q^{k-r_1}}{(q+1)^{k+1}}\frac{(-1)^{1+r_1}\,\texttt{Binomial}[k, r_1]}{(1+r_1-r_2)(1+r_2-r_3)(1+r_3-r_4)\,r_4}$$

$\texttt{N}\left[\texttt{f}\left[\frac{1}{2}, 16\right], 8\right]$ $\quad$ $\texttt{N[g, 8]}$

0.23083508 $\quad$ 0.23083510

結果は目標精度の有効数字6桁に達している。なお、総計算項数 T_1 は次のとおり。

$$\sum_{k=1}^{16}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{r_1}\sum_{r_3=1}^{r_2}\sum_{r_4=1}^{r_3} 1 \qquad 15504$$

例 1･3

$$f(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right) = |\eta(x,y)|^2 =: g(x,y)$$

但し、 $\eta(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{x+iy}}$

つまり、右辺はディリクレ･イータ関数の絶対値の2乗である。この関数はリーマン･ゼータ関数と共通の零点を持つ。今、その1つ $x_1=1/2$, $y_1=14.13472514\cdots$ における値を有効数字6桁まで求めたい。取り敢えず Σの上限 m を各 1000 として計算し $g(x_1, y_1)$ と共に示すと次のようになる。

$$\texttt{f[}x\_\texttt{, }y\_\texttt{, }m\_\texttt{] :=}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{r+s}}{(r\,s)^x}\texttt{Cos}\left[y\,\texttt{Log}\left[\frac{s}{r}\right]\right]$$

$\texttt{g[}x\_\texttt{, }y\_\texttt{] := Abs[DirichletEta[}x + i\,y\texttt{]]}^2$ $\quad$ $y_{n\_} \texttt{:= Im[ZetaZero[}n\texttt{]]}$

$\texttt{SetPrecision}\left[\texttt{f}\left[\frac{1}{2}, y_1, 1000\right], 8\right]$ $\quad$ $\texttt{SetPrecision}\left[\texttt{g}\left[\frac{1}{2}, y_1\right], 8\right]$

$0.\times 10^{-4}$ $\quad$ $0.\times 10^{-10}$

総計算項数は $1000^2 = 1{,}000{,}000$ で、左辺は有効数字4桁まで得られている。パソコンで目標精度を得ることは可能ではあるが、それにはかなりの時間が掛かる。

そこでこの級数を加速を試みる。先ず、これを半二重級数に変換すると、例 1･0 で見たように次のようになる。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r}\frac{(-1)^{1+r}}{\{(1+r-s)s\}^x}\cos\left(y\log\frac{s}{1+r-s}\right)$$

この右辺にクノップ変換を施す。すると、

$$f(x,y,q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{(-1)^{1+r}}{\{(1+r-s)s\}^x}\cos\left(y\log\frac{s}{1+r-s}\right)$$

$q=1/2$、Σの上限を $m=24$ としてこれを計算すると次のようになる。

```
f[x_, y_, q_, m_] :=
  Sum[q^(k-r)/(q+1)^(k+1) ((-1)^(1+r) Binomial[k, r])/((1+r-s) s)^x Cos[y Log[s/(1+r-s)]], {k, 1, m}, {r, 1, k}, {s, 1, r}]
```

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}\frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}}\frac{(-1)^{1+r}\,\mathrm{Binomial}[k,r]}{((1+r-s)\,s)^x}\,\mathrm{Cos}\left[y\,\mathrm{Log}\left[\frac{s}{1+r-s}\right]\right]$$

```
SetPrecision[f[1/2, y1, 1/3, 24], 8]
0.×10^-6
```

```
SetPrecision[g[1/2, y1], 8]
0.×10^-10
```

結果は目標精度の有効数字6桁に達している。なお、総計算項数 T_1 は次のとおり。

$$\sum_{k=1}^{24}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}1 \qquad 2600$$

13･2 並列加速法

前節の直列加速法はオーソドックスで加速効果も高かった。しかしながら、多重級数を半多重級数に並べ替えねばならない煩わしさがあった。本節では、多重級数を並べ替えずにそのまま加速する方法を提示する。これは電気回路における並列回路と似ているので、並列加速法と呼ぶことにする。

13･2･1 並列加速因子

この目的のため、筆者は新しい加速因子を開発(発明？)した。それは次のようなものである。

公式 13･2･1(並列加速因子)

$$b(r_1, r_2, \cdots, r_n) = \sum_{k=r_1+r_2+\cdots+r_n}^{\infty} \frac{q^{k-r_1-r_2-\cdots-r_n}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r_1+r_2+\cdots+r_n} = 1 \quad for \quad \begin{array}{l} r_s = 0,1,2,\cdots \\ s = 1,2,\cdots,n \\ q > 0 \end{array}$$

証明

「10 二重関数項級数による収束加速と総和法 」の公式 10･2･1 は次のようであった。

$$b(r) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{q^{k-r}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r} = 1 \quad for \quad \begin{array}{l} r = 0,1,2,\cdots \\ q > 0 \end{array}$$

この式において r を $r_1+r_2+\cdots+r_n$ に置換して与式を得る。

13･2･2 並列加速因子による加速

冗談のような加速因子であるが、これを次のように用いれば多重級数を並べ替えずにそのまま加速することが出来る。

命題 13･2･2

(0) 多重関数項級数 $\displaystyle\sum_{r_1, r_2, \cdots, r_n=0}^{\infty} a_{r_1, r_2, \cdots, r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、

任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{k}\cdots\sum_{r_n=0}^{k} \frac{q^{k-r_1-r_2-\cdots-r_n}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r_1+r_2+\cdots+r_n} \times a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) \tag{2.0}$$

(1) 多重関数項級数 $\displaystyle\sum_{r_1, r_2, \cdots, r_n=1}^{\infty} a_{r_1, r_2, \cdots, r_n}(z)$ が領域 D 上で絶対収束するならば、

任意の正数 q について次式が成立する。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty} a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{k}\cdots\sum_{r_n=1}^{k} \frac{q^{k-r_1-r_2-\cdots-r_n}}{(q+1)^{k+1}} \binom{k}{r_1+r_2+\cdots+r_n} \times a_{r_1,r_2,\cdots,r_n}(z) \tag{2.1}$$

証明

論理的証明は困難である。強いて言うならば、多重級数を高階テンソルと見做してそれに相応のクノップ加速因子を適用して与式を得る。

総計算項数

命題においてΣの上限を m で打ち切ったとき、総計算項数 $T_2(n,m)$ は次式で算出される。

(0) $$T_2(n,m) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{r_1=0}^{k}\sum_{r_2=0}^{k}\cdots\sum_{r_n=0}^{k} 1 = \sum_{j=1}^{m+1} j^n$$

(1) $$T_2(n,m) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{k}\cdots\sum_{r_n=1}^{k} 1 = \sum_{j=1}^{m} j^n$$

直列加速法との速度比較

これは概ね総計算項数の比によって定まり、次のようになる。

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_2(n,m)}{T_1(n,m)} = n!$$

つまり、Σの上限が同数 m のとき、直列加速法は並列加速法よりも最大で $n!$ 倍速い。

例 2・1

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)} = \left(tan^{-1}x\right)^3 =: g(x)$$

これは前節 例 1・1 と同じである。この級数の $x=1$ における値を有効数字6桁まで求めたい。

この左辺に 命題 13・2・2 (0) を適用すると次のようになる。

$$f(x,q) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}\frac{q^{k-r-s-t}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r+s+t}\frac{(-1)^{r+s+t}x^{2r+2s+2t+3}}{(2r+1)(2s+1)(2t+1)}$$

$q=1/2$、Σの上限を $m=12$ としてこれを計算すると次のようになる。

```
c[k_, r_] := Binomial[k, r]
f[x_, q_, m_] := Sum[q^(k-r-s-t)/(q+1)^(k+1) c[k, r+s+t] (-1)^(r+s+t) x^(2r+2s+2t+3)/((2r+1)(2s+1)(2t+1)), {k,0,m},{r,0,k},{s,0,k},{t,0,k}]
SetPrecision[f[1, 1/2, 12], 8]
0.48447319

g[x_] := ArcTan[x]^3
N[g[1]]
0.48447307
```

結果は目標精度の有効数字6桁に達している。なお、総計算項数 T_2 は次のとおり。

$$\sum_{k=0}^{12}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\sum_{t=0}^{k}1 \qquad 8281$$

例 1・1 の加速結果とこれを比べると、Σの上限 m は 12:12 であるが、総計算項数 T は 1820:8281 である。従って、計算速度は例 1・1 が本例よりも約 4.5 倍速い。しかし算式は本例の方が簡明である。どちらを選ぶかは悩ましいところである。

例 2·2

$$f=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1}^{\infty}\sum_{r_3=1}^{\infty}\sum_{r_4=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1 r_2 r_3 r_4}=(\log 2)^4=:g$$

これは前節 例 1·2 と同じである。この級数の値を有効数字6桁まで求めたい。

この左辺に 命題 13·2·2 (1) を適用すると次のようになる。

$$f(x,q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{k}\sum_{r_3=1}^{k}\sum_{r_4=1}^{k}\frac{q^{k-r_1-r_2-r_3-r_4}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r_1+r_2+r_3+r_4}\frac{(-1)^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{r_1 r_2 r_3 r_4}$$

$q=1/2$、Σ の上限を $m=19$ としてこれを計算すると次のようになる。

```
c[k_, r_] := Binomial[k, r]                                g := Log[2]^4

f[q_, m_] := Sum[q^(k-r1-r2-r3-r4)/(q+1)^(k+1) c[k, r1+r2+r3+r4] (-1)^(r1+r2+r3+r4)/(r1 r2 r3 r4), {k,1,m}, {r1,1,k}, {r2,1,k}, {r3,1,k}, {r4,1,k}]

N[f[1/2, 19], 8]                                           N[g, 8]
0.23083504                                                 0.23083510
```

結果は目標精度の有効数字6桁に達している。なお、総計算項数 T_2 は次のとおり。

$$\sum_{k=1}^{19}\sum_{r_1=1}^{k}\sum_{r_2=1}^{k}\sum_{r_3=1}^{k}\sum_{r_4=1}^{k}1 \qquad 562\,666$$

例 1·2 の加速結果とこれを比べると、Σ の上限 m は 16:19 である。さらに総計算項数 T になると 15504:562666 である。従って、計算速度は例 1·2 が本例よりも約 36 倍速い。流石に計算速度がこれだけ違うと、この命題の適用は躊躇される。

例 2·3

$$f(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)=|\eta(x,y)|^2=:g(x,y)$$

但し、 $$\eta(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{x+iy}}$$

これは前節 例 1·3 と同じである。この級数の $x_1=1/2$, $y_1=14.13472514\cdots$ における値を有効数字6桁まで求めたい。

この左辺に 命題 13·2·2 (1) を適用すると次のようになる。

$$f(x,y,q)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}}\binom{k}{r+s}\frac{(-1)^{r+s}}{(rs)^x}\cos\left(y\log\frac{s}{r}\right)$$

$q=1/3$、Σ の上限を $m=26$ としてこれを計算すると次のようになる。

```
c[k_, r_] := Binomial[k, r]          y_n_ := Im[ZetaZero[n]]
```

$$f[x\_, y\_, q\_, m\_] := \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{q^{k-r-s}}{(q+1)^{k+1}}\,c[k,\ r+s]\,\frac{(-1)^{r+s}}{(r\ s)^{x}}\,\mathrm{Cos}\left[y\ \mathrm{Log}\left[\frac{s}{r}\right]\right]$$

$$\mathrm{SetPrecision}\left[f\left[\frac{1}{2},\ y_1,\ \frac{1}{3},\ 26\right],\ 8\right] \qquad \mathrm{SetPrecision}\left[g\left[\frac{1}{2},\ y_1\right],\ 8\right]$$

$$0.\times 10^{-6} \qquad 0.\times 10^{-10}$$

結果は目標精度の有効数字6桁に達している。なお、総計算項数 T_2 は次のとおり。

$$\sum_{k=1}^{26}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}1 \qquad 6201$$

例 1･3 の加速結果とこれを比べると、Σの上限 m は 24:26 であるが、総計算項数 T は 2600:6201 である。つまり計算速度は例 1･3 が本例よりも約 2.4 倍速い。しかし速度差がこの程度ならば、この命題の適用は良さそうに思われる。

2018.04.22

Kano Kono

宇宙人の数学