14 複素関数の実部虚部別テイラー展開

要　旨

複素関数 $f(z)$（$z=x+iy$）が実数 a の周りで実係数のテイラー級数に展開できるとき、その実部 $u(x,y)$ 及び虚部 $v(x,y)$ はそれぞれ2重テイラー級数に展開できる。そして、次が成り立つ。

(1) y に関して、実部 $u(x,y)$ は偶関数であり、虚部 $v(x,y)$ は奇関数である。

(2) $f(z)$ が奇関数のとき、x に関して、実部 $u(x,y)$ は奇関数で、虚部 $v(x,y)$ は偶関数。

(3) $f(z)$ が偶関数のとき、x に関して、実部 $u(x,y)$ は偶関数で、虚部 $v(x,y)$ は奇関数。

(4) $f(z)$ のテイラー級数が収束円を持つとき、$u(x,y)$ と $v(x,y)$ の収束域はそれぞれこの収束円に内接する傾いた正方形（**収束ダイヤモンド**）となる。

14･1 *Lemma* と公式

最初に、重要な *Lemma* を1つ用意する。

***Lemma* 14.1.0**

x,y は実数、r は非負の整数とするとき、次式が成立する。

$$(x+iy)^r=\sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}x^{r-2s}y^{2s}+i\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}x^{r-2s-1}y^{2s+1} \tag{1.0}$$

但し、$0^0=1$，$\lceil x\rceil$ は天井関数，$\lfloor x\rfloor$ は床関数。

証明

$$\begin{aligned}(x+iy)^1&=\sum_{s=0}^{1}{}_1C_s\,x^{1-s}i^sy^s\\&={}_1C_0\,x^{1-0}y^0+i\left({}_1C_1\,x^{1-1}y^1\right)\\&=\sum_{s=0}^{0}(-1)^s{}_1C_{2s}\,x^{1-2s}y^{2s}+i\sum_{s=0}^{0}(-1)^s{}_1C_{2s+1}\,x^{1-2s-1}y^{2s+1}\qquad\left(\begin{aligned}0&=\left\lceil\frac{1-1}{2}\right\rceil\\0&=\left\lfloor\frac{1-1}{2}\right\rfloor\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+iy)^2&=\sum_{s=0}^{2}{}_2C_s\,x^{2-s}i^sy^s\\&={}_2C_0\,x^{2-0}y^0-{}_2C_2\,x^{2-2}y^2+i\left({}_2C_1\,x^{2-1}y^1\right)\\&=\sum_{s=0}^{1}(-1)^s{}_2C_{2s}\,x^{2-2s}y^{2s}+i\sum_{s=0}^{0}(-1)^s{}_2C_{2s+1}\,x^{2-2s-1}y^{2s+1}\qquad\left(\begin{aligned}1&=\left\lceil\frac{2-1}{2}\right\rceil\\0&=\left\lfloor\frac{2-1}{2}\right\rfloor\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+iy)^3&=\sum_{s=0}^{3}{}_3C_s\,x^{3-s}i^sy^s\\&={}_3C_0\,x^{3-0}y^0-{}_3C_2\,x^{3-2}y^2+i\left({}_3C_1\,x^{3-1}y^1-{}_3C_3\,x^{3-3}y^3\right)\\&=\sum_{s=0}^{1}(-1)^s{}_3C_{2s}\,x^{3-2s}y^{2s}+i\sum_{s=0}^{1}(-1)^s{}_3C_{2s+1}\,x^{3-2s-1}y^{2s+1}\qquad\left(\begin{aligned}1&=\left\lceil\frac{3-1}{2}\right\rceil\\1&=\left\lfloor\frac{3-1}{2}\right\rfloor\end{aligned}\right)\end{aligned}$$

$$(x+iy)^4 = \sum_{s=0}^{4} {}_4C_s\, x^{4-s} i^s y^s$$

$$= {}_4C_0\, x^{4-0} y^0 - {}_4C_2\, x^{4-2} y^2 - {}_4C_4\, x^{4-4} y^4 + i\left({}_4C_1\, x^{4-1} y^1 - {}_4C_3\, x^{4-3} y^3\right)$$

$$= \sum_{s=0}^{2} (-1)^s {}_4C_{2s}\, x^{4-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^{1} (-1)^s {}_4C_{2s+1}\, x^{4-2s-1} y^{2s+1} \qquad \left(\begin{array}{l} 2 = \left\lceil \dfrac{4-1}{2} \right\rceil \\ 1 = \left\lfloor \dfrac{4-1}{2} \right\rfloor \end{array} \right)$$

以下、帰納法により与式を得る。

この *Lemma* を用いれば 複素関数を実部虚部別にベキ級数に展開できる。

公式 14･1･1

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(z-a)^r \tag{1.1}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s} \tag{1.1u}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1} \tag{1.1v}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

Lemma 14･1･0 において x を $x-a$ に置換すれば、

$$\{(x-a)+iy\}^r = \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

これを (1.1) に代入すれば、

$$f(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s} + i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

実部と虚部をそれぞれ $u(x,y)$, $v(x,y)$ と記述して与式を得る。

最初の数項

$u(x,y)$ の最初の数項を展開すると次のようである。

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = {} & \frac{f^{(0)}(a)}{0!}\left\{\binom{0}{0}(x-a)^{0-0}y^{0}\right\} \\
& + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}\left\{\binom{1}{0}(x-a)^{1-0}y^{0}\right\} \\
& + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\left\{\binom{2}{0}(x-a)^{2-0}y^{0}-\binom{2}{2}(x-a)^{2-2}y^{2}\right\} \\
& + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left\{\binom{3}{0}(x-a)^{3-0}y^{0}-\binom{3}{2}(x-a)^{3-2}y^{2}\right\} \\
& + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left\{\binom{4}{0}(x-a)^{4-0}y^{0}-\binom{4}{2}(x-a)^{4-2}y^{2}+\binom{4}{4}(x-a)^{4-4}y^{4}\right\} \\
& + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}\left\{\binom{5}{0}(x-a)^{5-0}y^{0}-\binom{5}{2}(x-a)^{5-2}y^{2}+\binom{5}{4}(x-a)^{5-4}y^{4}\right\} \\
& + \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

この展開例からも分かるように、これは x に関しても y に関しても級数とは呼び難い中途半端な公式である。そこで、これを並べ替えて x に関しても y に関しても級数となるようにしよう。

公式 14･1･2

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$
f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^{s}}{s!} \tag{1.2}
$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$
u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u}
$$

$$
v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^{s}}{s!}\frac{(-1)^{r}y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v}
$$

但し、$0^0=1$。

証明

公式 14･1･1 より

$$
u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r!}\sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^{s}\binom{r}{2s}(x-a)^{r-2s}y^{2s} \tag{1.1u}
$$

$$
v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(a)}{r!}\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}(-1)^{s}\binom{r}{2s+1}(x-a)^{r-2s-1}y^{2s+1} \tag{1.1v}
$$

ここで、

$$A_r := \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \quad , \quad X := (x-a)$$

$$a_{rs} := (-1)^s \begin{pmatrix} r \\ 2s \end{pmatrix} \quad , \quad b_{rs} := (-1)^s \begin{pmatrix} r \\ 2s+1 \end{pmatrix}$$

と略記すれば

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} a_{rs} X^{r-2s} y^{2s} \tag{1.1u'}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} b_{rs} X^{r-2s-1} y^{2s+1} \tag{1.1v'}$$

(1.1u') を次のように並べ替える。

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_r \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} a_{rs} X^{r-2s} y^{2s} \\
&= A_0 \left\{ a_{00} X^{0-0} y^0 \right\} \\
&\quad + A_1 \left\{ a_{10} X^{1-0} y^0 \right\} \\
&\quad + A_2 \left\{ a_{20} X^{2-0} y^0 + a_{21} X^{2-2} y^2 \right\} \\
&\quad + A_3 \left\{ a_{30} X^{3-0} y^0 + a_{31} X^{3-2} y^2 \right\} \\
&\quad + A_4 \left\{ a_{40} X^{4-0} y^0 + a_{41} X^{4-2} y^2 + a_{42} X^{4-4} y^4 \right\} \\
&\quad + A_5 \left\{ a_{50} X^{5-0} y^0 + a_{51} X^{5-2} y^2 + a_{52} X^{5-4} y^4 \right\} \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&= \left\{ A_0 a_{00} X^{0-0} + A_1 a_{10} X^{1-0} + A_2 a_{20} X^{2-0} + A_3 a_{30} X^{3-0} + \cdots \right\} y^0 \\
&\quad + \left\{ A_2 a_{21} X^{2-2} + A_3 a_{31} X^{3-2} + A_4 a_{41} X^{4-2} + A_5 a_{51} X^{5-2} + \cdots \right\} y^2 \\
&\quad + \left\{ A_4 a_{42} X^{4-4} + A_5 a_{52} X^{5-4} + A_6 a_{62} X^{6-4} + A_7 a_{72} X^{7-4} + \cdots \right\} y^4 \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&= \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} A_{0+s} a_{0+s,0} X^s \right\} y^0 + \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} A_{2+s} a_{2+s,1} X^s \right\} y^2 + \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} A_{4+s} a_{4+s,2} X^s \right\} y^4 + \cdots
\end{aligned}$$

i.e.

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} A_{2r+s} a_{2r+s,r} X^s \right\} y^{2r}$$

記号を元に戻すと、

$$A_r = \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \qquad \Longrightarrow \qquad A_{2r+s} = \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!}$$

$$a_{rs} = (-1)^s \binom{r}{2s} \quad \Longrightarrow \quad a_{2r+s,r} = (-1)^r \binom{2r+s}{2r}$$

であるから、

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r} (x-a)^s \right\} (-1)^r y^{2r}$$

更に

$$\binom{2r+s}{2r} = \frac{(2r+s)!}{(2r)!\, s!}$$

これを上に代入すれば

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \frac{(2r+s)!}{(2r)!\, s!} (x-a)^s \right\} (-1)^r y^{2r}$$

i.e.

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u}$$

(1.1v') についても上記 と類似の計算を行えば次を得る。

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r+1} (x-a)^{s-1} \right\} (-1)^r y^{2r+1}$$

ここで、{ } 内の初項は

$$\frac{f^{(2r+0)}(a)}{(2r+0)!} \binom{2r+0}{2r+1} (x-a)^{0-1} = 0 \qquad for\ \ r=0,1,2,\cdots$$

であるから、

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r+1} (x-a)^{s-1} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r+1} (x-a)^{s-1}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s+1)}(a)}{(2r+s+1)!} \binom{2r+s+1}{2r+1} (x-a)^s$$

よって

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s+1)}(a)}{(2r+s+1)!} \binom{2r+s+1}{2r+1} (x-a)^s \right\} (-1)^r y^{2r+1}$$

更に

$$\binom{2r+s+1}{2r+1} = \frac{(2r+s+1)!}{(2r+1)!\, s!}$$

であるから、これを上に代入すれば

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(2r+s+1)}(a)}{(2r+s+1)!} \frac{(2r+s+1)!}{(2r+1)!\, s!} (x-a)^s \right\} (-1)^r y^{2r+1}$$

i.e.

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v}$$

Note

y に関して、実部 $u(x,y)$ は偶関数であり、虚部 $v(x,y)$ は奇関数である。

コーシー・リーマンの方程式

(1.2u) , (1.2v) を x,y でそれぞれ偏微分すると次のようになる。これらはコーシー・リーマンの方程式である。

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+2)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

実部虚部別マクローリン展開

$u(x,y)$, $v(x,y)$ のマクローリン級数の最初の最初の数行は次のようである。

$$\begin{aligned}
u(x,y) =& \left\{f^{(0)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(1)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^0 y^0}{0!} \\
&+\left\{f^{(2)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(3)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(4)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(5)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^1 y^2}{2!} \\
&+\left\{f^{(4)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(5)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(6)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(7)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^2 y^4}{4!} \\
&+\left\{f^{(6)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(7)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(8)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(9)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^3 y^6}{6!} \\
&+ \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(x,y) =& \left\{f^{(1)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(2)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(3)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(4)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^0 y^1}{1!} \\
&+\left\{f^{(3)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(4)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(5)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(6)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^1 y^3}{3!} \\
&+\left\{f^{(5)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(6)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(7)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(8)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^2 y^5}{5!} \\
&+\left\{f^{(7)}(0)\frac{x^0}{0!}+f^{(8)}(0)\frac{x^1}{1!}+f^{(9)}(0)\frac{x^2}{2!}+f^{(10)}(0)\frac{x^3}{3!}+\cdots\right\}\frac{(-1)^3 y^7}{7!} \\
&+ \\
&\vdots
\end{aligned}$$

マクローリン級数中に偶数階の微分係数を含まない関数は奇関数と呼ばれる。
奇関数については次が成立する。

公式 14･1･2'（奇関数）

複素関数 $f(z)$（$z=x+iy$）が次のように実係数のマクローリン級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s+1)}(0)\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \tag{1.2'}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u'}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v'}$$

但し、$0^0=1$。

Note

x に関して、実部 $u(x,y)$ は奇関数であり、虚部 $v(x,y)$ は偶関数である。

例　$f(z)=\sin z$

$$f^{(2s+1)}(0) = (-1)^s \qquad s=0,1,2,\cdots$$

$$f^{(2r+2s+1)}(0) = (-1)^{r+s} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

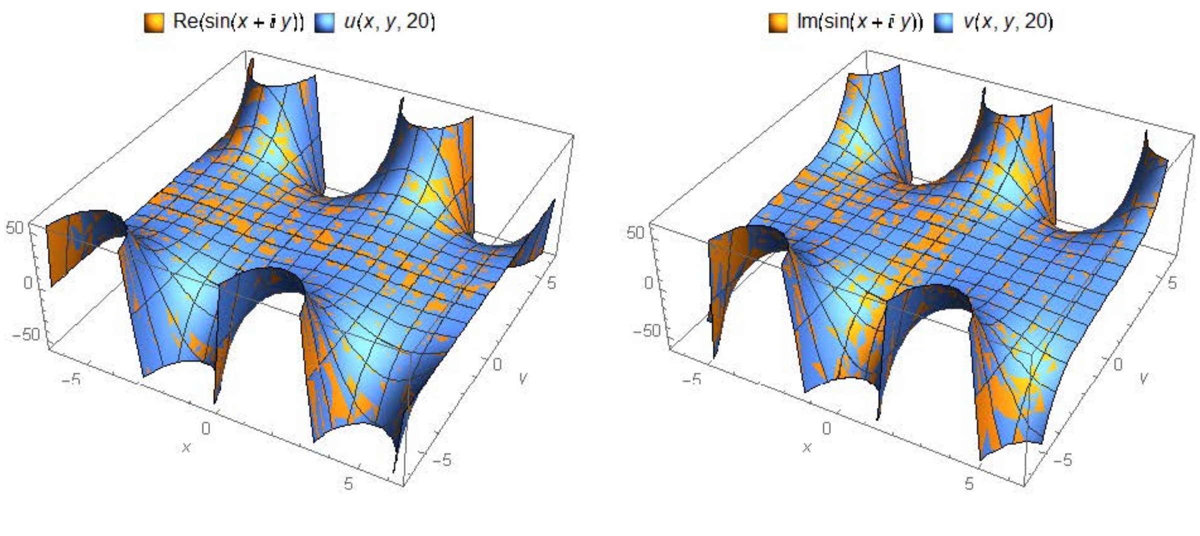
これらを上記公式に代入すると

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$u(x,y),v(x,y)$ の両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なっている。



マクローリン級数中に奇数階の微分係数を含まない関数は偶関数と呼ばれる。
偶関数については次が成立する。

公式 14・1・2”（偶関数）

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が次のように実係数のマクローリン級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!} \tag{1.2″}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u″}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v″}$$

但し、$0^0=1$。

Note

x に関して、実部 $u(x,y)$ は偶関数であり、虚部 $v(x,y)$ は奇関数である。

例 $f(z)=\cos z$

$f^{(2s)}(0) = (-1)^s \qquad s=0,1,2,\cdots$

$f^{(2r+2s)}(0) = (-1)^{r+s} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$

$f^{(2r+2s+2)}(0) = (-1)^{r+s+1} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$

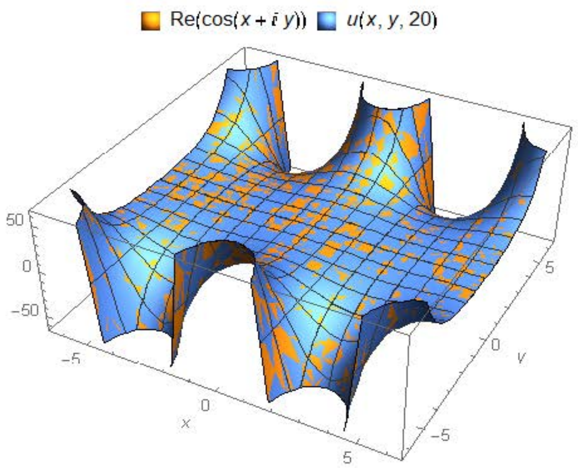
これらを上記公式に代入すると

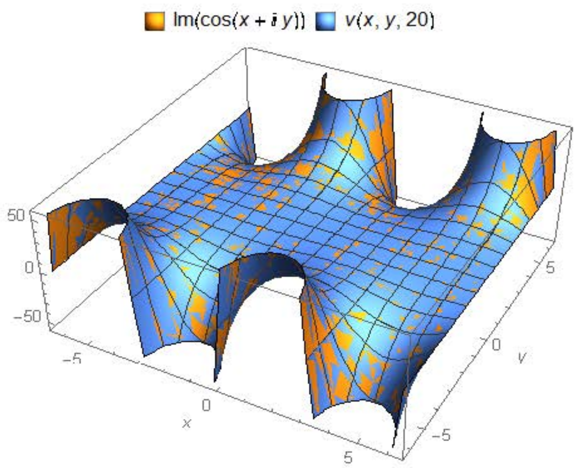
$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$u(x,y),v(x,y)$ の両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。





両図において橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なっている。

Mathematica における 0^0 の扱い

数式処理ソフト *Mathematica* は 0^0 を *Indeterminate* として計算しない。これでは不都合なので本稿では計算に先立ち次のオプションを指定している。

```
Unprotect[Power]; Power[0,0] = 1;
```

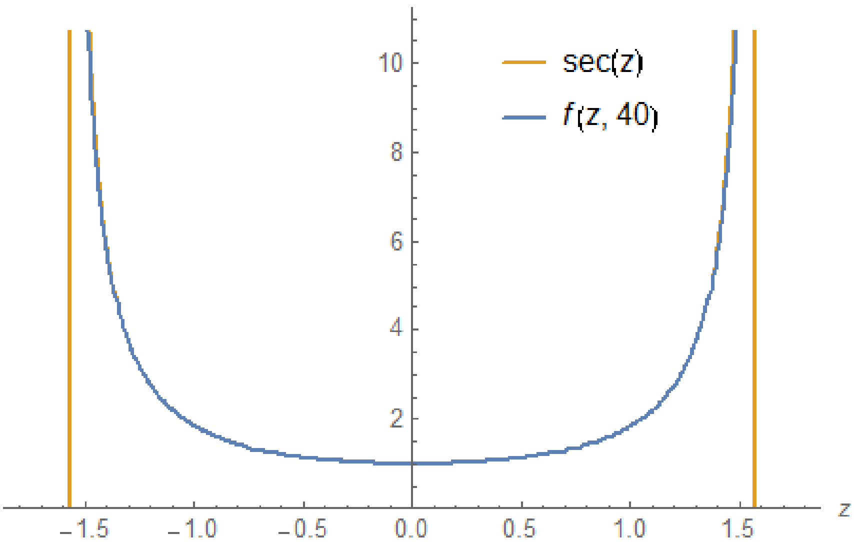
14·2 例1 : *secz*

前節で示された2例は全て特異点がなく、公式 14·1·2 は全複素平面上で成立した。本節以降では特異点がある関数の実部虚部別テイラー展開を考察する。本節では手始めに正割関数を取り上げる。

$f(z)=\sec z$ とすれば、これはオイラー数 $E_r\ (r=0,1,2,\cdots)$ を用いて次のようにマクローリン展開される。なお、E_r の最初の数個は $1,0,-1,0,5,0,-61,0,1385,\cdots$ である。

$$f(z)=\sec z=\sum_{r=0}^{\infty}|E_r|\frac{z^r}{r!} \tag{2.1}$$

この両辺を図示すると次のようである。橙が左辺で青が右辺である。両辺はぴったり重なっている。特異点が $z=\pm\pi/2$ に観察される。



公式 14·1·1 による実部虚部別展開

(2.1) より

$$f^{(r)}(0)=\sec^{(r)}0=|E_r| \qquad r=0,1,2,\cdots \tag{2.a}$$

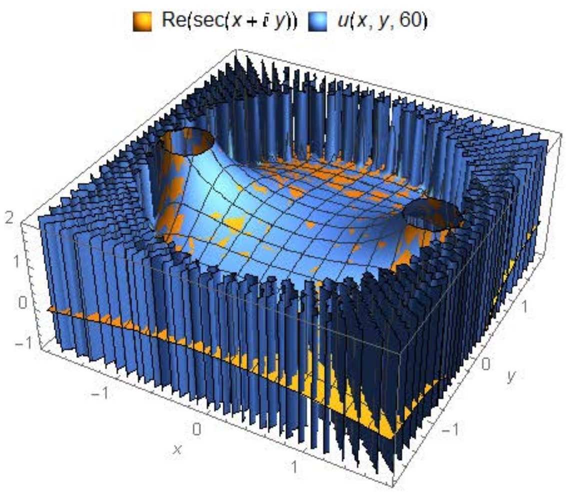
これを 公式 14·1·1 に代入すれば

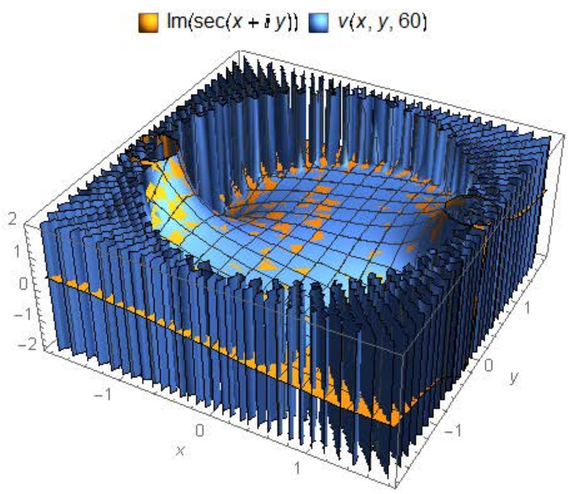
$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_r|}{r!}\sum_{s=0}^{\lceil\frac{r-1}{2}\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}x^{r-2s}y^{2s}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{|E_r|}{r!}\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}x^{r-2s-1}y^{2s+1}$$

但し、$0^0=1$, $\lceil x\rceil$ は天井関数 , $\lfloor x\rfloor$ は床関数。

これらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。半径 $\pi/2$ の収束円が見える。





公式 14･1･2" による実部虚数別展開

$f(z)=sec\ z$ は偶関数であるから、

$$f^{(2s)}(0) = (-1)^s E_{2s} \qquad s=0,1,2,\cdots$$

$$f^{(2r+2s)}(0) = (-1)^{r+s} E_{2r+2s} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

$$f^{(2r+2s+2)}(0) = (-1)^{r+s+1} E_{2r+2s+2} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

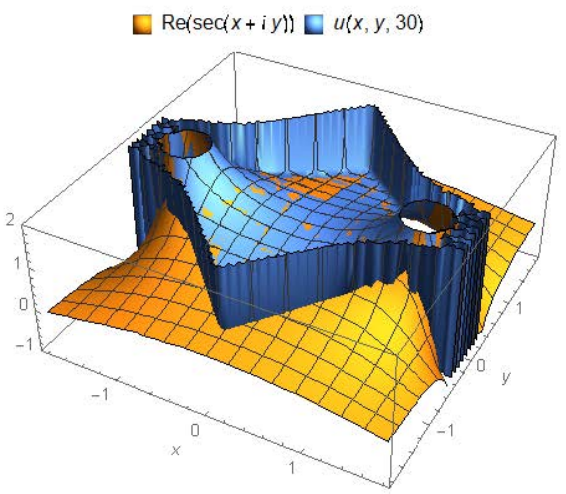
これらを 公式 14･1･2" (1.2u″) , (1.2v″) に代入すれば

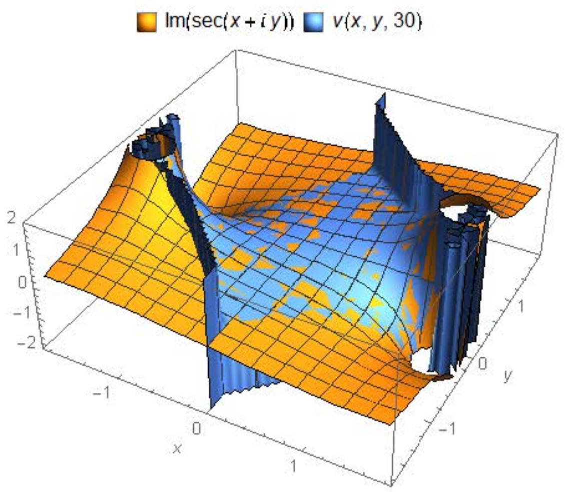
$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s E_{2r+2s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!} \tag{2.2u″}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} E_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{2.2v″}$$

但し、$0^0 = 1$

これらの両辺を図示すると次のようである。左が実数部で右が虚数部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





驚いたことに、これらの収束円はその4隅を双曲線で切り取られている。諸々の数値計算の結果、両式は正方形内では級数でその外側では漸近展開となっていることが判った。つまり、収束域は六角形ではなくて正方形である。

(2.2u″), (2.2v″) の加速

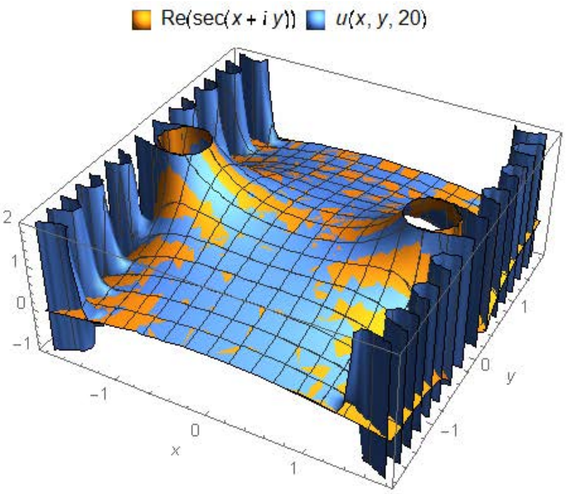
そこで、これらのオイラー変換による収束加速を試みる。加速方法は並列加速法を用いる。すると次のようになる。なお、この加速法については「 13 多重級数の収束加速 」(アラカルト編)を参照されたい。それは次のようになる。

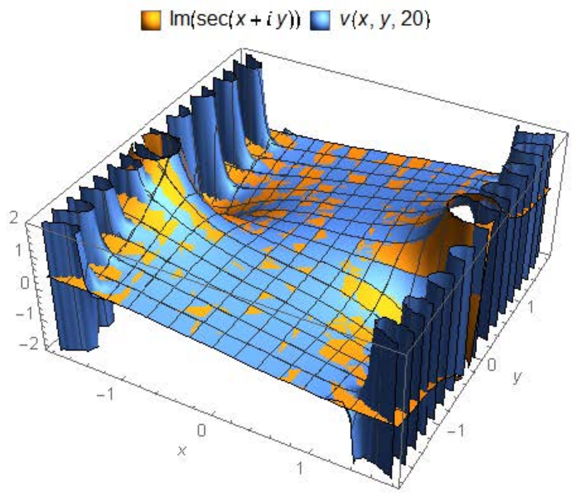
$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r+s}(-1)^{s}E_{2r+2s}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r+s}(-1)^{s+1}E_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

これらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





この加速により、収束円は回復されている。そして数値計算の結果、収束域は更に収束円の外側(主として縦方向)にまで漸近的に拡張されていることが分った。

14・3 例2 : $1/(z^2+1)$

本節では、次の分数関数の実部虚部別テイラー展開を考察する。この関数は典型的な非整関数(特異点を持つ関数)である。

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \tag{3.0}$$

$Re(z) \geq 0$ のとき、この高階導関数は次式で与えられる。(「岩波 数学公式 I 」p32。)

$$f^{(r)}(z) = \left(\frac{1}{z^2+1}\right)^{(r)} = \frac{(-1)^r r!}{(z^2+1)^{(r+1)/2}} \sin\left\{(r+1)\cot^{-1} z\right\} \qquad r=0,1,2,\cdots$$

これに実数 a を代入すれば

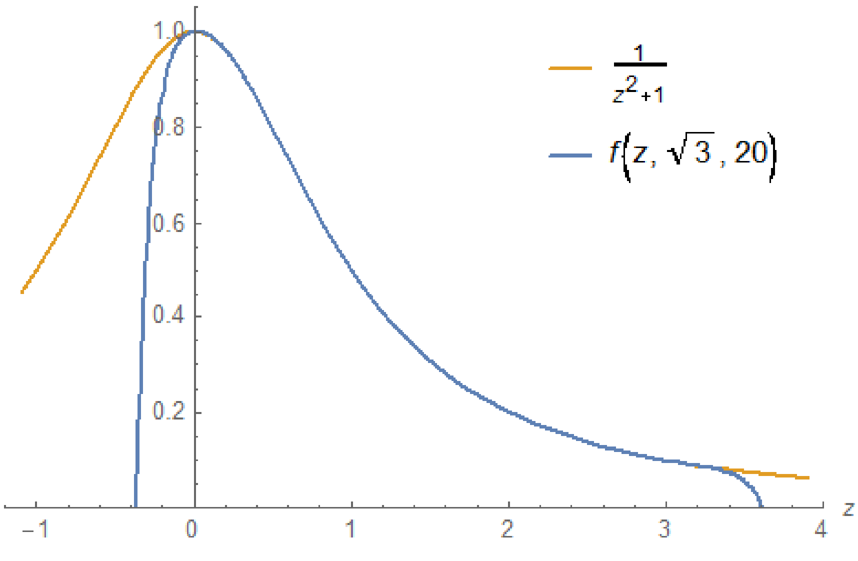
$$f^{(r)}(a) = \left(\frac{1}{z^2+1}\right)^{(r)}_{z=a} = \frac{(-1)^r r!}{(a^2+1)^{(r+1)/2}} \sin\left\{(r+1)\cot^{-1} a\right\} \qquad r=0,1,2,\cdots \tag{3.a}$$

よって $f(z)$ の a の周りのテイラー展開は

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r r!}{(a^2+1)^{(r+1)/2}} \sin\left\{(r+1)\cot^{-1} a\right\} \frac{(z-a)^r}{r!} \tag{3.1}$$

(3.0) から明らかなように、この関数は $z=\pm i$ に特異点を持つ。収束半径 R は a から $\pm i$ までの距離である。a は実軸上にあるから、$R = \sqrt{a^2+1}$ と計算される。

$a=\sqrt{3}$ としてこれの両辺を図示すると次のようである。橙が左辺で青が右辺である。展開の中心点は $\sqrt{3}$ 、収束半径は 2 である。



公式 14・1・1 による実部虚部別展開

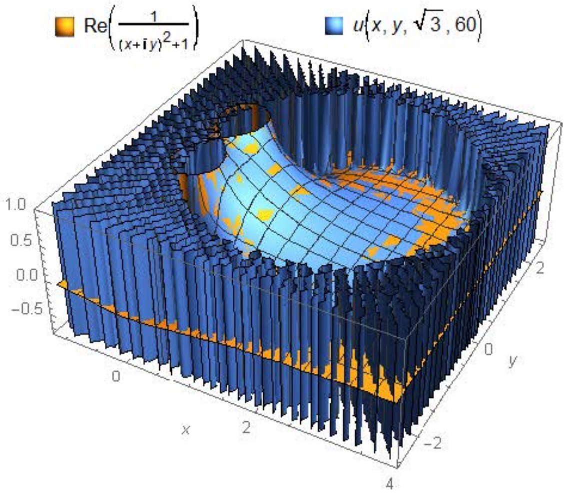
(3.a) を 公式 14・1・1 に代入すれば

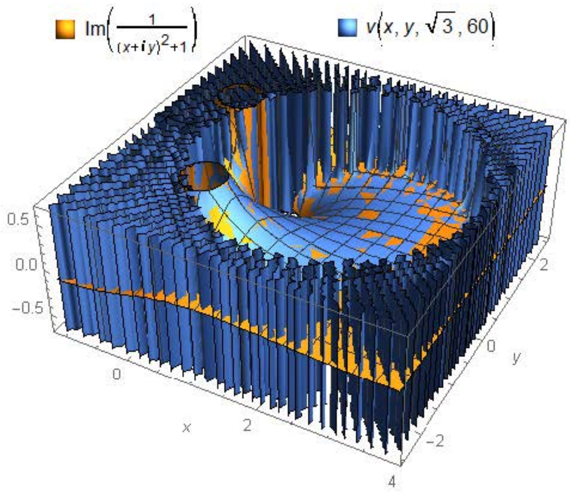
$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin\{(r+1)\cot^{-1} a\}}{(a^2+1)^{(r+1)/2}} \sum_{s=0}^{\lceil \frac{r-1}{2} \rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin\{(r+1)\cot^{-1} a\}}{(a^2+1)^{(r+1)/2}} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

これらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。半径 2 の収束円が観察される。





公式 14･1･2 による実部虚部別展開

(3.a) より

$$f^{(2r+s)}(a) = \frac{(-1)^s (2r+s)!}{(a^2+1)^{(2r+s+1)/2}} \sin\{(2r+s+1)\cot^{-1} a\} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

$$f^{(2r+s+1)}(a) = -\frac{(-1)^s (2r+s+1)!}{(a^2+1)^{(2r+s+2)/2}} \sin\{(2r+s+2)\cot^{-1} a\} \qquad r,s=0,1,2,\cdots$$

これらを 公式 14･1･2 に代入すれば

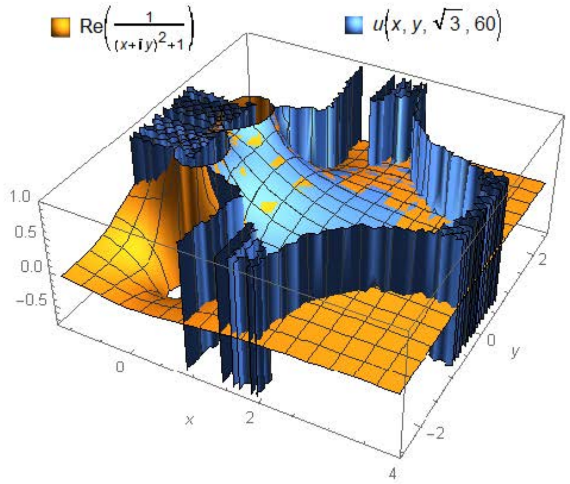
$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2r+s)!}{(a^2+1)^{(2r+s+1)/2}} \sin\{(2r+s+1)\cot^{-1} a\} \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{3.2u}$$

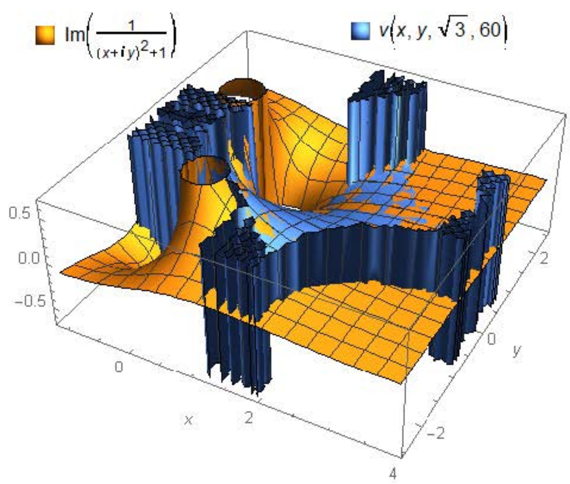
$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (2r+s+1)!}{(a^2+1)^{(2r+s+2)/2}} \sin\{(2r+s+2)\cot^{-1} a\} \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{3.2v}$$

但し、$0^0 = 1$

$a=\sqrt{3}$ としてこれらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。前節と同様に、これらの収束円はその4隅を双曲線で切り

取られている。そして両式は、正方形内では級数、その周辺では漸近展開である。





(3.2u), (3.2v) の加速

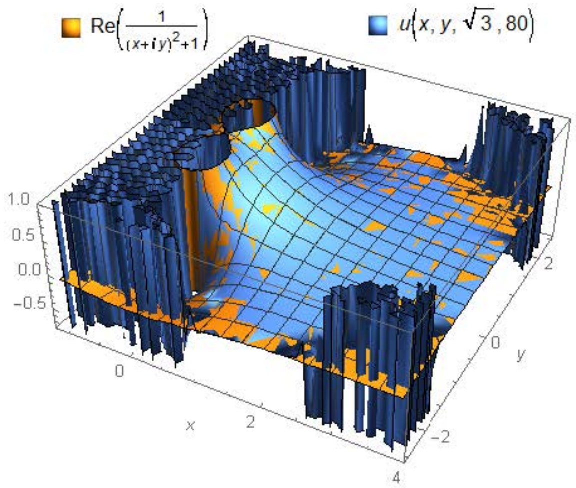
そこで、これらのオイラー変換による収束加速を試みる。加速方法は並列加速法を用いる。すると次のようになる。なお、この加速法については「13 多重級数の収束加速」(アラカルト編)を参照されたい。それは次のようになる。

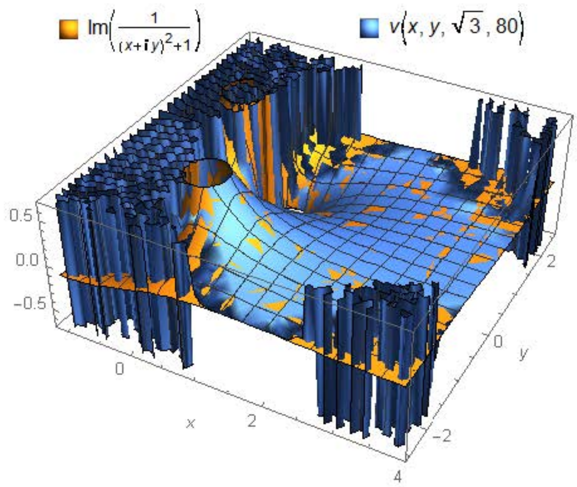
$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r+s}$$
$$\times\frac{(-1)^s(2r+s)!}{\left(a^2+1\right)^{(2r+s+1)/2}}\sin\left\{(2r+s+1)\cot^{-1}a\right\}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r+s}$$
$$\times\frac{(-1)^s(2r+s+1)!}{\left(a^2+1\right)^{(2r+s+2)/2}}\sin\left\{(2r+s+2)\cot^{-1}a\right\}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$

$a=\sqrt{3}$ としてこれらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





これらの描画に各10時間を要した。これは最早加速とは言い難い。しかし、解析接続は生じている。即ち、収束円が回復された上、収束域は更に収束円の外側（主として右方向）にまで漸近的に拡張されている。

14·4 例3： $\log z$

本節では対数関数の実部虚部別テイラー展開を考察する。この関数は分岐点(特異点の一種)を持つことで知られている。

$f(z)=\log z$ とすれば、「 9 高階微分 」(超微積分編) 公式9·2·3 より

$$f^{(r)}(z)=\begin{cases}\log z & r=0\\ (-1)^{r-1}(r-1)!\,z^{-r} & r=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

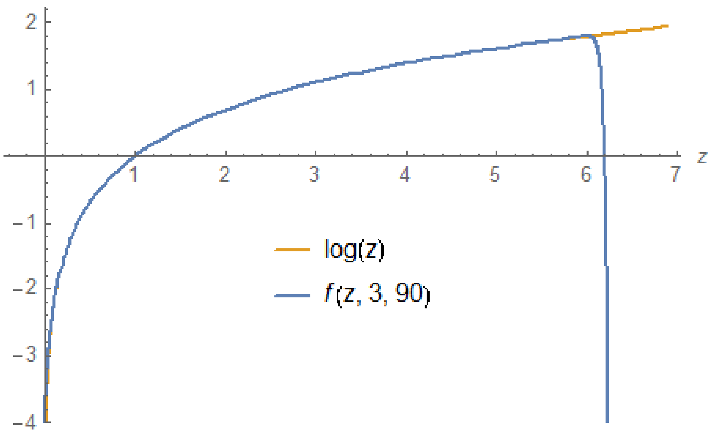
これに実数 a を代入すれば

$$f^{(r)}(a)=\begin{cases}\log a & r=0\\ (-1)^{r-1}(r-1)!\,a^{-r} & r=1,2,3,\cdots\end{cases} \tag{4.a}$$

よって $f(z)$ の a の周りのテイラー展開は

$$f(z)=\log z=\log a+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{a^r r}(z-a)^r \tag{4.1}$$

$a=3$ としてこれの両辺を図示すると次のようである。橙が左辺で青が右辺である。特異点が $z=0$ に観察される。$a=3$ であるから、収束半径は 3 となる。



公式 14·1·1 による実部虚部別展開

(4.a) を 公式 14·1·1 に代入すれば

$$u(x,y)=\frac{\log a}{0!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{a^r r!}\sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}(x-a)^{r-2s}y^{2s}$$

$$v(x,y)=\frac{\log a}{0!}\binom{0}{1}(x-a)^{-1}y^1$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{a^r r!}\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}(x-a)^{r-2s-1}y^{2s+1}$$

i.e.

$$u(x,y)=\log a+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{a^r r}\sum_{s=0}^{\left\lceil\frac{r-1}{2}\right\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}(x-a)^{r-2s}y^{2s}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{a^r r} \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

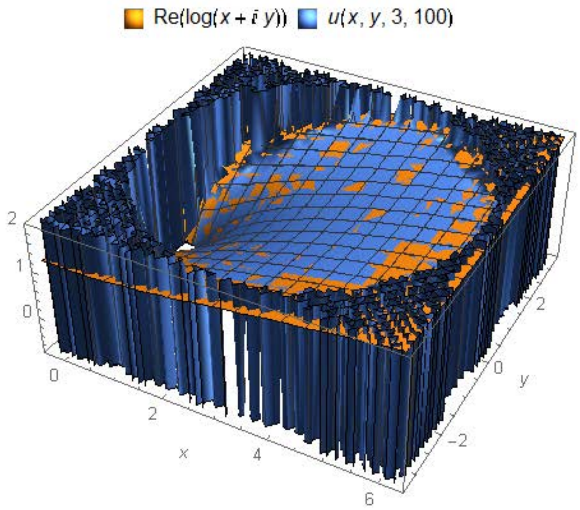
r の初期値を 1 から 0 に変更すれば

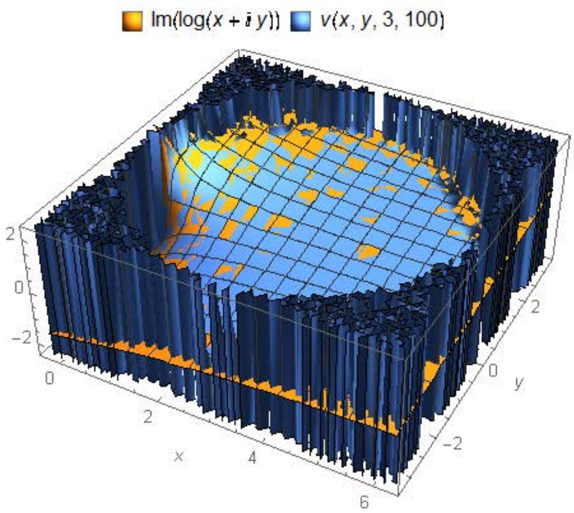
$$u(x,y) = \log a + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{a^{r+1}(r+1)} \sum_{s=0}^{\lceil r/2 \rceil} (-1)^s \binom{r+1}{2s} (x-a)^{r-2s+1} y^{2s}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{a^{r+1}(r+1)} \sum_{s=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^s \binom{r+1}{2s+1} (x-a)^{r-2s} y^{2s+1}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

$a=3$ としてこれらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。半径 3 の収束円が観察される。





公式 14·1·2 による実部虚部別展開

(4.a) より

$$f^{(s)}(a) = (-1)^{s-1}(s-1)!\ a^{-s} \qquad s=1,2,3,\cdots$$

$$f^{(2r+s)}(a) = \begin{cases} \log a & 2r+s=0 \\ (-1)^{s-1}(2r+s-1)!\ a^{-2r-s} & 2r+s=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$f^{(2r+s+1)}(a) = (-1)^s(2r+s)!\ a^{-2r-s-1} \qquad r,s = 0,1,2,\cdots$$

次に、公式 14·1·2 (1.2u) は、

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$= f^{(0)}(a) + \sum_{s=1}^{\infty} f^{(s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

これに上記の $f^{(s)}(a)$, $f^{(2r+s)}(a)$ を代入すれば

$$u(x,y) = \log a + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{a^s}\frac{(x-a)^s}{s!}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(2r+s-1)!}{a^{2r+s}}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

第3項の r の初期値を 1 から 0 に変更すれば、

$$u(x,y) = \log a + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{a^s}\frac{(x-a)^s}{s!}$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(2r+s+1)!}{a^{2r+s+2}}\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^{r+1} y^{2r+2}}{(2r+2)!}$$

i.e.

$$u(x,y) = \log a + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{a^s}\frac{(x-a)^s}{s}$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r+s+1)!}{a^{2r+s+2}}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+2}}{(2r+2)!} \tag{4.2u}$$

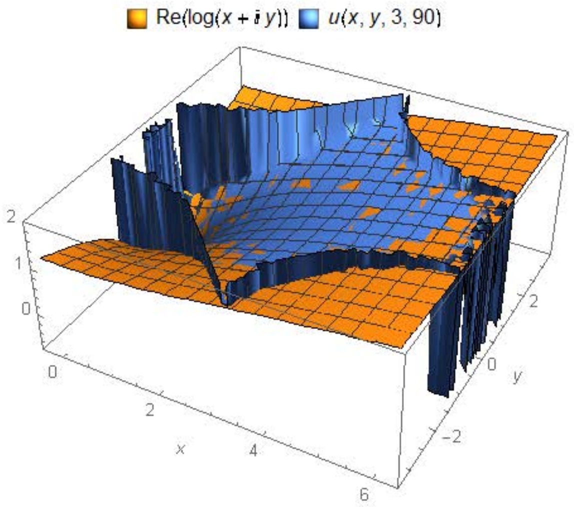
次に、公式 14･1･2 (1.2v) は

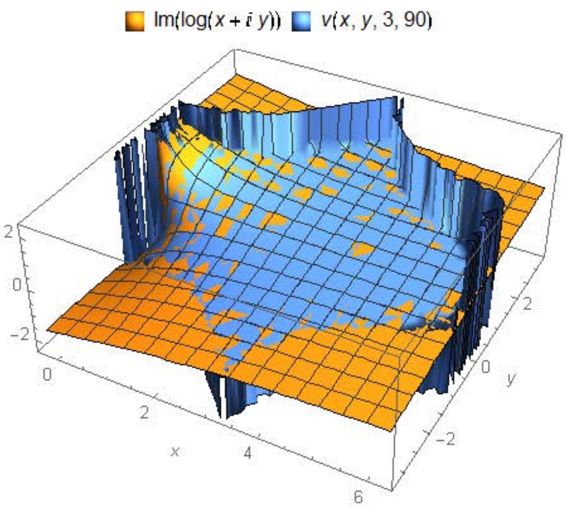
$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

これに上記の $f^{(2r+s+1)}(a)$ を代入すれば、

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r+s)!}{a^{2r+s+1}}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{4.2v}$$

$a=3$ として (4.2u), (4.2v) の両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。前節と同様に、これらの収束円はその4隅を双曲線で切り取られている。そして両式は、正方形内では級数、その周辺では漸近展開である。





(4.2u), (4.2v) の加速

そこで、これらのオイラー変換による収束加速を試みる。加速方法は並列加速法を用いる。すると次のようになる。なお、この加速法については「 13 多重級数の収束加速 」(アラカルト編) を参照されたい。それは次のようになる。

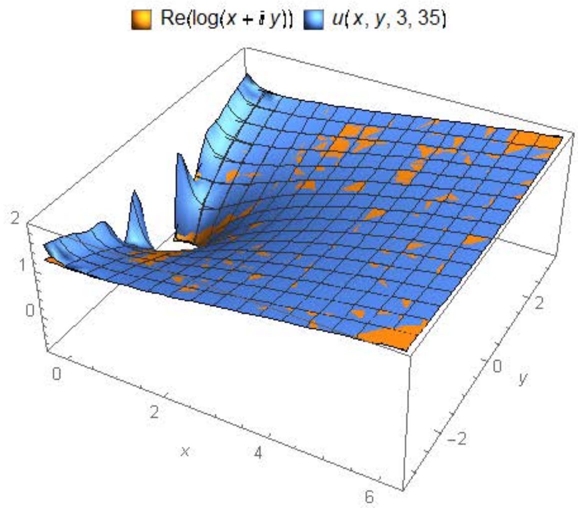
$$u(x,y)=\log a+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{s}\frac{(-1)^{s-1}}{a^s}\frac{(x-a)^s}{s}$$

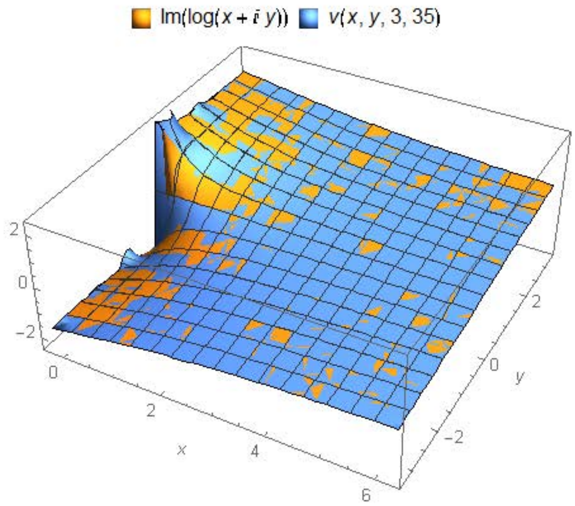
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r+s}\frac{(2r+s+1)!}{a^{2r+s+2}}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+2}}{(2r+2)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r+s}\frac{(2r+s)!}{a^{2r+s+1}}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$。

$a=3$ としてこれらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。上記の4角形の収束域は半平面に解析接続されているように見える。





参 考

以上、複素関数の実部虚部別テイラー級数のいくつかの例を示した。これ以外の実部虚部別のテイラー級数やローラン級数については次を参照されたい。

「 15 初等関数の実部虚部別テイラー級数 」

2019.11.26
2020.02.16 Renewed
2023.11.10 Updated Sec.1

河野 和
広島市

宇宙人の数学