15 初等関数の実部虚部別テイラー級数

凡 例

公式

「14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」の公式 14･1･2 , ･2', ･2" を用いる。

公式 14･1･2（再掲）

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!} \tag{1.2}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。但し、$0^0=1$ とする。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v}$$

公式 14･1･2'（奇関数）（再掲）

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が次のように実係数のマクローリン級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s+1)}(0)\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \tag{1.2'}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。但し、$0^0=1$ とする。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u'}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v'}$$

公式 14･1･2"（偶関数）（再掲）

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が次のように実係数のマクローリン級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!} \tag{1.2"}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。但し、$0^0=1$ とする。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u"}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v"}$$

Mathematica における $\mathbf{0^0}$ の扱い

本稿では描画や計算に数式処理ソフト *Mathematica* を使用しているが、計算や描画に先立ち次のオプションを指定している。

Unprotect [Power] ; Power [0,0] = 1 ;

記号

本稿で使用するベルヌイ数等はそれぞれ次のように定義される。

ベルヌイ数とオイラー数

$B,E \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	…
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385	0	-50521	…

符号関数

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

複素関数の実部と虚部

複素関数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ の実部と虚部は次のように示す。

$u(x,y)$ ： 実部

$v(x,y)$ ： 虚部

検証方法

数式処理ソフト *Mathematica* を用いて、3D図及び数値計算により検証した。

以下、$z \coth z$ の場合を例示する。

(1) 数式

$z \coth z$ の実数部虚数部別マクローリン級数は *Mathematica* では次のように記述される。

```
Unprotect[Power];  Power[0, 0] = 1;
```

$$B_{n\_} := \mathrm{BernoulliB}[n]$$

$$f[z\_, m\_] := \sum_{s=0}^{m} 2^{2s} B_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

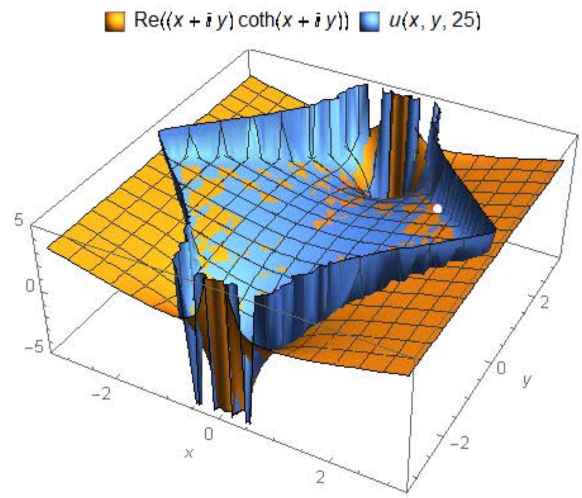
$$u[x\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} 2^{2r+2s} B_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

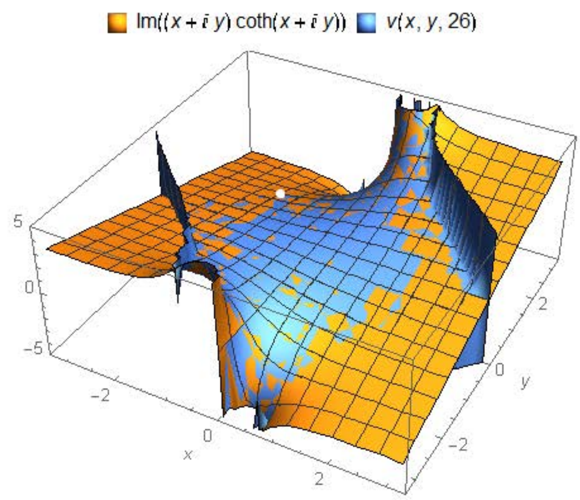
$$v[x\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} 2^{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

(2) 3D図

次のコマンドにより実部と虚部の3D図を描く。左図が実部、右図が虚部である。

```
Plot3D[{Re[(x + ⅈ y) Coth[x + ⅈ y]], u[x, y, 25]}, {x, -16/5, 16/5}, {y, -16/5, 16/5},
 PlotLegends → Placed["Expressions", Above], ClippingStyle → None,
 AxesLabel → Automatic, PlotRange → {-5, 5}]
Plot3D[{Im[(x + ⅈ y) Coth[x + ⅈ y]], v[x, y, 26]}, {x, -16/5, 16/5}, {y, -16/5, 16/5},
 PlotLegends → Placed["Expressions", Above], ClippingStyle → None,
 AxesLabel → Automatic, PlotRange → {-5, 5}]
```





両図において左辺が関数、右辺が級数である。両者が重なっていることは橙と青が斑であることで確認される。

(3) 数値計算

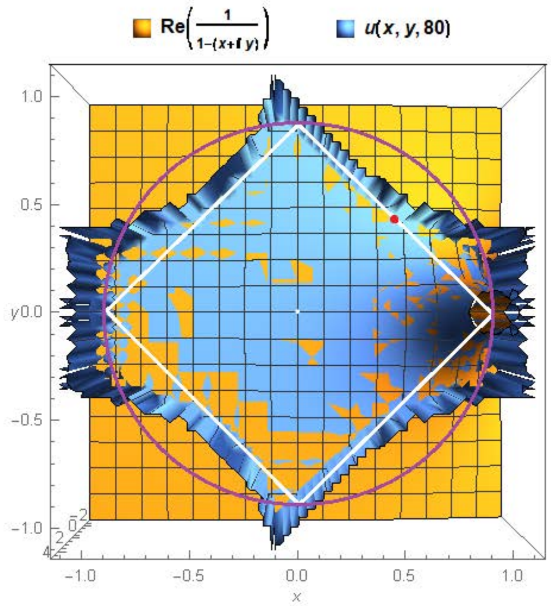
左右斜辺の中点(上図白点)付近の関数値を計算して両者が一致していることを確認する。

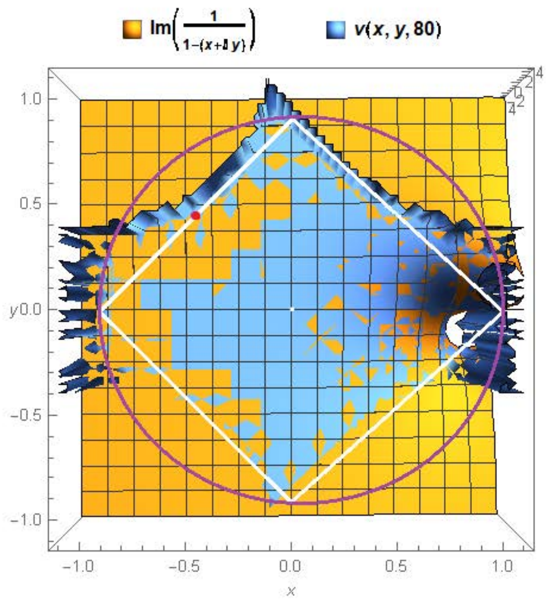
```
N[{Re[(1.56 + ⅈ 1.56) Coth[1.56 + ⅈ 1.56]], u[1.56, 1.56, 600]}]
{1.43081, 1.43081}
N[{Im[(-1.56 + ⅈ 1.56) Coth[-1.56 + ⅈ 1.56]], v[-1.56, 1.56, 600]}]
{-1.42535, -1.42535}
```

なお、次節以下では数値計算の結果のみを示す。

収束正方形

複素関数 $f(z)$ のテイラー級数の収束域は円であるが、$u(x,y), v(x,y)$ のテイラー級数の収束域はこの円に内接する正方形となる。例えば、$1/(1-z)$ の級数の収束域は次頁のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が関数で青が級数である。





紫の円は $f(z)$ の級数の収束円であり、それに内接する白の正方形は $u(x,y)$, $v(x,y)$ の級数の収束正方形である。正方形内では級数は収束しているので斑に見えている。正方形外にも斑の部分が見られるが、ここでは級数は漸近展開となっている。

なお、次節以下ではこの収束正方形を ◇ と記述する。

15･1 代数関数等

等比級数

1/(1−z)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{s=0}^{\infty} s!\,\frac{z^s}{s!} \qquad |z| < 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)!\,\frac{x^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)!\,\frac{x^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \diamond$$

検算

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)}\right],\ u\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 100\right]\right\}\right] \qquad N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)}\right],\ v\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 100\right]\right\}\right]$$

{1., 1.}　　{0.2, 0.2}

1/(1+z)

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{s=0}^{\infty} s!\,\frac{(-1)^s z^s}{s!} \qquad |z| < 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s)!\,\frac{(-1)^s x^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(2r+s+1)!\,\frac{(-1)^s x^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \diamond$$

検算

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)}\right],\ u\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 70\right]\right\}\right] \qquad N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)}\right],\ v\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 70\right]\right\}\right]$$

{0.6, 0.6}　　{1., 1.}

ベキ関数 z^p $(p,a \geqq 0)$

$$z^p = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-s)}\,a^{p-s}\,\frac{(z-a)^s}{s!} \qquad |z| < |a|$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(p-2r-s+1)}\,a^{p-2r-s}\,\frac{(x-a)^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(p-2r-s)}\,a^{p-2r-s-1}\,\frac{(x-a)^s}{s!}\,\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \diamond$$

検算（p=1/3 , a=7/2）

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\left(\frac{21}{4}+i\frac{7}{4}\right)^{1/3}\right],\ u\left[\frac{21}{4},\frac{7}{4},\frac{1}{3},3.5,70\right]\right\}\right]$$

{ 1.75864 , 1.75864 }

$$N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\left(\frac{7}{4}+i\frac{7}{4}\right)^{1/3}\right],\ v\left[\frac{7}{4},\frac{7}{4},\frac{1}{3},3.5,70\right]\right\}\right]$$

{ 0.350091 , 0.350091 }

指数関数 a^z ($a \geq 0$)

$$a^z = \sum_{s=0}^{\infty} \log^s a \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \log^{2r+s} a \frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \log^{2r+s+1} a \frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \infty$$

特に $a=e$ (=2.71828…) のとき、

$$e^z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \infty$$

検算（3^z のとき）

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[3^{2+i5}\right],\ u[2,5,3,30]\right\}\right]$$

{ 6.33382 , 6.33382 }

$$N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[3^{-2+i5}\right],\ v[-2,5,3,30]\right\}\right]$$

{ -0.0789378 , -0.0789378 }

対数関数

$\log z$ ($a \geq 0$)

$$\log z = \log a - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)!}{a^s}\frac{(-1)^s (z-a)^s}{s!} \qquad |z-a| \leq a,\ z \neq 0$$

$$u(x,y) = \log a - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)!}{a^s}\frac{(-1)^s (x-a)^s}{s!}$$

$$- \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2r+s-1)!}{a^{2r+s}}\frac{(-1)^s (x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \qquad |z-a| \leq \diamond$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2r+s)!}{a^{2r+s+1}} \frac{(-1)^s (x-a)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!} \qquad |z-a| \leq \Diamond$$

検算（ $a=3$ のとき）

$$N\left[\left\{Re\left[Log\left[\frac{9}{2}+i\,\frac{3}{2}\right]\right],\ u\left[4.5,\frac{3}{2},3,90\right]\right\}\right]$$

$\{1.55676,\ 1.55676\}$

$$N\left[\left\{Im\left[Log\left[\frac{3}{2}+i\,\frac{3}{2}\right]\right],\ v\left[\frac{3}{2},\frac{3}{2},3,90\right]\right\}\right]$$

$\{0.785398,\ 0.785398\}$

$log(1+z)$

$$log(1+z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} z^s}{s} \qquad |z| \leq 1,\ z \neq -1$$

$$u(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} x^s}{s} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2r+s-1)! \frac{(-1)^s x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)! \frac{(-1)^s x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!} \qquad |z-a| \leq \Diamond$$

検算

$$N\left[\left\{Re\left[Log\left[1+\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right]\right],\ u\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},90\right]\right\}\right]$$

$\{0.458145,\ 0.458145\}$

$$N\left[\left\{Im\left[Log\left[1-\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right]\right],\ v\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},90\right]\right\}\right]$$

$\{0.785398,\ 0.785398\}$

$log(1-z)$

$$log(1-z) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{s} \qquad |z| \leq 1,\ z \neq 1$$

$$u(x,y) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{s} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2r+s-1)! \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$|z-a| \leq \Diamond$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)! \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

検算

$$N\left[\left\{Re\left[Log\left[1-\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)\right]\right],\ u\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},90\right]\right\}\right]$$

$\{-0.346574,\ -0.346574\}$

$$N\left[\left\{Im\left[Log\left[1-\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)\right]\right],\ f_i\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},90\right]\right\}\right]$$

$\{-0.321751,\ -0.321751\}$

15・2 三角関数

sin z

$$\sin z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$|z| < \infty$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検算

```
N[{Re[Sin[7 + ⅈ 8]], u[7, 8, 15]}]
{979.225 , 979.225}
N[{Im[Sin[-7 + ⅈ 8]], v[-7, 8, 15]}]
{1123.68 , 1123.68}
```

cos z

$$\cos z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$|z| < \infty$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検算

```
N[{Re[Cos[5 + ⅈ 6]], u[5, 6, 15]}]
{57.2191 , 57.2191}
N[{Im[Cos[-5 + ⅈ 6]], v[-5, 6, 15]}]
{-193.428 , -193.428}
```

tan z

$$\tan z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s+2}\left(2^{2s+2}-1\right)B_{2s+2}}{2s+2} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$|z| < \diamond$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検算

```
N[{Re[Tan[0.78 + ⅈ 0.78]], u[0.78, 0.78, 600]}]
{0.400734 , 0.400734}
N[{Im[Tan[-0.78 + ⅈ 0.78]], v[-0.78, 0.78, 600]}]
{0.91146 , 0.91146}
```

z cot z

$$z\cot z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s 2^{2s} B_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s 2^{2r+2s} B_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} 2^{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \Diamond$$

検算

```
N[{Re[(1.56 + ⅈ 1.56) Cot[1.56 + ⅈ 1.56]], u[1.56, 1.56, 600]}]
{ 1.43081 , 1.43081 }
N[{Im[(-1.56 + ⅈ 1.56) Cot[-1.56 + ⅈ 1.56]], v[-1.56, 1.56, 600]}]
{ 1.42535 , 1.42535 }
```

sec z

$$\sec z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s E_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s E_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} E_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \Diamond$$

検算

```
N[{Re[Sec[0.78 + ⅈ 0.78]], u[0.78, 0.78, 500]}]
{ 0.752112 , 0.752112 }
N[{Im[Sec[0.78 + ⅈ 0.78]], v[0.78, 0.78, 500]}]
{ 0.485637 , 0.485637 }
```

z csc z

$$z\csc z = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left(2^{2s}-2\right) B_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left(2^{2s}-2\right) B_{2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!}$$

$$- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(2^{2r+2s}-2\right) B_{2r+2s} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!} \qquad |z| < \Diamond$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(2^{2r+2s+2}-2\right) B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検算

```
N[{Re[(1.56 + ⅈ 1.56) Csc[1.56 + ⅈ 1.56]], u[1.56, 1.56, 600]}]
```

{ 0.634079 , 0.634079 }

```
N[{Im[(-1.56 + ⅈ 1.56) Csc[-1.56 + ⅈ 1.56]], v[-1.56, 1.56, 600]}]
```

{ -0.621668 , -0.621668 }

15･3 双曲線関数

sinh z

$$\sinh z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \infty$$

検算

```
N[{Re[Sinh[5 + ⅈ 7]], u[5, 7, 14]}]
{55.942 , 55.942}
N[{Im[Sinh[-5 + ⅈ 7]], v[-5, 7, 14]}]
{48.7549 , 48.7549}
```

cosh z

$$\cosh z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{2s}}{(2s)!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \infty$$

検算

```
N[{Re[Cosh[4 + ⅈ 5]], u[4, 5, 11]}]
{7.74631 , 7.74631}
N[{Im[Cosh[-4 + ⅈ 5]], v[-4, 5, 11]}]
{26.169 , 26.169}
```

tanh z

$$\tanh z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2s+2}\left(2^{2s+2}-1\right)B_{2s+2}}{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2r+2s+2}\left(2^{2r+2s+2}-1\right)B_{2r+2s+2}}{2r+2s+2}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \diamond$$

検算

```
N[{Re[Tanh[0.78 + ⅈ 0.78]], u[0.78, 0.78, 600]}]
{0.91146 , 0.91146}
N[{Im[Tanh[-0.78 + ⅈ 0.78]], v[-0.78, 0.78, 600]}]
{0.400734 , 0.400734}
```

$\sinh^{-1} z$

$$\sinh^{-1} z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \{(2s-1)!!\}^2 \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$|z| \le \diamond$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検算

$$\mathbf{N}\left[\left\{\mathbf{Re}\left[\mathbf{ArcSinh}\left[\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right]\right], \mathbf{u}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1200\right]\right\}\right]$$

{0.530638 , 0.530638}

$$\mathbf{N}\left[\left\{\mathbf{Im}\left[\mathbf{ArcSinh}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right]\right], \mathbf{v}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1200\right]\right\}\right]$$

{0.452278 , 0.452279}

$\tanh^{-1} z$

$$\tanh^{-1} z = \sum_{s=0}^{\infty} (2s)! \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+2s)! \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$|z| \le \diamond$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+2s)! \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

検算

```
N[{Re[ArcTanh[0.49 + i 0.49]], u[0.49, 0.49, 130]}]
```

{0.398247 , 0.398247}

```
N[{Im[ArcTanh[0.49 + i 0.49]], v[0.49, 0.49, 130]}]
```

{0.54156 , 0.54156}

検算

```
N[{Re[(1.56 + ⅈ 1.56) Csch[1.56 + ⅈ 1.56]], u[1.56, 1.56, 600]}]
```

```
{0.634079, 0.634079}
```

```
N[{Im[(-1.56 + ⅈ 1.56) Csch[-1.56 + ⅈ 1.56]], v[-1.56, 1.56, 600]}]
```

```
{0.621668, 0.621668}
```

15･4 逆三角関数

$\sin^{-1} z$

$$\sin^{-1} z = \sum_{s=0}^{\infty} \{(2s-1)!!\}^2 \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| \le \Diamond$$

検算

```
N[{Re[ArcSin[1/2 + i 1/2]], u[1/2, 1/2, 1000]}]
{0.452278 , 0.452279}
N[{Im[ArcSin[-1/2 + i 1/2]], v[-1/2, 1/2, 1000]}]
{0.530638 , 0.530638}
```

$\cos^{-1} z$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{s=0}^{\infty} \{(2s-1)!!\}^2 \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| \le \Diamond$$

検算

```
N[{Re[ArcCos[1/2 + i 1/2]], u[1/2, 1/2, 800]}]
{1.11852 , 1.11852}
N[{Im[ArcCos[-1/2 + i 1/2]], v[-1/2, 1/2, 800]}]
{-0.530638 , -0.530639}
```

$\tan^{-1} z$

$$\tan^{-1} x = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s)! \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$|z| \leq ◇$

検算

```
N[{Re[ArcTan[0.49 + i 0.49]], u[0.49, 0.49, 130]}]
{0.54156 , 0.54156}
N[{Im[ArcTan[-0.49 + i 0.49]], v[-0.49, 0.49, 130]}]
{0.398247 , 0.398247}
```

$\cot^{-1} z$

$$\cot^{-1} z = sign\{Re(z)\}\frac{\pi}{2} - \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \leq 1$$

$$u(x,y) = sign(x)\frac{\pi}{2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2r+2s)!\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$|z| \leq ◇$

検算

```
N[{Re[ArcCot[0.49 + i 0.49]], u[0.49, 0.49, 130]}]
{1.02924 , 1.02924}
N[{Im[ArcCot[-0.49 + i 0.49]], v[-0.49, 0.49, 130]}]
{ -0.398247 , -0.398247}
```

$\sinh^{-1} z$

$$\sinh^{-1} z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \{(2s-1)!!\}^2 \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \{(2r+2s-1)!!\}^2 \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$|z| \le \diamond$

検算

$$\mathrm{N}\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\mathrm{ArcSinh}\left[\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\right]\right],\ \mathrm{u}\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1200\right]\right\}\right]$$

{ 0.530638 , 0.530638 }

$$\mathrm{N}\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\mathrm{ArcSinh}\left[-\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\right]\right],\ \mathrm{v}\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1200\right]\right\}\right]$$

{ 0.452278 , 0.452279 }

$\tanh^{-1} z$

$$\tanh^{-1} z = \sum_{s=0}^{\infty} (2s)! \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| \le 1$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+2s)! \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+2s)! \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$|z| \le \diamond$

検算

```
N[{Re[ArcTanh[0.49 + i 0.49]], u[0.49, 0.49, 130]}]
```

{ 0.398247 , 0.398247 }

```
N[{Im[ArcTanh[0.49 + i 0.49]], v[0.49, 0.49, 130]}]
```

{ 0.54156 , 0.54156 }

15･6 *cot* 等の実部虚部別ローラン級数

cot z

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{2^{2s+2}}{2s+2}B_{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

|z| < ◇

検算

```
N[{Re[Cot[1.56 + ⅈ 1.56]], u[1.56, 1.56, 70]}]
{0.00174896, 0.00174846}
N[{Im[Cot[-1.56 + ⅈ 1.56]], v[-1.56, 1.56, 70]}]
{-0.915438, -0.91544}
```

csc z

$$\csc z = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{2^{2s+2}-2}{2s+2}B_{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

|z| < ◇

検算

```
N[{Re[Csc[1.56 + ⅈ 1.56]], u[1.56, 1.56, 70]}]
{0.402483, 0.402484}
N[{Im[Csc[-1.56 + ⅈ 1.56]], v[-1.56, 1.56, 70]}]
{-0.00397797, -0.00397574}
```

coth z

$$\coth z = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2s+2}}{2s+2}B_{2s+2}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2^{2r+2s+2}}{2r+2s+2}B_{2r+2s+2}\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

|z| < ◇

検算

```
N[{Re[Coth[-1.5 + ⅈ 1.5]], u[-1.5, 1.5, 85]}]
{-0.905967, -0.905967}
N[{Im[Coth[-1.5 + ⅈ 1.5]], v[-1.5, 1.5, 85]}]
{-0.0127622, -0.0127622}
```

csch z

$$csch\, z = \frac{1}{z} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2s+2}-2}{2s+2} B_{2s+2} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \qquad |z| < \pi$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^{2r+2s+2}-2}{2r+2s+2} B_{2r+2s+2} \frac{x^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$|z| < \diamond$

検算

```
N[{Re[Csch[-1.5 + ⅈ 1.5]], u[-1.5, 1.5, 70]}]
{-0.0272425, -0.0272436}
N[{Im[Csch[-1.5 + ⅈ 1.5]], v[-1.5, 1.5, 70]}]
{-0.424415, -0.424416}
```

2019.12.07
2020.02.17 Renewed
2022.03.13 Addded Chapter 6

河野 和
広島市

宇宙人の数学