

## 16 ベキ級数の分割

本章では、任意の関数のベキ級数を2つ以上の級数に分割し、それらがどのような関数で表されるかを研究する。

分割級数は分割方法により無数に存在するが、本章では、被分割級数から等差的に項を抜き出して生成される基本分割級数を対象とする。

### 16・1 分割指標と交代分割指標

#### 定義 16・1・1 (分割指標)

$n=2, 3, 4, \dots$ ,  $r=0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_n = \{1 + (-1)^n\} / 2$ ,  $[x]$  を床関数とするとき、分割指標  $c(0, n, r)$  を次のように定義する。

$$c(0, n, r) = \frac{1}{n} \left\{ (-1)^{2r} - \lambda_n (-1)^r \right\} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}r} + (-1)^{-\frac{2s}{n}r} \right\}$$

いくつかを書き下すと次のとおり。

$$c(0, 2, r) = \frac{(-1)^{2r} - (-1)^r}{2} + \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{\frac{2}{2}r} + (-1)^{-\frac{2}{2}r} \right\}$$

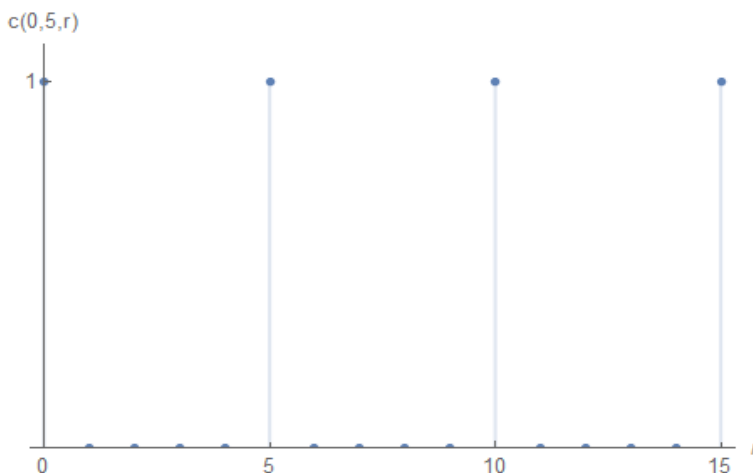
$$c(0, 3, r) = \frac{(-1)^{2r}}{3} + \frac{1}{3} \left\{ (-1)^{\frac{2}{3}r} + (-1)^{-\frac{2}{3}r} \right\}$$

$$c(0, 4, r) = \frac{(-1)^{2r} - (-1)^r}{4} + \frac{1}{4} \left\{ (-1)^{\frac{2}{4}r} + (-1)^{-\frac{2}{4}r} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ (-1)^{\frac{4}{4}r} + (-1)^{-\frac{4}{4}r} \right\}$$

$$c(0, 5, r) = \frac{(-1)^{2r}}{5} + \frac{1}{5} \left\{ (-1)^{\frac{2}{5}r} + (-1)^{-\frac{2}{5}r} \right\} + \frac{1}{5} \left\{ (-1)^{\frac{4}{5}r} + (-1)^{-\frac{4}{5}r} \right\}$$

⋮

例  $c(0, 5, r)$  を2D図に描くと次のとおり。



#### 分割指標の性質

上図から分かるように、この指標は次のような性質を持つ。

$$c(0, n, r) = \begin{cases} 1 & r \bmod n = 0 \\ 0 & r \bmod n \neq 0 \end{cases}$$

実際、2分割の場合、

$$(-1)^{2r} - (-1)^r, (-1)^{2r/2} + (-1)^{-2r/2} \quad r=0, 1, 2, \dots \text{ はそれぞれ}$$

$$0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$$

$$2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots$$

であるから、 $(-1)^{2r} - (-1)^r + (-1)^{2r/2} + (-1)^{-2r/2} \quad r=0, 1, 2, \dots$  は

$$2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$$

これを2で除せば  $c(0,2,r) \quad r=0, 1, 2, \dots$  は

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

3分割の場合、

$$(-1)^{2r}, (-1)^{2r/3} + (-1)^{-2r/3} \quad r=0, 1, 2, \dots \text{ はそれぞれ}$$

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$2, -1, -1, 2, -1, -1, \dots$$

であるから、 $(-1)^{2r} + (-1)^{2r/3} + (-1)^{-2r/3} \quad r=0, 1, 2, \dots$  は

$$3, 0, 0, 3, 0, 0, \dots$$

これら3で除せば  $c(0,3,r)$  は

$$1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$$

### 定義 16・1・2 (交代分割指標)

$n=2, 3, 4, \dots, r=0, 1, 2, \dots, \lambda_n = \{1 - (-1)^n\}/2, [x]$  を床関数とするとき、  
交代分割指標  $\underline{c}(0, n, r)$  を次のように定義する。

$$\underline{c}(0, n, r) = \lambda_n \cdot \frac{(-1)^r}{n} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{[n/2]} \left( (-1)^{\frac{2s-1}{n}r} + (-1)^{-\frac{2s-1}{n}r} \right)$$

いくつかを書き下すと

$$\underline{c}(0, 2, r) = \frac{1}{2} \left\{ (-1)^{\frac{1}{2}r} + (-1)^{-\frac{1}{2}r} \right\}$$

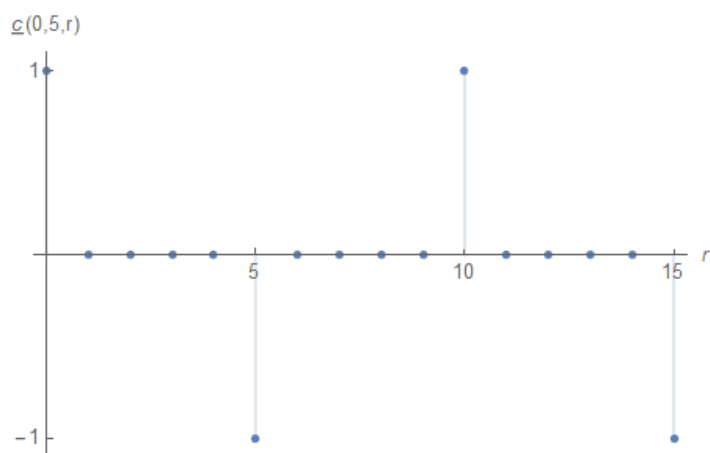
$$\underline{c}(0, 3, r) = \frac{(-1)^r}{3} + \frac{1}{3} \left\{ (-1)^{\frac{1}{3}r} + (-1)^{-\frac{1}{3}r} \right\}$$

$$\underline{c}(0, 4, r) = \frac{1}{4} \left\{ (-1)^{\frac{1}{4}r} + (-1)^{-\frac{1}{4}r} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ (-1)^{\frac{3}{4}r} + (-1)^{-\frac{3}{4}r} \right\}$$

$$\underline{c}(0, 5, r) = \frac{(-1)^r}{5} + \frac{1}{5} \left\{ (-1)^{\frac{1}{5}r} + (-1)^{-\frac{1}{5}r} \right\} + \frac{1}{5} \left\{ (-1)^{\frac{3}{5}r} + (-1)^{-\frac{3}{5}r} \right\}$$

⋮

例  $\underline{c}(0, 5, r)$  を2D図に描くと次のとおり。



### 交代分割指標の性質

上図から分かるように、この指標は次のような性質を持つ。

$$\underline{c}(0, n, r) = \begin{cases} (-1)^r & r \bmod n = 0 \\ 0 & r \bmod n \neq 0 \end{cases}$$

実際、2分割の場合、

$$(-1)^{1r/2} + (-1)^{-1r/2} \quad r=0, 1, 2, \dots \text{ は}$$

$$2, 0, -2, 0, 2, 0, -2, \dots$$

これを2で除せば  $\underline{c}(0, 2, r) \quad r=0, 1, 2, \dots$  は

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

3分割の場合、

$$(-1)^r, (-1)^{1r/3} + (-1)^{-1r/3} \quad r=0, 1, 2, \dots \text{ はそれぞれ}$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, \dots$$

であるから、 $(-1)^r + (-1)^{1r/3} + (-1)^{-1r/3} \quad r=0, 1, 2, \dots$  は

$$3, 0, 0, -3, 0, 0, 3, 0, 0, -3, \dots$$

これらを3で除せば  $\underline{c}(0, 3, r) \quad r=0, 1, 2, \dots$  は

$$1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, \dots$$

## 16・2 ベキ級数の $n$ 分割

### 公式 16・2・1 ( $n$ 分割)

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (2.0)$$

そしてこれの  $n$  分割級数  $f(k, n, z)$   $k=0, 1, 2, \dots, n-1$  をそれぞれ次のように定める。

$$f(0, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+0} z^{nr+0} = a_0 z^0 + a_n z^n + a_{2n} z^{2n} + a_{3n} z^{3n} + \dots$$

$$f(1, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+1} z^{nr+1} = a_1 z^1 + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + a_{3n+1} z^{3n+1} + \dots$$

$$f(2, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+2} z^{nr+2} = a_2 z^2 + a_{n+2} z^{n+2} + a_{2n+2} z^{2n+2} + a_{3n+2} z^{3n+2} + \dots$$

⋮

$$f(n-1, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+n-1} z^{nr+n-1} = a_{n-1} z^{n-1} + a_{2n-1} z^{2n-1} + a_{3n-1} z^{3n-1} + a_{4n-1} z^{4n-1} + \dots$$

すると、 $n = 2, 3, 4, \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  について次式が成立する。

$$f(k, n, z) = \frac{f(z) - \lambda_n (-1)^k f(-z)}{n} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ (-1)^{-\frac{2sk}{n}} f\left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} z \right\} + (-1)^{\frac{2sk}{n}} f\left\{ (-1)^{-\frac{2s}{n}} z \right\} \right]$$

但し、 $\lambda_n = \{1 + (-1)^n\} / 2$ ,  $\lfloor x \rfloor$  は床関数。

### 証明

定義 16・1・1 における  $n$  分割指標  $c(0, n, r)$  は次のようであった。

$$c(0, n, r) = \frac{1}{n} \{ (-1)^{2r} - \lambda_n (-1)^r \} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n} r} + (-1)^{-\frac{2s}{n} r} \right\}$$

これに  $r=1$  を代入すれば

$$c(0, n, 1) = \frac{1}{n} \{ (-1)^2 - \lambda_n (-1)^1 \} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} + (-1)^{-\frac{2s}{n}} \right\}$$

各項に  $z$  を乗じ、これらに関数  $f(z)$  に代入し、これらを用いて多項式を作れば

$$f(0, n, z) = \frac{f\{(-1)^2 z\} - \lambda_n f\{(-1)^1 z\}}{n} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ f\left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} z \right\} + f\left\{ (-1)^{-\frac{2s}{n}} z \right\} \right]$$

ここで

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

であるから、

$$f(0, n, z) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} a_r \{ (-1)^2 z \}^r - \lambda_n \sum_{r=0}^{\infty} a_r \{ (-1)^1 z \}^r \right] + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} z \right\}^r + \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left\{ (-1)^{-\frac{2s}{n}} z \right\}^r \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{2r} a_r z^r - \lambda_n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_r z^r \right] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\frac{2s}{n} r} a_r z^r + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{-\frac{2s}{n} r} a_r z^r \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{2r} - \lambda_n (-1)^r \right\} a_r z^r + \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n} r} + (-1)^{-\frac{2s}{n} r} \right\} a_r z^r
\end{aligned}$$

i.e.

$$f(0, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} \left\{ (-1)^{2r} - \lambda_n (-1)^r \right\} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n} r} + (-1)^{-\frac{2s}{n} r} \right\} \right] a_r z^r$$

[ ]内は  $c(0, n, r)$  であるから、前節で述べた性質により

$$f(0, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} c(0, n, r) a_r z^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+0} z^{nr+0} = a_0 z^0 + a_n z^n + a_{2n} z^{2n} + a_{3n} z^{3n} + \dots$$

次に、 $f(1, n, z)$  を与える分割指標  $c(1, n, r)$  は  $c(0, n, r)$  を  $r$  に関して正方向に 1 だけシフトすれば良いから、

$$\begin{aligned}
c(1, n, r) &= c(0, n, r-1) \\
&= \frac{1}{n} \left\{ (-1)^{2r} (-1)^{-2} - \lambda_n (-1)^r (-1)^{-1} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n} r} (-1)^{-\frac{2s}{n}} + (-1)^{-\frac{2s}{n} r} (-1)^{-\frac{2s}{n}} \right\}
\end{aligned}$$

これに  $r=1$  を代入すれば

$$\begin{aligned}
c(1, n, 1) &= \frac{1}{n} \left\{ (-1)^2 (-1)^{-2} - \lambda_n (-1)^1 (-1)^{-1} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} (-1)^{-\frac{2s}{n}} + (-1)^{-\frac{2s}{n}} (-1)^{-\frac{2s}{n}} \right\}
\end{aligned}$$

各項に  $z$  を乗じてこれら関数  $f(z)$  に代入して新しい多項式を作る。但し、マゼンタの部分は元々係数であったから関数の外に出す。すると

$$\begin{aligned}
f(1, n, z) &= \frac{(-1)^{-2} f(z) - \lambda_n (-1)^{-1} (-1)^1 f(-z)}{n} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ (-1)^{-\frac{2s}{n}} f \left\{ (-1)^{\frac{2s}{n}} z \right\} + (-1)^{\frac{2s}{n}} f \left\{ (-1)^{-\frac{2s}{n}} z \right\} \right]
\end{aligned}$$

$f(0, n, z)$  と同じ理由で

$$\begin{aligned}
f(1, n, z) &= \sum_{r=0}^{\infty} c(1, n, r) a_r z^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_{nr+1} z^{nr+1} \\
&= a_1 z^1 + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + a_{3n+1} z^{3n+1} + \dots
\end{aligned}$$

以下、帰納法により、 $f(k, n, z)$   $k=2, 3, \dots, n-1$  を得る。

### 公式 16・2・2 (交代 $n$ 分割)

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

そしてこれの交代  $n$  分割級数  $\underline{f}(k, n, z)$   $k=0, 1, 2, \dots, n-1$  をそれぞれ次のように定める。

$$\underline{f}(0, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+0} z^{nr+0} = a_0 z^0 - a_n z^n + a_{2n} z^{2n} - a_{3n} z^{3n} + \dots$$

$$\underline{f}(1, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+1} z^{nr+1} = a_1 z^1 - a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} - a_{3n+1} z^{3n+1} + \dots$$

$$\underline{f}(2, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+2} z^{nr+2} = a_2 z^2 - a_{n+2} z^{n+2} + a_{2n+2} z^{2n+2} - a_{3n+2} z^{3n+2} + \dots$$

⋮

$$\underline{f}(n-1, n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{nr+n-1} z^{nr+n-1} = a_{n-1} z^{n-1} - a_{2n-1} z^{2n-1} + a_{3n-1} z^{3n-1} - a_{4n-1} z^{4n-1} + \dots$$

すると、 $n = 2, 3, 4, \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  について次式が成立する。

$$\begin{aligned} \underline{f}(k, n, z) &= \lambda_n \frac{(-1)^k f(-z)}{n} \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[ (-1)^{\frac{-(2s-1)k}{n}} f\left\{ (-1)^{\frac{2s-1}{n}} z \right\} + (-1)^{\frac{(2s-1)k}{n}} f\left\{ (-1)^{\frac{-2s-1}{n}} z \right\} \right] \end{aligned}$$

但し、 $\lambda_n = \{1 - (-1)^n\} / 2$ ,  $\lfloor x \rfloor$  は床関数。

#### 証明

定義 16・1・2 を用いて、公式 16・2・1 と類似の方法で証明される。

### 16・3 ベキ級数の2分割

#### 16・3・1 ベキ級数の2分割

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (2.0)$$

この級数の2分割は

$$f(0,2,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+0} z^{2r+0} = a_0 z^0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + \dots$$

$$f(1,2,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+1} z^{2r+1} = a_1 z^1 + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + \dots$$

そして、公式 16・2・1 は次のように書き下される。

$$f(0,2,z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2} + \frac{f\{(-1)^{2/2}z\} + f\{(-1)^{-2/2}z\}}{2}$$

$$f(1,2,z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{(-1)^{-2/2}f\{(-1)^{2/2}z\} + (-1)^{2/2}f\{(-1)^{-2/2}z\}}{2}$$

#### 簡約形

一見して分かるように、これらは次のように簡約される。

$$f(0,2,z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \quad f(1,2,z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

#### 例 1 指数級数の2分割

$$f(z) = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = e^z \quad (\text{被分割級数})$$

$$f(0,2,z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} + \dots = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$f(1,2,z) = \frac{z^1}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{11}}{11!} + \dots = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

#### 例 2 ベルヌーイ数の母関数の2分割

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \dots = \frac{z}{e^z - 1} \quad (\text{被分割級数})$$

$$f(0,2,z) = 1 + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \dots = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{e^z - 1} + \frac{-z}{e^{-z} - 1} \right) = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}$$

$$f(1,2,z) = -\frac{z}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} \right) = -\frac{z}{2}$$

実際、これらの右辺を数式処理ソフト *Mathematica* でマクローリン展開するとそれぞれ次のようになる。

$$\text{Normal} \left[ \text{Series} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{z}{e^z - 1} + \frac{-z}{e^{-z} - 1} \right), \{z, 0, 10\} \right] \right]$$

$$1 + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \frac{z^{10}}{47900160}$$

$$\text{Normal}\left[\text{Series}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z}{e^z-1}-\frac{-z}{e^{-z}-1}\right),\{z,0,11\}\right]\right]$$

$$-\frac{z}{2}$$

### 16・3・2 ベキ級数の交代2分割

ベキ級数 (2.0) の2交代分割は

$$\underline{f}(0,2,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{2r+0} z^{2r+0} = a_0 z^0 - a_2 z^2 + a_4 z^4 - a_6 z^6 + \dots$$

$$\underline{f}(1,2,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{2r+1} z^{2r+1} = a_1 z^1 - a_3 z^3 + a_5 z^5 - a_7 z^7 + \dots$$

そして、公式 16・2・2 は次のように書き下される。

$$\underline{f}(0,2,z) = \frac{f\{(-1)^{1/2}z\} + f\{(-1)^{-1/2}z\}}{2}$$

$$\underline{f}(1,2,z) = \frac{(-1)^{-1/2}f\{(-1)^{1/2}z\} + (-1)^{1/2}f\{(-1)^{-1/2}z\}}{2}$$

#### 簡約形

一見して分かるように、これらは次のように簡約される。

$$\underline{f}(0,2,z) = \frac{f(iz) + f(-iz)}{2}, \quad \underline{f}(1,2,z) = \frac{f(iz) - f(-iz)}{2i}$$

#### 例 1 指数級数の交代2分割

$$f(z) = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = e^z \quad (\text{被分割級数})$$

$$\underline{f}(0,2,z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \dots = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\underline{f}(1,2,z) = \frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \dots = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

#### 例 2 ベルヌーイ数の母関数の交代2分割

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \dots = \frac{z}{e^z - 1} \quad (\text{被分割級数})$$

$$\underline{f}(0,2,z) = 1 - \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} - \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} - \dots = \frac{1}{2} \left( \frac{iz}{e^{iz}-1} + \frac{-iz}{e^{-iz}-1} \right) = \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2}$$

$$\underline{f}(1,2,z) = -\frac{z}{2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{iz}{e^{iz}-1} - \frac{-iz}{e^{-iz}-1} \right) = -\frac{z}{2}$$

実際、これらの右辺を数式処理ソフト *Mathematica* でマクローリン展開するとそれぞれ次のようになる。

$$\text{Normal}\left[\text{Series}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{iz}{e^{iz}-1} + \frac{-iz}{e^{-iz}-1}\right),\{z,0,10\}\right]\right]$$

$$1 - \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} - \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} - \frac{z^{10}}{47900160}$$



$$\text{Normal} \left[ \text{Series} \left[ \frac{1}{2i} \left( \frac{iz}{e^{iz} - 1} - \frac{-iz}{e^{-iz} - 1} \right), \{z, 0, 11\} \right] \right]$$

$$-\frac{z}{2}$$

### 16・3・3 偶関数、奇関数の2分割

$f(z)$  が偶関数または奇関数のとき、それは 16・3・1 によっては2分割できない。  
何故ならば、16・3・1 の簡約形は次のようであった。

$$f(0,2,z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \quad f(1,2,z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

$f(z)$  が偶関数のとき、 $f(z) = f(-z)$  であるから、 $f(0,2,z) = f(z)$  ,  $f(1,2,z) = 0$ 。

$f(z)$  が奇関数のとき、 $f(z) = -f(-z)$  であるから、 $f(0,2,z) = 0$  ,  $f(1,2,z) = f(z)$ 。

このような場合には次の公式によって2分割できる。証明は容易なので述べない。

(1)  $f(z)$  が偶関数のとき

$$f(0,2,z) = \frac{f(z) + f(iz)}{2}, \quad f(1,2,z) = \frac{f(z) - f(iz)}{2}$$

(2)  $f(z)$  が奇関数のとき

$$f(0,2,z) = \frac{f(z) + i^{-1}f(iz)}{2}, \quad f(1,2,z) = \frac{f(z) - i^{-1}f(iz)}{2}$$

例1  $f(z) = \cosh z$

$$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} + \dots = \cosh z \quad (\text{被分割級数})$$

$$1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{12}}{12!} + \frac{z^{16}}{16!} + \frac{z^{20}}{20!} + \dots = \frac{\cosh z + \cos z}{2}$$

$$\frac{z^2}{2!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{14}}{14!} + \frac{z^{18}}{18!} + \dots = \frac{\cosh z - \cos z}{2}$$

( $\because \cosh iz = \cos z$ )

特に  $z=1$  のとき

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!} + \dots = \cosh 1 = 1.54308063\dots$$

$$1 + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{12!} + \frac{1}{16!} + \frac{1}{20!} + \dots = \frac{\cosh 1 + \cos 1}{2} = 1.04169147\dots$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{18!} + \dots = \frac{\cosh 1 - \cos 1}{2} = 0.50138916\dots$$

例2  $f(z) = \sinh z$

$$\frac{z^1}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{11}}{11!} + \dots = \sinh z \quad (\text{被分割級数})$$

$$\frac{z^1}{1!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{13}}{13!} + \frac{z^{17}}{17!} + \dots = \frac{\sinh z + \sin z}{2}$$

$$\frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{15}}{15!} + \frac{z^{19}}{19!} + \dots = \frac{\sinh z - \sin z}{2}$$

$$(\because i^{-1} \sinh iz = \sin z)$$

特に  $z=1$  のとき

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{11!} + \dots = \sinh 1 = 1.17520119\dots$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{13!} + \frac{1}{17!} + \dots = \frac{\sinh 1 + \sin 1}{2} = 1.00833608\dots$$

$$\frac{1}{3!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{15!} + \frac{1}{19!} + \dots = \frac{\sinh 1 - \sin 1}{2} = 0.16686510\dots$$

## 16・4 ベキ級数の3分割

### 16・4・1 ベキ級数の3分割

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (2.0)$$

この級数の3分割は

$$f(0,3,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{3r+0} z^{3r+0} = a_0 z^0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + a_9 z^9 + \dots$$

$$f(1,3,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{3r+1} z^{3r+1} = a_1 z^1 + a_4 z^4 + a_7 z^7 + a_{10} z^{10} + \dots$$

$$f(2,3,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{3r+2} z^{3r+2} = a_2 z^2 + a_5 z^5 + a_8 z^8 + a_{11} z^{11} + \dots$$

そして、公式 16・2・1 は次のように書き下される。

$$f(0,3,z) = \frac{f(z)}{3} + \frac{f\{(-1)^{2/3}z\} + f\{(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$$f(1,3,z) = \frac{f(z)}{3} + \frac{(-1)^{-2/3}f\{(-1)^{2/3}z\} + (-1)^{2/3}f\{(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$$f(2,3,z) = \frac{f(z)}{3} + \frac{(-1)^{-4/3}f\{(-1)^{2/3}z\} + (-1)^{4/3}f\{(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

### 例 1 指数級数の3分割

$$1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = e^z \quad (\text{被分割級数})$$

$$1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{12}}{12!} + \frac{z^{15}}{15!} + \dots = \frac{e^z}{3} + \frac{e^{(-1)^{2/3}z} + e^{(-1)^{-2/3}z}}{3} = \frac{e^z}{3} + \frac{2}{3\sqrt{e^z}} \cos \frac{\sqrt{3}z}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z^1}{1!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{13}}{13!} + \frac{z^{16}}{16!} + \dots &= \frac{e^z}{3} + \frac{(-1)^{-2/3}e^{(-1)^{2/3}z} + (-1)^{2/3}e^{(-1)^{-2/3}z}}{3} \\ &= \frac{e^z}{3} - \frac{1}{3\sqrt{e^z}} \cos \frac{\sqrt{3}z}{2} + \frac{1}{\sqrt{3e^z}} \sin \frac{\sqrt{3}z}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{14}}{14!} + \frac{z^{17}}{17!} + \dots &= \frac{e^z}{3} + \frac{(-1)^{-4/3}e^{(-1)^{2/3}z} + (-1)^{4/3}e^{(-1)^{-2/3}z}}{3} \\ &= \frac{e^z}{3} - \frac{1}{3\sqrt{e^z}} \cos \frac{\sqrt{3}z}{2} - \frac{1}{\sqrt{3e^z}} \sin \frac{\sqrt{3}z}{2} \end{aligned}$$

特に  $z=1$  のとき

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots = e^1 = 2.71828182\dots$$

$$1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{12!} + \frac{1}{15!} + \dots = \frac{e}{3} + \frac{2\cos(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} = 1.16805831\dots$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{13!} + \frac{z^{16}}{16!} + \dots = \frac{e}{3} - \frac{\cos(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} + \frac{\sin(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} = 1.04186535\dots$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{17!} + \dots = \frac{e}{3} - \frac{\cos(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} - \frac{\sin(\sqrt{3}/2)}{3\sqrt{e}} = 0.50835816\dots$$

例 2 対数級数の3分割 ( $|z| < 1, z \neq 1$ )

$$\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \dots = -\log(1-z) \quad (\text{被分割級数})$$

$$\frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{6} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{12}}{12} + \frac{z^{15}}{15} + \frac{z^{18}}{18} + \dots = -\frac{\log(1-z)}{3} \\ - \frac{\log\{1-(-1)^{2/3}z\} + \log\{1-(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$$\frac{z^1}{1} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{13}}{13} + \frac{z^{16}}{16} + \dots = -\frac{\log(1-z)}{3} \\ - \frac{(-1)^{-2/3} \log\{1-(-1)^{2/3}z\} + (-1)^{2/3} \log\{1-(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$$\frac{z^2}{2} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^8}{8} + \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{14}}{14} + \frac{z^{17}}{17} + \dots = -\frac{\log(1-z)}{3} \\ - \frac{(-1)^{-4/3} \log\{1-(-1)^{2/3}z\} + (-1)^{4/3} \log\{1-(-1)^{-2/3}z\}}{3}$$

$z = 1/3$  のとき

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{6 \cdot 3^6} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots = -\log \frac{2}{3} = 0.40546510\dots$$

$$\frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{6 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{12 \cdot 3^{12}} + \frac{1}{15 \cdot 3^{15}} + \frac{1}{18 \cdot 3^{18}} + \dots = \frac{1}{3} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \log \frac{13}{9} = 0.01258010\dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{10 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \frac{1}{16 \cdot 3^{16}} + \dots = \frac{1}{3} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \log \frac{13}{9} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{7} \\ = 0.33648681\dots$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{8 \cdot 3^8} + \frac{1}{11 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{14 \cdot 3^{14}} + \frac{1}{17 \cdot 3^{17}} + \dots = \frac{1}{3} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \log \frac{13}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{7} \\ = 0.05639818\dots$$

16・4・2 ベキ級数の交代3分割

ベキ級数 (2.0) の3交代分割は

$$\underline{f}(0,3,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{3r+0} z^{3r+0} = a_0 z^0 - a_3 z^3 + a_6 z^6 - a_9 z^9 + \dots$$

$$\underline{f}(1,3,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{3r+1} z^{3r+1} = a_1 z^1 - a_4 z^4 + a_7 z^7 - a_{10} z^{10} + \dots$$

$$\underline{f}(2,3,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{3r+2} z^{3r+2} = a_2 z^2 - a_5 z^5 + a_8 z^8 - a_{11} z^{11} + \dots$$

そして、公式 16・2・2 は次のように書き下される。

$$\underline{f}(0,3,z) = \frac{(-1)^0 f(-z)}{3} + \frac{f\{(-1)^{1/3}z\} + f\{(-1)^{-1/3}z\}}{3}$$

$$\underline{f(1,3,z)} = \frac{(-1)^1 f(-z)}{3} + \frac{(-1)^{-1/3} f\{(-1)^{1/3} z\} + (-1)^{1/3} f\{(-1)^{-1/3} z\}}{3}$$

$$\underline{f(2,3,z)} = \frac{(-1)^2 f(-z)}{3} + \frac{(-1)^{-2/3} f\{(-1)^{1/3} z\} + (-1)^{2/3} f\{(-1)^{-1/3} z\}}{3}$$

例 1 指数級数の交代3分割

$$1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{12}}{12!} - \frac{z^{15}}{15!} + \dots = \frac{(-1)^0 e^{-z}}{3} + \frac{e^{(-1)^{1/3} z} + e^{(-1)^{-1/3} z}}{3}$$

$$= \frac{1}{3e^z} + \frac{2\sqrt{e^z}}{3} \cos \frac{\sqrt{3} z}{2}$$

$$\frac{z^1}{1!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^7}{7!} - \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{13}}{13!} - \frac{z^{16}}{16!} + \dots = \frac{(-1)^1 e^{-z}}{3} + \frac{(-1)^{-1/3} e^{(-1)^{1/3} z} + (-1)^{1/3} e^{(-1)^{-1/3} z}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3e^z} + \frac{\sqrt{e^z}}{3} \cos \frac{\sqrt{3} z}{2} + \sqrt{\frac{e^z}{3}} \sin \frac{\sqrt{3} z}{2}$$

$$\frac{z^2}{2!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{14}}{14!} - \frac{z^{17}}{17!} + \dots = \frac{(-1)^2 e^{-z}}{3} + \frac{(-1)^{-2/3} e^{(-1)^{1/3} z} + (-1)^{2/3} e^{(-1)^{-1/3} z}}{3}$$

$$= \frac{1}{3e^z} - \frac{\sqrt{e^z}}{3} \cos \frac{\sqrt{3} z}{2} + \sqrt{\frac{e^z}{3}} \sin \frac{\sqrt{3} z}{2}$$

特に  $z=1$  のとき

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{12!} - \frac{1}{15!} + \dots = \frac{1}{3e} + \frac{2}{3} \sqrt{e} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.83471946\dots$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{10!} + \frac{1}{13!} - \frac{1}{16!} + \dots = \frac{1}{3e} + \frac{1}{3} \sqrt{e} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{e}{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0.95853147\dots$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{14!} - \frac{1}{17!} + \dots = \frac{1}{3e} - \frac{1}{3} \sqrt{e} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{e}{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0.49169144\dots$$

例 2 対数級数の交代3分割 ( $|z| \leq 1$ )

$$-\frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{6} - \frac{z^9}{9} + \frac{z^{12}}{12} - \frac{z^{15}}{15} + \frac{z^{18}}{18} - \dots = -\frac{\log(1+z)}{3}$$

$$- \frac{\log\{1 - (-1)^{1/3} z\} + \log\{1 - (-1)^{-1/3} z\}}{3}$$

$$\frac{z^1}{1} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{16}}{16} + \dots = -\frac{(-1)^1 \log(1+z)}{3}$$

$$- \frac{(-1)^{-1/3} \log\{1 - (-1)^{1/3} z\} + (-1)^{1/3} \log\{1 - (-1)^{-1/3} z\}}{3}$$

$$\frac{z^2}{2} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^8}{8} - \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{14}}{14} - \frac{z^{17}}{17} + \dots = -\frac{(-1)^2 \log(1+z)}{3}$$

$$-\frac{(-1)^{-2/3} \log\{1 - (-1)^{1/3} z\} + (-1)^{2/3} \log\{1 - (-1)^{-1/3} z\}}{3}$$

特に  $z=1$  のとき

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \dots = -\frac{\log 2}{3} = -0.23104906\dots$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 2 \right) = 0.83564884\dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \dots = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2 \right) = 0.37355072\dots$$

cf.メルカトー級数

$$\frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \dots = \log(1+z)$$

## 16・5 ベキ級数の4分割

### 16・5・1 ベキ級数の4分割

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (2.0)$$

この級数の4分割は

$$f(0,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{4r+0} z^{4r+0} = a_0 z^0 + a_4 z^4 + a_8 z^8 + a_{12} z^{12} + \dots$$

$$f(1,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{4r+1} z^{4r+1} = a_1 z^1 + a_5 z^5 + a_9 z^9 + a_{13} z^{13} + \dots$$

$$f(2,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{4r+2} z^{4r+2} = a_2 z^2 + a_6 z^6 + a_{10} z^{10} + a_{14} z^{14} + \dots$$

$$f(3,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{4r+3} z^{4r+3} = a_3 z^3 + a_7 z^7 + a_{11} z^{11} + a_{15} z^{15} + \dots$$

そして、公式 16・2・1 は次のように書き下される。

$$f(0,4,z) = \frac{f(z) - f(-z)}{4} + \frac{f\{(-1)^{2/4}z\} + f\{(-1)^{-2/4}z\}}{4} + \frac{f\{(-1)^{4/4}z\} + f\{(-1)^{-4/4}z\}}{4}$$

$$f(1,4,z) = \frac{f(z) + f(-z)}{4} + \frac{(-1)^{-2/4}f\{(-1)^{2/4}z\} + (-1)^{2/4}f\{(-1)^{-2/4}z\}}{4} + \frac{(-1)^{-4/4}f\{(-1)^{4/4}z\} + (-1)^{4/4}f\{(-1)^{-4/4}z\}}{4}$$

$$f(2,4,z) = \frac{f(z) - f(-z)}{4} + \frac{(-1)^{-4/4}f\{(-1)^{2/4}z\} + (-1)^{4/4}f\{(-1)^{-2/4}z\}}{4} + \frac{(-1)^{-8/4}f\{(-1)^{4/4}z\} + (-1)^{8/4}f\{(-1)^{-4/4}z\}}{4}$$

$$f(3,4,z) = \frac{f(z) + f(-z)}{4} + \frac{(-1)^{-6/4}f\{(-1)^{2/4}z\} + (-1)^{6/4}f\{(-1)^{-2/4}z\}}{4} + \frac{(-1)^{-12/4}f\{(-1)^{4/4}z\} + (-1)^{12/4}f\{(-1)^{-4/4}z\}}{4}$$

例 二項級数の4分割 ( $|z| < 1, z \neq 1$ )

$$1 + \frac{1!!}{2!!}z^1 + \frac{3!!}{4!!}z^2 + \frac{5!!}{6!!}z^3 + \frac{7!!}{8!!}z^4 + \frac{9!!}{10!!}z^5 + \dots = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \quad (\text{被分割級数})$$

$$1 + \frac{7!!}{8!!}z^4 + \frac{15!!}{16!!}z^8 + \frac{23!!}{24!!}z^{12} + \frac{31!!}{32!!}z^{16} + \frac{39!!}{40!!}z^{20} + \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}} + \frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}} + \frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1!!}{2!!}z^1 + \frac{9!!}{10!!}z^5 + \frac{17!!}{18!!}z^9 + \frac{25!!}{26!!}z^{13} + \frac{33!!}{34!!}z^{17} + \frac{41!!}{42!!}z^{21} + \dots &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-2/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}} + \frac{(-1)^{2/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}} + \frac{(-1)^{4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}} \right) \\
\frac{3!!}{4!!}z^2 + \frac{11!!}{12!!}z^6 + \frac{19!!}{20!!}z^{10} + \frac{27!!}{28!!}z^{14} + \frac{35!!}{36!!}z^{18} + \frac{43!!}{44!!}z^{22} + \dots &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}} + \frac{(-1)^{4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-8/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}} + \frac{(-1)^{8/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}} \right) \\
\frac{5!!}{6!!}z^3 + \frac{13!!}{14!!}z^7 + \frac{21!!}{22!!}z^{11} + \frac{29!!}{30!!}z^{15} + \frac{37!!}{38!!}z^{19} + \frac{45!!}{46!!}z^{23} + \dots &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}} + \frac{(-1)^{6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}} + \frac{(-1)^{12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}} \right)
\end{aligned}$$

最後の式の右辺を数式処理ソフト *Mathematica* でマクローリン展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
f[3, 4, z_] := &\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}} + \frac{(-1)^{6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left( \frac{(-1)^{-12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}} + \frac{(-1)^{12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}} \right)
\end{aligned}$$

`Normal[Simplify[Series[f[3, 4, z], {z, 0, 19}]]]`

$$\frac{5z^3}{16} + \frac{429z^7}{2048} + \frac{88179z^{11}}{524288} + \frac{9694845z^{15}}{67108864} + \frac{4418157975z^{19}}{34359738368}$$

### 16・5・2 ベキ級数の交代4分割

ベキ級数 (2.0) の4交代分割は

$$\underline{f}(0,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{4r+0} z^{4r+0} = a_0 z^0 - a_4 z^4 + a_8 z^8 - a_{12} z^{12} + \dots$$

$$\underline{f}(1,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{4r+1} z^{4r+1} = a_1 z^1 - a_5 z^5 + a_9 z^9 - a_{13} z^{13} + \dots$$

$$\underline{f}(2,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{4r+2} z^{4r+2} = a_2 z^2 - a_6 z^6 + a_{10} z^{10} - a_{14} z^{14} + \dots$$

$$\underline{f}(3,4,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{4r+3} z^{4r+3} = a_3 z^3 - a_7 z^7 + a_{11} z^{11} - a_{15} z^{15} + \dots$$

そして、公式 16・2・2 は次のように書き下される。



$$\underline{f}(0,4,z) = \frac{f\{(-1)^{1/4}z\} + f\{(-1)^{-1/4}z\}}{4} + \frac{f\{(-1)^{3/4}z\} + f\{(-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

$$\underline{f}(1,4,z) = \frac{(-1)^{-1/4}f\{(-1)^{1/4}z\} + (-1)^{1/4}f\{(-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ + \frac{(-1)^{-3/4}f\{(-1)^{3/4}z\} + (-1)^{3/4}f\{(-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

$$\underline{f}(2,4,z) = \frac{(-1)^{-2/4}f\{(-1)^{1/4}z\} + (-1)^{2/4}f\{(-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ + \frac{(-1)^{-6/4}f\{(-1)^{3/4}z\} + (-1)^{6/4}f\{(-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

$$\underline{f}(3,4,z) = \frac{(-1)^{-3/4}f\{(-1)^{1/4}z\} + (-1)^{3/4}f\{(-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ + \frac{(-1)^{-9/4}f\{(-1)^{3/4}z\} + (-1)^{9/4}f\{(-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

例 1 対数級数の交代4分割 ( $|z| \leq 1$ )

$$-\frac{z^4}{4} + \frac{z^8}{8} - \frac{z^{12}}{12} + \frac{z^{20}}{16} - \frac{z^{20}}{20} + \frac{z^{24}}{24} - + \dots = -\frac{\log\{1 - (-1)^{1/4}z\} + \log\{1 - (-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ - \frac{\log\{1 - (-1)^{3/4}z\} + \log\{1 - (-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

$$\frac{z^1}{1} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{13}}{13} + \frac{z^{17}}{17} - \frac{z^{21}}{21} + - \dots = \\ - \frac{(-1)^{-1/4} \log\{1 - (-1)^{1/4}z\} + (-1)^{1/4} \log\{1 - (-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ - \frac{(-1)^{-3/4} \log\{1 - (-1)^{3/4}z\} + (-1)^{3/4} \log\{1 - (-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

$$\frac{z^2}{2} - \frac{z^6}{6} + \frac{z^{10}}{10} - \frac{z^{14}}{14} + \frac{z^{18}}{18} - \frac{z^{22}}{22} + - \dots = \\ - \frac{(-1)^{-2/4} \log\{1 - (-1)^{1/4}z\} + (-1)^{2/4} \log\{1 - (-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ - \frac{(-1)^{-6/4} \log\{1 - (-1)^{3/4}z\} + (-1)^{6/4} \log\{1 - (-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

$$\frac{z^3}{3} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^{11}}{11} - \frac{z^{15}}{15} + \frac{z^{19}}{19} - \frac{z^{23}}{23} + - \dots = \\ - \frac{(-1)^{-3/4} \log\{1 - (-1)^{1/4}z\} + (-1)^{3/4} \log\{1 - (-1)^{-1/4}z\}}{4} \\ - \frac{(-1)^{-9/4} \log\{1 - (-1)^{3/4}z\} + (-1)^{9/4} \log\{1 - (-1)^{-3/4}z\}}{4}$$

特に  $z=1$  のとき

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{20} + \frac{1}{24} - + \dots = -\frac{\log 2}{4} = -0.17328679\dots$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \dots = \frac{\pi + 2\operatorname{arccoth}\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 0.86697298\dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22} + \dots = \frac{\pi}{8} = 0.39269908\dots$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \dots = \frac{\pi - 2\operatorname{arccoth}\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 0.24374774\dots$$

## 例 2 指数級数の交代4分割

$$1 - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{12}}{12!} + \frac{z^{16}}{16!} - \frac{z^{20}}{20!} + \dots = \frac{e^{(-1)^{1/4}z} + e^{(-1)^{-1/4}z}}{4} + \frac{e^{(-1)^{3/4}z} + e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$= \cosh \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{z^1}{1!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{13}}{13!} + \frac{z^{17}}{17!} - \frac{z^{21}}{21!} + \dots = \frac{(-1)^{-1/4}e^{(-1)^{1/4}z} + (-1)^{1/4}e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}$$

$$+ \frac{(-1)^{-3/4}e^{(-1)^{3/4}z} + (-1)^{3/4}e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$= \frac{e^{z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{z}{\sqrt{2}} + \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \right) - \frac{e^{-z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{z}{\sqrt{2}} - \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{z^2}{2!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} - \frac{z^{14}}{14!} + \frac{z^{18}}{18!} - \frac{z^{22}}{22!} + \dots = \frac{(-1)^{-2/4}e^{(-1)^{1/4}z} + (-1)^{2/4}e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}$$

$$+ \frac{(-1)^{-6/4}e^{(-1)^{3/4}z} + (-1)^{6/4}e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$= \sinh \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{z^3}{3!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} - \frac{z^{15}}{15!} + \frac{z^{19}}{19!} - \frac{z^{23}}{23!} + \dots = \frac{(-1)^{-3/4}e^{(-1)^{1/4}z} + (-1)^{3/4}e^{(-1)^{-1/4}z}}{4}$$

$$+ \frac{(-1)^{-9/4}e^{(-1)^{3/4}z} + (-1)^{9/4}e^{(-1)^{-3/4}z}}{4}$$

$$= -\frac{e^{z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{z}{\sqrt{2}} - \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \right) + \frac{e^{-z/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{z}{\sqrt{2}} + \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \right)$$

特に  $z=1$  のとき

$$1 - \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{12!} + \frac{1}{16!} - \frac{1}{20!} + \dots = \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.95835813\dots$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{13!} + \frac{1}{17!} - \frac{1}{21!} + \dots = \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \left( \sin \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \sinh \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) = 0.99166942\dots$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{10!} - \frac{1}{14!} + \frac{1}{18!} - \frac{1}{22!} + \dots = \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.49861138\dots$$

$$\frac{1}{3!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{11!} - \frac{1}{15!} + \frac{1}{19!} - \frac{1}{23!} + \dots = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \left( \sin \frac{1+i}{\sqrt{2}} - \sinh \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) = 0.16646827\dots$$

## 16・6 ベキ級数の5分割

### 16・6・1 ベキ級数の5分割

関数  $f(z)$  が領域  $D$  上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (2.0)$$

この級数の5分割は

$$f(0,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{5r+0} z^{5r+0} = a_0 z^0 + a_5 z^5 + a_{10} z^{10} + a_{15} z^{15} + \dots$$

$$f(1,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{5r+1} z^{5r+1} = a_1 z^1 + a_6 z^6 + a_{11} z^{11} + a_{16} z^{16} + \dots$$

$$f(2,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{5r+2} z^{5r+2} = a_2 z^2 + a_7 z^7 + a_{12} z^{12} + a_{17} z^{17} + \dots$$

$$f(3,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{5r+3} z^{5r+3} = a_3 z^3 + a_8 z^8 + a_{13} z^{13} + a_{18} z^{18} + \dots$$

$$f(4,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{5r+4} z^{5r+4} = a_4 z^4 + a_9 z^9 + a_{14} z^{14} + a_{19} z^{19} + \dots$$

そして、公式 16・2・1 は次のように書き下される。

$$f(0,5,z) = \frac{f(z)}{5} + \frac{f\{(-1)^{2/5}z\} + f\{(-1)^{-2/5}z\}}{5} + \frac{f\{(-1)^{4/5}z\} + f\{(-1)^{-4/5}z\}}{5}$$

$$f(1,5,z) = \frac{f(z)}{5} + \frac{(-1)^{-2/5}f\{(-1)^{2/5}z\} + (-1)^{2/5}f\{(-1)^{-2/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-4/5}f\{(-1)^{4/5}z\} + (-1)^{4/5}f\{(-1)^{-4/5}z\}}{5}$$

$$f(2,5,z) = \frac{f(z)}{5} + \frac{(-1)^{-4/5}f\{(-1)^{2/5}z\} + (-1)^{4/5}f\{(-1)^{-2/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-8/5}f\{(-1)^{4/5}z\} + (-1)^{8/5}f\{(-1)^{-4/5}z\}}{5}$$

$$f(3,5,z) = \frac{f(z)}{5} + \frac{(-1)^{-6/5}f\{(-1)^{2/5}z\} + (-1)^{6/5}f\{(-1)^{-2/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-12/5}f\{(-1)^{4/5}z\} + (-1)^{12/5}f\{(-1)^{-4/5}z\}}{5}$$

$$f(4,5,z) = \frac{f(z)}{5} + \frac{(-1)^{-8/5}f\{(-1)^{2/5}z\} + (-1)^{8/5}f\{(-1)^{-2/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-16/5}f\{(-1)^{4/5}z\} + (-1)^{16/5}f\{(-1)^{-4/5}z\}}{5}$$

### 例 1 指数級数の5分割

$$1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = e^z \quad (\text{被分割級数})$$

$$1 + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{15}}{15!} + \frac{z^{20}}{20!} + \frac{z^{25}}{25!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{e^{(-1)^{2/5}z} + e^{(-1)^{-2/5}z}}{5} \\ + \frac{e^{(-1)^{4/5}z} + e^{(-1)^{-4/5}z}}{5}$$

$$\frac{z^1}{1!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{16}}{16!} + \frac{z^{21}}{21!} + \frac{z^{26}}{26!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-2/5} e^{(-1)^{2/5} z} + (-1)^{2/5} e^{(-1)^{-2/5} z}}{5} + \frac{(-1)^{-4/5} e^{(-1)^{4/5} z} + (-1)^{4/5} e^{(-1)^{-4/5} z}}{5}$$

$$\frac{z^2}{2!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{12}}{12!} + \frac{z^{17}}{17!} + \frac{z^{22}}{22!} + \frac{z^{27}}{27!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-4/5} e^{(-1)^{2/5} z} + (-1)^{4/5} e^{(-1)^{-2/5} z}}{5} + \frac{(-1)^{-8/5} e^{(-1)^{4/5} z} + (-1)^{8/5} e^{(-1)^{-4/5} z}}{5}$$

$$\frac{z^3}{3!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{13}}{13!} + \frac{z^{18}}{18!} + \frac{z^{23}}{23!} + \frac{z^{28}}{28!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-6/5} e^{(-1)^{2/5} z} + (-1)^{6/5} e^{(-1)^{-2/5} z}}{5} + \frac{(-1)^{-12/5} e^{(-1)^{4/5} z} + (-1)^{12/5} e^{(-1)^{-4/5} z}}{5}$$

$$\frac{z^4}{4!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{14}}{14!} + \frac{z^{19}}{19!} + \frac{z^{24}}{24!} + \frac{z^{29}}{29!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-8/5} e^{(-1)^{2/5} z} + (-1)^{8/5} e^{(-1)^{-2/5} z}}{5} + \frac{(-1)^{-16/5} e^{(-1)^{4/5} z} + (-1)^{16/5} e^{(-1)^{-4/5} z}}{5}$$

特に  $z=1$  のとき

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots = 2.71828182\dots$$

$$1 + \frac{1}{5!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{15!} + \frac{1}{20!} + \frac{1}{25!} + \dots = 1.00833360\dots$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{16!} + \frac{1}{21!} + \frac{1}{26!} + \dots = 1.00138891\dots$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{12!} + \frac{1}{17!} + \frac{1}{22!} + \frac{1}{27!} + \dots = 0.50019841\dots$$

$$\frac{1}{3!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{13!} + \frac{1}{18!} + \frac{1}{23!} + \frac{1}{28!} + \dots = 0.16669146\dots$$

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{19!} + \frac{1}{24!} + \frac{1}{29!} + \dots = 0.04166942\dots$$

例 2 対数級数の5分割 ( $|z| < 1, z \neq 1$ )

$$\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \dots = -\log(1-z) \quad (\text{被分割級数})$$

$$\frac{z^5}{5} + \frac{z^{10}}{10} + \frac{z^{15}}{15} + \frac{z^{20}}{20} + \frac{z^{25}}{25} + \frac{z^{30}}{30} + \dots = -\frac{\log(1-z)}{5} - \frac{\log\{1 - (-1)^{2/5} z\} + \log\{1 - (-1)^{-2/5} z\}}{5} - \frac{\log\{1 - (-1)^{4/5} z\} + \log\{1 - (-1)^{-4/5} z\}}{5}$$

$$\frac{z^1}{1} + \frac{z^6}{6} + \frac{z^{11}}{11} + \frac{z^{16}}{16} + \frac{z^{21}}{21} + \frac{z^{26}}{26} + \dots = -\frac{\log(1-z)}{5}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-1)^{-2/5} \log\{1 - (-1)^{2/5} z\} + (-1)^{2/5} \log\{1 - (-1)^{-2/5} z\}}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-4/5} \log\{1 - (-1)^{4/5} z\} + (-1)^{4/5} \log\{1 - (-1)^{-4/5} z\}}{5} \\
\frac{z^2}{2} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^{12}}{12} + \frac{z^{17}}{17} + \frac{z^{22}}{22} + \frac{z^{27}}{27} + \dots &= - \frac{\log(1-z)}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-4/5} \log\{1 - (-1)^{2/5} z\} + (-1)^{4/5} \log\{1 - (-1)^{-2/5} z\}}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-8/5} \log\{1 - (-1)^{4/5} z\} + (-1)^{8/5} \log\{1 - (-1)^{-4/5} z\}}{5} \\
\frac{z^3}{3} + \frac{z^8}{8} + \frac{z^{13}}{13} + \frac{z^{18}}{18} + \frac{z^{23}}{23} + \frac{z^{28}}{28} + \dots &= - \frac{\log(1-z)}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-6/5} \log\{1 - (-1)^{2/5} z\} + (-1)^{6/5} \log\{1 - (-1)^{-2/5} z\}}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-12/5} \log\{1 - (-1)^{4/5} z\} + (-1)^{12/5} \log\{1 - (-1)^{-4/5} z\}}{5} \\
\frac{z^4}{4} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{14}}{14} + \frac{z^{19}}{19} + \frac{z^{24}}{24} + \frac{z^{29}}{29} + \dots &= - \frac{\log(1-z)}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-8/5} \log\{1 - (-1)^{2/5} z\} + (-1)^{8/5} \log\{1 - (-1)^{-2/5} z\}}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-16/5} \log\{1 - (-1)^{4/5} z\} + (-1)^{16/5} \log\{1 - (-1)^{-4/5} z\}}{5}
\end{aligned}$$

$z = 1/2$  のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots &= 0.69314718\dots = \log 2 \\
\frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{10 \cdot 2^{10}} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} + \frac{1}{20 \cdot 2^{20}} + \frac{1}{25 \cdot 2^{25}} + \frac{1}{30 \cdot 2^{30}} + \dots &= 0.00634973\dots = \log 2 - \frac{\log 31}{5} \\
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{16 \cdot 2^{16}} + \frac{1}{21 \cdot 2^{21}} + \frac{1}{26 \cdot 2^{26}} + \dots &= 0.50264953\dots \\
\frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{12 \cdot 2^{12}} + \frac{1}{17 \cdot 2^{17}} + \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \frac{1}{27 \cdot 2^{27}} + \dots &= 0.12613687\dots \\
\frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{13 \cdot 2^{13}} + \frac{1}{18 \cdot 2^{18}} + \frac{1}{23 \cdot 2^{23}} + \frac{1}{28 \cdot 2^{28}} + \dots &= 0.04216455\dots \\
\frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \frac{1}{14 \cdot 2^{14}} + \frac{1}{19 \cdot 2^{19}} + \frac{1}{24 \cdot 2^{24}} + \frac{1}{29 \cdot 2^{29}} + \dots &= 0.01584647\dots
\end{aligned}$$

### 16・6・2 ベキ級数の交代5分割

ベキ級数 (2.0) の5交代分割は

$$f(0,5,z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r a_{5r+0} z^{5r+0} = a_0 z^0 - a_5 z^5 + a_{10} z^{10} - a_{15} z^{15} + \dots$$

$$\underline{f}(1,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{5r+1} z^{5r+1} = a_1 z^1 - a_6 z^6 + a_{11} z^{11} - a_{16} z^{16} + \dots$$

$$\underline{f}(2,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{5r+2} z^{5r+2} = a_2 z^2 - a_7 z^7 + a_{12} z^{12} - a_{17} z^{17} + \dots$$

$$\underline{f}(3,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{5r+3} z^{5r+3} = a_3 z^3 - a_8 z^8 + a_{13} z^{13} - a_{18} z^{18} + \dots$$

$$\underline{f}(4,5,z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{5r+4} z^{5r+4} = a_4 z^4 - a_9 z^9 + a_{14} z^{14} - a_{19} z^{19} + \dots$$

そして、公式 16・2・2 は次のように書き下される。

$$\underline{f}(0,5,z) = \frac{f(-z)}{5} + \frac{f\{(-1)^{1/5}z\} + f\{(-1)^{-1/5}z\}}{5} + \frac{f\{(-1)^{3/5}z\} + f\{(-1)^{-3/5}z\}}{5}$$

$$\underline{f}(1,5,z) = \frac{(-1)^1 f(-z)}{5} + \frac{(-1)^{-1/5} f\{(-1)^{1/5}z\} + (-1)^{1/5} f\{(-1)^{-1/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-3/5} f\{(-1)^{3/5}z\} + (-1)^{3/5} f\{(-1)^{-3/5}z\}}{5}$$

$$\underline{f}(2,5,z) = \frac{(-1)^2 f(-z)}{5} + \frac{(-1)^{-2/5} f\{(-1)^{1/5}z\} + (-1)^{2/5} f\{(-1)^{-1/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-6/5} f\{(-1)^{3/5}z\} + (-1)^{6/5} f\{(-1)^{-3/5}z\}}{5}$$

$$\underline{f}(3,5,z) = \frac{(-1)^3 f(-z)}{5} + \frac{(-1)^{-3/5} f\{(-1)^{1/5}z\} + (-1)^{3/5} f\{(-1)^{-1/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-9/5} f\{(-1)^{3/5}z\} + (-1)^{9/5} f\{(-1)^{-3/5}z\}}{5}$$

$$\underline{f}(4,5,z) = \frac{(-1)^4 f(-z)}{5} + \frac{(-1)^{-4/5} f\{(-1)^{1/5}z\} + (-1)^{4/5} f\{(-1)^{-1/5}z\}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-12/5} f\{(-1)^{3/5}z\} + (-1)^{12/5} f\{(-1)^{-3/5}z\}}{5}$$

### 例 1 指数級数の交代5分割

$$1 - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^{10}}{10!} - \frac{z^{15}}{15!} + \frac{z^{20}}{20!} - \frac{z^{25}}{25!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{e^{(-1)^{1/5}z} + e^{(-1)^{-1/5}z}}{5} \\ + \frac{e^{(-1)^{3/5}z} + e^{(-1)^{-3/5}z}}{5}$$

$$\frac{z^1}{1!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{11}}{11!} - \frac{z^{16}}{16!} + \frac{z^{21}}{21!} - \frac{z^{26}}{26!} + \dots = -\frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-1/5} e^{(-1)^{1/5}z} + (-1)^{1/5} e^{(-1)^{-1/5}z}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-3/5} e^{(-1)^{3/5}z} + (-1)^{3/5} e^{(-1)^{-3/5}z}}{5}$$

$$\frac{z^2}{2!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{12}}{12!} - \frac{z^{17}}{17!} + \frac{z^{22}}{22!} - \frac{z^{27}}{27!} + \dots = \frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-2/5} e^{(-1)^{1/5}z} + (-1)^{2/5} e^{(-1)^{-1/5}z}}{5} \\ + \frac{(-1)^{-6/5} e^{(-1)^{3/5}z} + (-1)^{6/5} e^{(-1)^{-3/5}z}}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{z^3}{3!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{13}}{13!} - \frac{z^{18}}{18!} + \frac{z^{23}}{23!} - \frac{z^{28}}{28!} + \dots &= -\frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-3/5} e^{(-1)^{1/5} z} + (-1)^{3/5} e^{(-1)^{-1/5} z}}{5} \\ &\quad + \frac{(-1)^{-9/5} e^{(-1)^{3/5} z} + (-1)^{9/5} e^{(-1)^{-3/5} z}}{5} \\ \frac{z^4}{4!} - \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{14}}{14!} - \frac{z^{19}}{19!} + \frac{z^{24}}{24!} - \frac{z^{29}}{29!} + \dots &= \frac{e^z}{5} + \frac{(-1)^{-4/5} e^{(-1)^{1/5} z} + (-1)^{4/5} e^{(-1)^{-1/5} z}}{5} \\ &\quad + \frac{(-1)^{-12/5} e^{(-1)^{3/5} z} + (-1)^{12/5} e^{(-1)^{-3/5} z}}{5} \end{aligned}$$

特に  $z=1$  のとき

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{5!} + \frac{1}{10!} - \frac{1}{15!} + \frac{1}{20!} - \frac{1}{25!} + \dots &= 0.99166694\dots \\ \frac{1}{1!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{11!} - \frac{1}{16!} + \frac{1}{21!} - \frac{1}{26!} + \dots &= 0.99861113\dots \\ \frac{1}{2!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{12!} - \frac{1}{17!} + \frac{1}{22!} - \frac{1}{27!} + \dots &= 0.49980158\dots \\ \frac{1}{3!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{13!} - \frac{1}{18!} + \frac{1}{23!} - \frac{1}{28!} + \dots &= 0.16664186\dots \\ \frac{1}{4!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{14!} - \frac{1}{19!} + \frac{1}{24!} - \frac{1}{29!} + \dots &= 0.04166391\dots \end{aligned}$$

## 例 2 対数級数の交代5分割 ( $|z| \leq 1$ )

$$\begin{aligned} -\frac{z^5}{5} + \frac{z^{10}}{10} - \frac{z^{15}}{15} + \frac{z^{20}}{20} - \frac{z^{25}}{25} + \frac{z^{30}}{30} - \dots &= -\frac{\log(1+z)}{5} \\ &\quad - \frac{\log\{1 - (-1)^{1/5} z\} + \log\{1 - (-1)^{-1/5} z\}}{5} \\ &\quad - \frac{\log\{1 - (-1)^{3/5} z\} + \log\{1 - (-1)^{-3/5} z\}}{5} \\ \frac{z^1}{1} - \frac{z^6}{6} + \frac{z^{11}}{11} - \frac{z^{16}}{16} + \frac{z^{21}}{21} - \frac{z^{26}}{26} + \dots &= -\frac{(-1)^{-1} \log(1+z)}{5} \\ &\quad - \frac{(-1)^{-1/5} \log\{1 - (-1)^{1/5} z\} + (-1)^{1/5} \log\{1 - (-1)^{-1/5} z\}}{5} \\ &\quad - \frac{(-1)^{-3/5} \log\{1 - (-1)^{3/5} z\} + (-1)^{3/5} \log\{1 - (-1)^{-3/5} z\}}{5} \\ \frac{z^2}{2} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^{12}}{12} - \frac{z^{17}}{17} + \frac{z^{22}}{22} - \frac{z^{27}}{27} + \dots &= -\frac{(-1)^{-2} \log(1+z)}{5} \\ &\quad - \frac{(-1)^{-2/5} \log\{1 - (-1)^{1/5} z\} + (-1)^{2/5} \log\{1 - (-1)^{-1/5} z\}}{5} \\ &\quad - \frac{(-1)^{-6/5} \log\{1 - (-1)^{3/5} z\} + (-1)^{6/5} \log\{1 - (-1)^{-3/5} z\}}{5} \\ \frac{z^3}{3} - \frac{z^8}{8} + \frac{z^{13}}{13} - \frac{z^{18}}{18} + \frac{z^{23}}{23} - \frac{z^{28}}{28} + \dots &= -\frac{(-1)^{-3} \log(1+z)}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-1)^{-3/5} \log\{1 - (-1)^{1/5} z\} + (-1)^{3/5} \log\{1 - (-1)^{-1/5} z\}}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-9/5} \log\{1 - (-1)^{3/5} z\} + (-1)^{9/5} \log\{1 - (-1)^{-3/5} z\}}{5} \\
\frac{z^4}{4} - \frac{z^9}{9} + \frac{z^{14}}{14} - \frac{z^{19}}{19} + \frac{z^{24}}{24} - \frac{z^{29}}{29} + \dots &= - \frac{(-1)^{-4} \log(1+z)}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-4/5} \log\{1 - (-1)^{1/5} z\} + (-1)^{4/5} \log\{1 - (-1)^{-1/5} z\}}{5} \\
& - \frac{(-1)^{-12/5} \log\{1 - (-1)^{3/5} z\} + (-1)^{12/5} \log\{1 - (-1)^{-3/5} z\}}{5}
\end{aligned}$$

特に  $z=1$  のとき

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{20} - \frac{1}{25} + \frac{1}{30} - \dots &= -0.13862943\dots = -\frac{\log 2}{5} \\
\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{21} - \frac{1}{26} + \dots &= 0.88831357\dots \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{22} - \frac{1}{27} + \dots &= 0.40690163\dots \\
\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + \frac{1}{23} - \frac{1}{28} + \dots &= 0.25375156\dots \\
\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \frac{1}{24} - \frac{1}{29} + \dots &= 0.18064575\dots
\end{aligned}$$

### Note

公式中の  $(-1)^{m/n}$  ( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ) を初等超越関数や根号で表すことは可能である。しかし、5次以上の場合、それは非常にややこしいものになる。

2020.04.15

2021.03.20 Renewed.

河野 和  
広島市

宇宙人の数学