17 実係数多項式の実部虚部別表現

実数係数を持つ多項式のそれぞれは容易に実部虚部別に表現できる。しかしながら、任意の実係数多項式を実部虚部別に表示する公式と言うのは見たことがない。本章ではこのような公式を提示する。

17･1 *Lemma* と公式

最初に、重要な*Lemma* を1つ用意する。これは「14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」からの再掲である。

***Lemma* 14.1.0**（再掲）

x, y は実数、r は非負の整数とするとき、次式が成立する。

$$(x+iy)^r = \sum_{s=0}^{\lceil \frac{r-1}{2} \rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} x^{r-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} x^{r-2s-1} y^{2s+1} \tag{1.0}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

この*Lemma* を用いれば 実係数多項式を実部虚部別に分離できる。

公式 17･1･1

a は実数で $f_n(z)$（$z = x+iy$）は次のような実係数の多項式とする。

$$f_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r!} (z-a)^r \tag{1.1}$$

するとこの実部 $u_n(x,y)$ と虚部 $v_n(x,y)$ について次式が成立する。

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\lceil \frac{r-1}{2} \rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s} \tag{1.1u}$$

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1} \tag{1.1v}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

Lemma 14･1･0 において x を $x-a$ に置換すれば、

$$\{(x-a)+iy\}^r = \sum_{s=0}^{\lceil \frac{r-1}{2} \rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s} + i \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

これを (1.1) に代入すれば、

$$f_n(x,y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r\,!} \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} (-1)^s \binom{r}{2s} (x-a)^{r-2s} y^{2s}$$

$$+ i \sum_{r=0}^{n} \frac{f_n^{(r)}(a)}{r\,!} \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} (-1)^s \binom{r}{2s+1} (x-a)^{r-2s-1} y^{2s+1}$$

実部と虚部をそれぞれ $u_n(x,y)$, $v_n(x,y)$ と記述して与式を得る。

展開例

$u_5(x,y)$ を展開すると次のようである。

$$u_5(x,y) = \frac{f_5^{(0)}(a)}{0\,!} \binom{0}{0} (x-a)^{0-0} y^0$$
$$+ \frac{f_5^{(1)}(a)}{1\,!} \binom{1}{0} (x-a)^{1-0} y^0$$
$$+ \frac{f_5^{(2)}(a)}{2\,!} \left\{ \binom{2}{0} (x-a)^{2-0} y^0 - \binom{2}{2} (x-a)^{2-2} y^2 \right\}$$
$$+ \frac{f_5^{(3)}(a)}{3\,!} \left\{ \binom{3}{0} (x-a)^{3-0} y^0 - \binom{3}{2} (x-a)^{3-2} y^2 \right\}$$
$$+ \frac{f_5^{(4)}(a)}{4\,!} \left\{ \binom{4}{0} (x-a)^{4-0} y^0 - \binom{4}{2} (x-a)^{4-2} y^2 + \binom{4}{4} (x-a)^{4-4} y^4 \right\}$$
$$+ \frac{f_5^{(5)}(a)}{5\,!} \left\{ \binom{5}{0} (x-a)^{5-0} y^0 - \binom{5}{2} (x-a)^{5-2} y^2 + \binom{5}{4} (x-a)^{5-4} y^4 \right\}$$

この展開例からも分かるように、この多項式は x に関しても y に関してもやや中途半端である。そこで、これを並べ替えてより美しい多項式にしよう。

公式 17･1･2

a は実数で $f_n(z)$ （$z=x+iy$） は次のような実係数の多項式とする。

$$f_n(z) = \sum_{s=0}^{n} f_n^{(s)}(a) \frac{(z-a)^s}{s\,!} \tag{1.2}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil} \sum_{s=0}^{n-2r} f_n^{(2r+s)}(a) \frac{(x-a)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!} \tag{1.2u}$$

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \sum_{s=0}^{n-2r-1} f_n^{(2r+s+1)}(a) \frac{(x-a)^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!} \tag{1.2v}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

公式 17･1･1 より

$$u_n(x,y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f_n^{(r)}(a)}{r!}\sum_{s=0}^{\lceil\frac{r-1}{2}\rceil}(-1)^s\binom{r}{2s}(x-a)^{r-2s}y^{2s} \tag{1.1u}$$

$$v_n(x,y)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f_n^{(r)}(a)}{r!}\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}(-1)^s\binom{r}{2s+1}(x-a)^{r-2s-1}y^{2s+1} \tag{1.1v}$$

ここで、

$$A_r:=\frac{f_n^{(r)}(a)}{r!}\quad,\quad X:=(x-a)$$

$$a_{rs}:=(-1)^s\binom{r}{2s}\quad,\quad b_{rs}:=(-1)^s\binom{r}{2s+1}$$

と略記すれば

$$u_n(x,y)=\sum_{r=0}^{n}A_r\sum_{s=0}^{\lceil\frac{r-1}{2}\rceil}a_{rs}X^{r-2s}y^{2s} \tag{1.1u'}$$

$$v_n(x,y)=\sum_{r=0}^{n}A_r\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{r-1}{2}\rfloor}b_{rs}X^{r-2s-1}y^{2s+1} \tag{1.1v'}$$

$n=5$ のとき、(1.1u') は次のように並べ替えられる。

$$\begin{aligned}
u_5(x,y)&=\sum_{r=0}^{5}A_r\sum_{s=0}^{\lceil\frac{r-1}{2}\rceil}a_{rs}X^{r-2s}y^{2s}\\
&=A_0\left\{a_{00}X^{0-0}y^0\right\}\\
&\quad+A_1\left\{a_{10}X^{1-0}y^0\right\}\\
&\quad+A_2\left\{a_{20}X^{2-0}y^0+a_{21}X^{2-2}y^2\right\}\\
&\quad+A_3\left\{a_{30}X^{3-0}y^0+a_{31}X^{3-2}y^2\right\}\\
&\quad+A_4\left\{a_{40}X^{4-0}y^0+a_{41}X^{4-2}y^2+a_{42}X^{4-4}y^4\right\}\\
&\quad+A_5\left\{a_{50}X^{5-0}y^0+a_{51}X^{5-2}y^2+a_{52}X^{5-4}y^4\right\}\\
&=\left\{A_0a_{00}X^0+A_1a_{10}X^1+A_2a_{20}X^2+A_3a_{30}X^3+A_4a_{40}X^4+A_5a_{50}X^5\right\}y^0\\
&\quad+\left\{A_2a_{21}X^0+A_3a_{31}X^1+A_4a_{41}X^2+A_5a_{51}X^3\right\}y^2\\
&\quad+\left\{A_4a_{42}X^0+A_5a_{52}X^1\right\}y^4\\
&=\left\{\sum_{s=0}^{5}A_{0+s}a_{0+s,0}X^s\right\}y^0+\left\{\sum_{s=0}^{3}A_{2+s}a_{2+s,1}X^s\right\}y^2+\left\{\sum_{s=0}^{1}A_{4+s}a_{4+s,2}X^s\right\}y^4
\end{aligned}$$

i.e.

$$u_5(x,y)=\sum_{r=0}^{2}\left\{\sum_{s=0}^{5-2r}A_{2r+s}a_{2r+s,r}X^s\right\}y^{2r}$$

$n=4$ のとき、(1.1u') は次のように並べ替えられる。

$$
\begin{aligned}
u_4(x,y) &= \sum_{r=0}^{n} A_r \sum_{s=0}^{\left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil} a_{rs} X^{r-2s} y^{2s} \\
&= A_0\left\{a_{00}X^{0-0}y^0\right\} \\
&\quad + A_1\left\{a_{10}X^{1-0}y^0\right\} \\
&\quad + A_2\left\{a_{20}X^{2-0}y^0 + a_{21}X^{2-2}y^2\right\} \\
&\quad + A_3\left\{a_{30}X^{3-0}y^0 + a_{31}X^{3-2}y^2\right\} \\
&\quad + A_4\left\{a_{40}X^{4-0}y^0 + a_{41}X^{4-2}y^2 + a_{42}X^{4-4}y^4\right\} \\
&= \left\{A_0a_{00}X^0 + A_1a_{10}X^1 + A_2a_{20}X^2 + A_3a_{30}X^3 + A_4a_{40}X^4\right\}y^0 \\
&\quad + \left\{A_2a_{21}X^0 + A_3a_{31}X^1 + A_4a_{41}X^2\right\}y^2 \\
&\quad + \left\{A_4a_{42}X^0\right\}y^4 \\
&= \left\{\sum_{s=0}^{4} A_{0+s}\,a_{0+s,0}X^s\right\}y^0 + \left\{\sum_{s=0}^{2} A_{2+s}\,a_{2+s,1}X^s\right\}y^2 + \left\{\sum_{s=0}^{0} A_{4+s}\,a_{4+s,2}X^s\right\}y^4
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
u_4(x,y) = \sum_{r=0}^{2}\left\{\sum_{s=0}^{4-2r} A_{2r+s}\,a_{2r+s,r}X^s\right\}y^{2r}
$$

これらは次のように統一表記できる。

$$
u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}\left\{\sum_{s=0}^{n-2r} A_{2r+s}\,a_{2r+s,r}X^s\right\}y^{2r}
$$

記号を元に戻すと、

$$
A_r = \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \quad\Longrightarrow\quad A_{2r+s} = \frac{f^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!}
$$

$$
a_{rs} = (-1)^s\binom{r}{2s} \quad\Longrightarrow\quad a_{2r+s,r} = (-1)^r\binom{2r+s}{2r}
$$

であるから、

$$
u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}\left\{\sum_{s=0}^{n-2r}\frac{f_n^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!}\binom{2r+s}{2r}(x-a)^s\right\}(-1)^r y^{2r}
$$

更に

$$
\binom{2r+s}{2r} = \frac{(2r+s)!}{(2r)!\,s!}
$$

これを上に代入すれば

$$
u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}\left\{\sum_{s=0}^{n-2r}\frac{f_n^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!}\,\frac{(2r+s)!}{(2r)!\,s!}(x-a)^s\right\}(-1)^r y^{2r}
$$

i.e.

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil} \sum_{s=0}^{n-2r} f_n^{(2r+s)}(a)\, \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u}$$

(1.1v') についても上記と類似の計算を行えば次を得る。但し、Σの上限は床関数となる。

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left\{ \sum_{s=0}^{n-2r} \frac{f_n^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r+1} (x-a)^{s-1} \right\} (-1)^r y^{2r+1}$$

ここで、{ } 内の初項 $(s=0)$ は

$$\frac{f_n^{(2r)}(a)}{(2r)!} \binom{2r}{2r+1} (x-a)^{-1} = 0 \qquad for\ r = 0, 1, \cdots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

であるから、

$$\sum_{s=0}^{n-2r} \frac{f_n^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r+1} (x-a)^{s-1} = \sum_{s=1}^{n-2r} \frac{f_n^{(2r+s)}(a)}{(2r+s)!} \binom{2r+s}{2r+1} (x-a)^{s-1}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2r-1} \frac{f_n^{(2r+s+1)}(a)}{(2r+s+1)!} \binom{2r+s+1}{2r+1} (x-a)^{s}$$

よって

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left\{ \sum_{s=0}^{n-2r-1} \frac{f_n^{(2r+s+1)}(a)}{(2r+s+1)!} \binom{2r+s+1}{2r+1} (x-a)^{s} \right\} (-1)^r y^{2r+1}$$

更に

$$\binom{2r+s+1}{2r+1} = \frac{(2r+s+1)!}{(2r+1)!\, s!}$$

であるから、これを上に代入すれば

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left\{ \sum_{s=0}^{n-2r-1} \frac{f_n^{(2r+s+1)}(a)}{(2r+s+1)!} \frac{(2r+s+1)!}{(2r+1)!\, s!} (x-a)^{s} \right\} (-1)^r y^{2r+1}$$

i.e.

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \sum_{s=0}^{n-2r-1} f_n^{(2r+s+1)}(a)\, \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v}$$

実部虚部別マクローリン展開

$u_5(x,y)$, $v_5(x,y)$ のマクローリン展開は次のようである。

$$u_5(x,y) = \left\{ f_5^{(0)}(0) \frac{x^0}{0!} + f_5^{(1)}(0) \frac{x^1}{1!} + f_5^{(2)}(0) \frac{x^2}{2!} + \cdots + f_5^{(5)}(0) \frac{x^5}{5!} \right\} \frac{(-1)^0 y^0}{0!}$$

$$+ \left\{ f_5^{(2)}(0) \frac{x^0}{0!} + f_5^{(3)}(0) \frac{x^1}{1!} + f_5^{(4)}(0) \frac{x^2}{2!} + f_5^{(5)}(0) \frac{x^3}{3!} \right\} \frac{(-1)^1 y^2}{2!}$$

$$+ \left\{ f_5^{(4)}(0) \frac{x^0}{0!} + f_5^{(5)}(0) \frac{x^1}{1!} \right\} \frac{(-1)^2 y^4}{4!}$$

$$v_5(x,y) = \left\{ f_5^{(1)}(0)\frac{x^0}{0!} + f_5^{(2)}(0)\frac{x^1}{1!} + f_5^{(3)}(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f_5^{(5)}(0)\frac{x^4}{4!} \right\} \frac{(-1)^0 y^1}{1!}$$
$$+ \left\{ f_5^{(3)}(0)\frac{x^0}{0!} + f_5^{(4)}(0)\frac{x^1}{1!} + f_5^{(5)}(0)\frac{x^2}{2!} \right\} \frac{(-1)^1 y^3}{3!}$$
$$+ \left\{ f_5^{(5)}(0)\frac{x^0}{0!} \right\} \frac{(-1)^2 y^5}{5!}$$

マクローリン級数中に偶数階の微分係数を含まない奇多項式については次が成立する。

公式 17・1・2'（奇多項式）

複素関数 f_{2n+1}（$z = x+iy$）が次のように実係数の多項式で表されるとせよ。

$$f_{2n+1}(z) = \sum_{s=0}^{n} f_{2n+1}^{(2s+1)}(0)\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \tag{1.2'}$$

するとこの実部 $u_{2n+1}(x,y)$ と虚部 $v_{2n+1}(x,y)$ について次式が成立する。

$$u_{2n+1}(x,y) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u'}$$

$$v_{2n+1}(x,y) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v'}$$

但し、$0^0 = 1$。

マクローリン級数中に奇数階の微分係数を含まない偶多項式については次が成立する。

公式 17・1・2"（偶多項式）

複素関数 f_{2n}（$z = x+iy$）が次のように実係数の多項式で表されるとせよ。

$$f_{2n}(z) = \sum_{s=0}^{n} f_{2n}^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)!} \tag{1.2"}$$

するとこの実部 $u_{2n}(x,y)$ と虚部 $v_{2n}(x,y)$ について次式が成立する。

$$u_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{1.2u"}$$

$$v_{2n}(x,y) = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1-r} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{1.2v"}$$

但し、$0^0 = 1$。

コーシー・リーマンの方程式

(1.2u) , (1.2v) を x,y でそれぞれ偏微分すると次のようになる。これらはコーシー・リーマンの方程式である。

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v_n(x,y)}{\partial y} = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil} \sum_{s=0}^{n-2r-1} f_n^{(2r+s+1)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v_n(x,y)}{\partial x} = -\sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \sum_{s=0}^{n-2r-2} f_n^{(2r+s+2)}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

Mathematica における 0^0 の扱い

数式処理ソフト *Mathematica* は 0^0 を *Indeterminate* として計算しない。これでは不都合なので本稿では計算に先立ち次のオプションを指定している。

```
Unprotect [Power] ; Power [0,0] = 1 ;
```

17･2 例1 : 円分方程式

本節と次節では例を示す。手始めに本節では円分方程式を取り上げる。

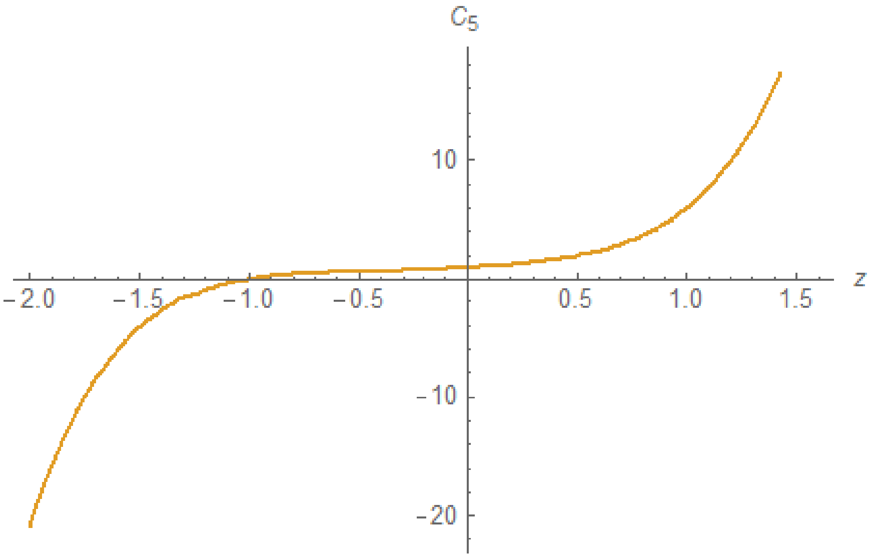
円分方程式は次のようなものである。

$$C_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0 \qquad \left(= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) \tag{2.0}$$

よって 関数 $C_n(z)$ のマクローリン展開は

$$C_n(z) = \sum_{s=0}^{n} s\,! \frac{z^s}{s\,!} \tag{2.1}$$

$n=5$ のとき、これを図示すれば次のとおり。



公式 17･1･2 による実部虚部別表現

(2.1) より 7

$$C_n^{(s)}(0) = s\,! \qquad s = 0, 1, \cdots, n$$

$$C_n^{(2r+s)}(0) = (2r+s)\,! \qquad \begin{array}{l} r = 0, 1, \cdots, \lceil (n-1)/2 \rceil \\ s = 0, 1, \cdots, n-2r \end{array}$$

$$C_n^{(2r+s+1)}(0) = (2r+s+1)\,! \qquad \begin{array}{l} r = 0, 1, \cdots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor \\ s = 0, 1, \cdots, n-2r-1 \end{array}$$

これらを 公式 17･1･2 に代入すれば

$$u_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil} \sum_{s=0}^{n-2r} (2r+s)\,! \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!} \tag{2.2u}$$

$$v_n(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \sum_{s=0}^{n-2r-1} (2r+s+1)\,! \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!} \tag{2.2v}$$

但し、$0^0 = 1$, $\lceil x \rceil$ は天井関数 , $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

$n=5$ のとき、、これらを展開すれば次のとおり。

$$u_5(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lceil\frac{5-1}{2}\right\rceil}\sum_{s=0}^{5-2r}(2r+s)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$= \left(0!\frac{x^0}{0!}+1!\frac{x^1}{1!}+2!\frac{x^2}{2!}+3!\frac{x^3}{3!}+4!\frac{x^4}{4!}+5!\frac{x^5}{5!}\right)\frac{y^0}{0!}$$

$$-\left(2!\frac{x^0}{0!}+3!\frac{x^1}{1!}+4!\frac{x^2}{2!}+5!\frac{x^3}{3!}\right)\frac{y^2}{2!}$$

$$+\left(4!\frac{x^0}{0!}+5!\frac{x^1}{1!}\right)\frac{y^4}{4!}$$

$$= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5-y^2-3xy^2-6x^2y^2-10x^3y^2+y^4+5xy^4$$

$$v_5(x,y) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{5-1}{2}\right\rfloor}\sum_{s=0}^{5-2r-1}(2r+s+1)!\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

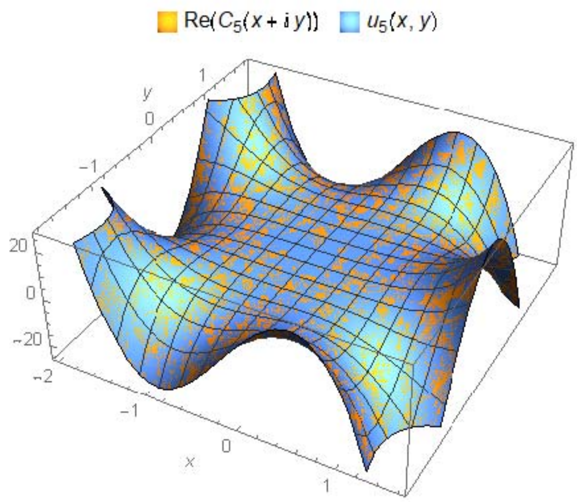
$$= \left(1!\frac{x^0}{0!}+2!\frac{x^1}{1!}+3!\frac{x^2}{2!}+4!\frac{x^3}{3!}+5!\frac{x^4}{4!}\right)\frac{y^1}{1!}$$

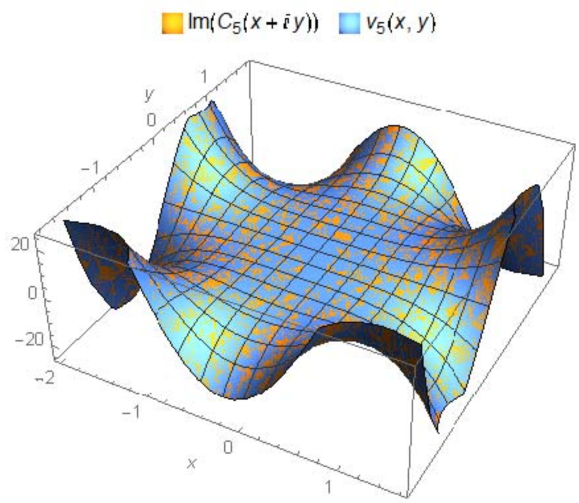
$$-\left(3!\frac{x^0}{0!}+4!\frac{x^1}{1!}+5!\frac{x^2}{2!}\right)\frac{y^3}{3!}$$

$$+\left(5!\frac{x^0}{0!}\right)\frac{y^5}{5!}$$

$$= y+2xy+3x^2y+4x^3y+5x^4y-y^3-4xy^3-10x^2y^3+y^5$$

$n=5$ のとき、これらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





零点

関数 $C_n(z)$ の零点は次の連立方程式の実数解で与えられる。

$$\begin{cases} u_n(x,y) = \displaystyle\sum_{r=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \sum_{s=0}^{n-2r} (2r+s)!\, \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_n(x,y) = \displaystyle\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{n-2r-1} (2r+s+1)!\, \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \end{cases}$$

$n=5$ のとき、これを数式処理ソフト*Mathematica* で解けば次のようになる。

```
Solve[u5[x, y] == 0 && v5[x, y] == 0, Element[{x, y}, Reals]]
```

$$\left\{\{x \to -1,\ y \to 0\},\ \left\{x \to -\frac{1}{2},\ y \to -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{x \to -\frac{1}{2},\ y \to \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2},\ y \to -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2},\ y \to \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$$

これらは6次方程式 $1-z^6=0$ の6つの解の内の5つである。

17・3 例2：ベルヌーイ多項式

本節では、第2の例としてベルヌーイ多項式を取り上げる。

ベルヌーイ多項式は次のようなものである。

$$B_n(z) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_{n-s} z^s \tag{3.0}$$

但し

$$B_0 = 1 , B_2 = \frac{1}{6} , B_4 = -\frac{1}{30} , B_6 = \frac{1}{42} , B_8 = -\frac{1}{30} , B_{10} = \frac{5}{66} , \cdots$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} , \quad B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$$

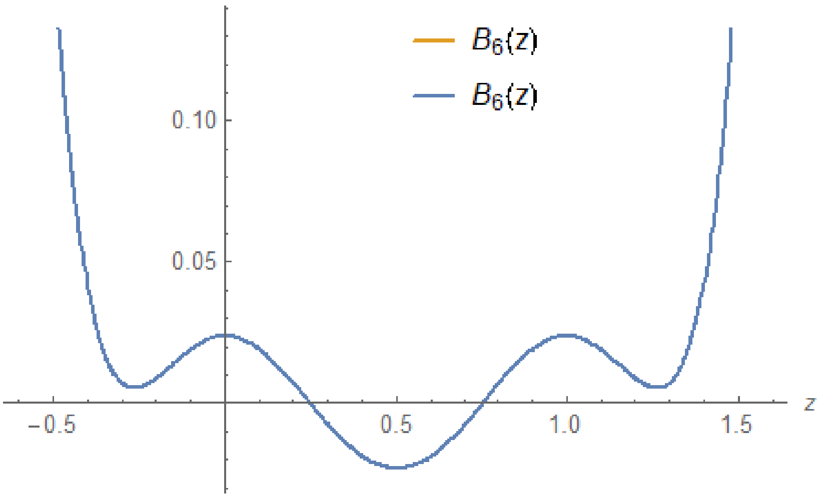
これより

$$B_n(z) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_{n-s} s! \frac{z^s}{s!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!} s! B_{n-s} \frac{z^s}{s!}$$

i.e.

$$B_n(z) = n! \sum_{s=0}^{n} \frac{B_{n-s}}{(n-s)!} \frac{z^s}{s!} \tag{3.1}$$

$n=6$ のとき、この両辺を図示すれば次のとおり。橙が左辺で青が右辺である。



公式 17・1・2 による実数部虚数部別表現

(3.1) より

$$B_n^{(s)}(0) = \frac{n! B_{n-s}}{(n-s)!} \qquad s = 0, 1, \cdots, n$$

であるから、

$$B_n^{(2r+s)}(0) = \frac{n! B_{n-2r-s}}{(n-2r-s)!} \qquad \begin{array}{l} r = 0, 1, \cdots, \lceil (n-1)/2 \rceil \\ s = 0, 1, \cdots, n-2r \end{array}$$

$$B_n^{(2r+s+1)}(0) = \frac{n! B_{n-2r-s-1}}{(n-2r-s-1)!} \qquad \begin{array}{l} r = 0, 1, \cdots, \lceil (n-1)/2 \rceil \\ s = 0, 1, \cdots, n-2r-1 \end{array}$$

これらを 公式 17･1･2 に代入すれば

$$u_n(x,y)=n!\sum_{r=0}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\sum_{s=0}^{n-2r}\frac{B_{n-2r-s}}{(n-2r-s)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \tag{3.2u}$$

$$v_n(x,y)=n!\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\sum_{s=0}^{n-2r-1}\frac{B_{n-2r-s-1}}{(n-2r-s-1)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \tag{3.2v}$$

但し、$0^0=1$, $\lceil x\rceil$ は天井関数 , $\lfloor x\rfloor$ は床関数。

$n=6$ のとき、、これらを展開すれば次のとおり。

$$u_6(x,y)=6!\sum_{r=0}^{\lceil\frac{6-1}{2}\rceil}\sum_{s=0}^{6-2r}\frac{B_{6-2r-s}}{(6-2r-s)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$=6!\left(\frac{B_6}{6!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_5}{5!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_4}{4!}\frac{x^2}{2!}+\frac{B_3}{3!}\frac{x^3}{3!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^4}{4!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^5}{5!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^6}{6!}\right)\frac{y^0}{0!}$$

$$-6!\left(\frac{B_4}{4!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_3}{3!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^2}{2!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^3}{3!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^4}{4!}\right)\frac{y^2}{2!}$$

$$+6!\left(\frac{B_2}{2!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^2}{2!}\right)\frac{y^4}{4!}$$

$$-6!\left(\frac{B_0}{0}\frac{x^0}{0}\right)\frac{y^6}{6!}$$

$$=720\left(\frac{1}{30240}-\frac{x^2}{1440}+\frac{x^4}{288}-\frac{x^5}{240}+\frac{x^6}{720}+\frac{y^2}{1440}-\frac{x^2y^2}{48}+\frac{x^3y^2}{24}-\frac{x^4y^2}{48}+\frac{y^4}{288}-\frac{xy^4}{48}+\frac{x^2y^4}{48}-\frac{y^6}{720}\right)$$

$$v_6(x,y)=6!\sum_{r=0}^{\lfloor\frac{6-1}{2}\rfloor}\sum_{s=0}^{6-2r-1}\frac{B_{6-2r-s-1}}{(6-2r-s-1)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

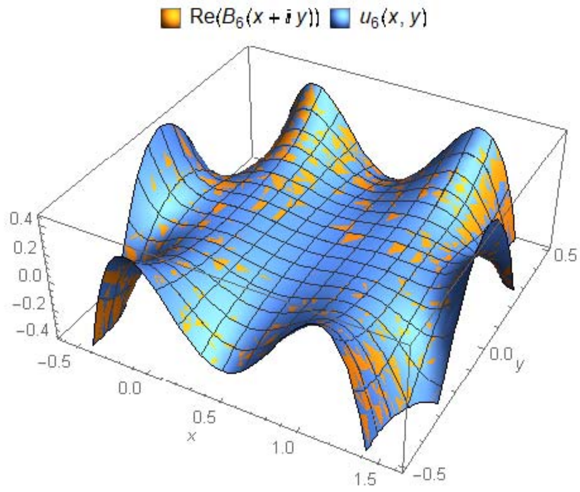
$$=6!\left(\frac{B_5}{5!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_4}{4!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_3}{3!}\frac{x^2}{2!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^3}{3!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^4}{4!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^5}{5!}\right)\frac{y^1}{1!}$$

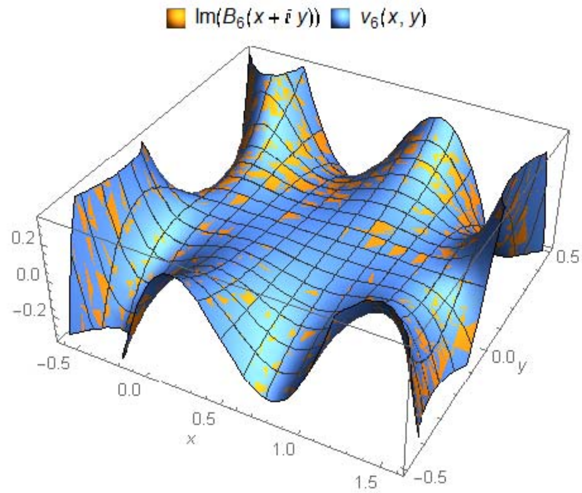
$$-6!\left(\frac{B_3}{3!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^1}{1!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^2}{2!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^3}{3!}\right)\frac{y^3}{3!}$$

$$+6!\left(\frac{B_1}{1!}\frac{x^0}{0!}+\frac{B_0}{0!}\frac{x^1}{1!}\right)\frac{y^5}{5!}$$

$$=720\left(-\frac{xy}{720}+\frac{x^3y}{72}-\frac{x^4y}{48}+\frac{x^5y}{120}-\frac{xy^3}{72}+\frac{x^2y^3}{24}-\frac{x^3y^3}{36}-\frac{y^5}{240}+\frac{xy^5}{120}\right)$$

$n=6$ のとき、これらの両辺を図示すると次のようである。左が実部で右が虚部である。両図において橙が左辺で青が右辺である。





零点

関数 $B_n(z)$ の零点は次の連立方程式の実数解で与えられる。

$$\begin{cases} u_n(x,y) = n!\displaystyle\sum_{r=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\sum_{s=0}^{n-2r}\frac{B_{n-2r-s}}{(n-2r-s)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\ v_n(x,y) = n!\displaystyle\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\sum_{s=0}^{n-2r-1}\frac{B_{n-2r-s-1}}{(n-2r-s-1)!}\frac{x^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \end{cases}$$

$n=6$ のとき、これを数式処理ソフト *Mathematica* で解けば次のようになる。

```
NSolve[u6[x, y] == 0 && v6[x, y] == 0, Element[{x, y}, Reals]]
{{x → 0.752459 , y → 0} , {x → 0.247541 , y → 0},
 {x → 1.27289 , y → -0.0649729}, {x → 1.27289 , y → 0.0649729},
 {x → -0.272887 , y → 0.0649729} , {x → -0.272887 , y → -0.0649729}}
```

2020.06.23

Kano Kono

宇宙人の数学