18 項の符号を等差的に反転したベキ級数

「 16 ベキ級数の分割 」においては、ベキ級数から等差的に抜き出される分割級数がどのような関数で表されるかを公式で示した。この公式は単体では今一興味の薄いものであった。

ところが、最近筆者は、この公式を道具として用いると元の級数の項の符号を等差的に反転できることに気付いた、本章では、それを新しい公式として提示し、いくつかを例示する。

18･1 公式および検証方法

先ず、「 16 ベキ級数の分割 」から、道具として用いる公式を再掲する。

公式 16･2･1 (n 分割) (再掲)

関数 $f(z)$ が領域 D 上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r=a_0z^0+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$$

そしてこれの n 分割級数 $f(k,n,z)$ $k=0,1,2,\cdots,n-1$ をそれぞれ次のように定める。

$$f(0,n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{nr+0}z^{nr+0}=a_0z^0+a_nz^n+a_{2n}z^{2n}+a_{3n}z^{3n}+\cdots$$

$$f(1,n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{nr+1}z^{nr+1}=a_1z^1+a_{n+1}z^{n+1}+a_{2n+1}z^{2n+1}+a_{3n+1}z^{3n+1}+\cdots$$

$$f(2,n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{nr+2}z^{nr+2}=a_2z^2+a_{n+2}z^{n+2}+a_{2n+2}z^{2n+2}+a_{3n+2}z^{3n+2}+\cdots$$

$$\vdots$$

$$f(n-1,n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{nr+n-1}z^{nr+n-1}=a_{n-1}z^{n-1}+a_{2n-1}z^{2n-1}+a_{3n-1}z^{3n-1}+a_{4n-1}z^{4n-1}+\cdots$$

すると、$n=2,3,4,\cdots$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$ について次式が成立する。

$$f(k,n,z)=\frac{f(z)-\lambda_n(-1)^k f(-z)}{n}+\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left[(-1)^{-\frac{2sk}{n}}f\left\{(-1)^{\frac{2s}{n}}z\right\}+(-1)^{\frac{2sk}{n}}f\left\{(-1)^{-\frac{2s}{n}}z\right\}\right]$$

但し、$\lambda_n=\left\{1+(-1)^n\right\}/2$, $\lfloor x\rfloor$ は床関数。

ベキ級数の等差的符号反転

上記公式を用いて、ベキ級数の項の符号を等差的に反転する次の公式を導く。

公式 18･1･1

整数 $n=2,3,4,\cdots$, $k=0,1,2,\cdots$ について、級数 $f(z)$ 及びその分割級数 $f(k,n,z)$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r=a_0z^0+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$$

$$f(k,n,z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{nr+k}z^{nr+k}=a_kz^k+a_{n+k}z^{n+k}+a_{2n+k}z^{2n+k}+a_{3n+k}z^{3n+k}+\cdots$$

すると、$f(z)$ の項 $a_{nr+k}\,z^{nr+k}$ $r=0,1,2,\cdots$ の符号を反転させた級数 $g(k,n,z)$ は次式で与えられる。

$$g(k,n,z) = \frac{n-2}{n}f(z) + \frac{2}{n}\left\{\lambda_n(-1)^k f(-z)\right\}$$
$$-\frac{2}{n}\sum_{s=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left[(-1)^{-\frac{2sk}{n}} f\left\{(-1)^{\frac{2s}{n}}z\right\} + (-1)^{\frac{2sk}{n}} f\left\{(-1)^{-\frac{2s}{n}}z\right\}\right]$$

但し、$\lambda_n = \left\{1+(-1)^n\right\}/2$, $\lfloor x \rfloor$ は床関数。

証明

所望の級数 $g(k,n,z)$ は

$$g(k,n,z) = f(z) - 2f(k,n,z)$$

で与えられるから、この右辺に 公式 16･2･1 の $f(k,n,z)$ を代入して与式を得る。

例

$$f(z) = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots$$

$$f(2,3,z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{14}}{14!} + \cdots$$

のとき、これらより

$$g(2,3,z) = 1 + \frac{z^1}{1!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} - \frac{z^8}{8!} ++-\cdots$$
$$= 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots$$
$$-2\left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{14}}{14!} + \cdots\right)$$
$$= f(z) - 2f(2,3,z)$$

検証方法

上の例の場合、数式処理ソフト *Mathematica* を用いて次のような計算を行う。

```
Sgn_r_[k_, n_] := If[Mod[r, n] == k, -1, 1]
```

$$\text{gs}[k\_, n\_, z\_] := \sum_{r=0}^{200} \text{Sgn}_r[k, n]\,\frac{z^r}{r!}$$

$$\text{g}[2, 3, z\_] := \frac{e^z}{3} - \frac{2}{3}\left((-1)^{-4/3} e^{(-1)^{2/3} z} + (-1)^{4/3} e^{(-1)^{-2/3} z}\right)$$

```
N[{gs[2, 3, 1], g[2, 3, 1]}, 10]
```

$\{1.701565508\ , 1.701565508 + 0. \times 10^{-10}\, i\}$

$Sgn_r(k,n)$ は k 次から出発して n 次間隔で符号を反転させる関数である。これを級数の各項に乗じて符号反転級数 $gs(k,n,z)$ を作る。$g(k,n,z)$ はこれに対応する筈の関数である。適当な値 $z=1$ で級数級数値と関数値をそれぞれ計算して、両者が一致していることを確認する。

18・2 3次間隔での符号反転

関数 $f(z)$ が領域 D 上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

公式 18・1・1 より、項 $a_{3r+k}\, z^{3r+k}$ $(k=0,1,2)$ の符号を反転させた関数 $g(k,3,z)$ は、

$$g(k,3,z)=\frac{3-2}{3}f(z)+\frac{2}{3}\left\{\lambda_3(-1)^k f(-z)\right\} \qquad \lambda_3=\left\{1+(-1)^3\right\}/2$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{s=1}^{\lfloor 3/2\rfloor}\left[(-1)^{-\frac{2sk}{3}}f\left\{(-1)^{\frac{2s}{3}}z\right\}+(-1)^{\frac{2sk}{3}}f\left\{(-1)^{-\frac{2s}{3}}z\right\}\right]$$

$k=0,1,2$ 毎に書き下すと

$$g(0,3,z)=\frac{1}{3}f(z)-\frac{2}{3}\left[f\left\{(-1)^{2/3}z\right\}+f\left\{(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$$g(1,3,z)=\frac{1}{3}f(z)-\frac{2}{3}\left[(-1)^{-2/3}f\left\{(-1)^{2/3}z\right\}+(-1)^{2/3}f\left\{(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$$g(2,3,z)=\frac{1}{3}f(z)-\frac{2}{3}\left[(-1)^{-4/3}f\left\{(-1)^{2/3}z\right\}+(-1)^{4/3}f\left\{(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

例 1 指数級数の3次間隔での符号反転

元の級数

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots=e^z$$

符号が反転された級数

$$-1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}++-\cdots=\frac{e^z}{3}-\frac{2}{3}\left\{e^{(-1)^{2/3}z}+e^{(-1)^{-2/3}z}\right\}$$

$$=\frac{e^z}{3}-\frac{4}{3\sqrt{e^z}}\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}$$

$$1-\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-++\cdots=\frac{e^z}{3}-\frac{2}{3}\left\{(-1)^{-2/3}e^{(-1)^{2/3}z}+(-1)^{2/3}e^{(-1)^{-2/3}z}\right\}$$

$$=\frac{e^z}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e^z}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}\right)$$

$$1+\frac{z^1}{1!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+-+\cdots=\frac{e^z}{3}-\frac{2}{3}\left\{(-1)^{-4/3}e^{(-1)^{2/3}z}+(-1)^{4/3}e^{(-1)^{-2/3}z}\right\}$$

$$=\frac{e^z}{3}+\frac{2}{3\sqrt{e^z}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}\,z}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}\,z}{2}\right)$$

特に $z=1$ のとき

$$-1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}++-\cdots=0.38216520\cdots$$

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-++\cdots=0.63455111\cdots$$

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+-+\cdots=1.70156550\cdots$$

例 2 対数級数の3次間隔での符号反転（ $|z|<1,\ z\neq 1$ ）

元の級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\cdots = -\log(1-z)$$

符号が反転された級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+-+\cdots = -\frac{1}{3}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{3}\left[\log\left\{1-(-1)^{2/3}z\right\}+\log\left\{1-(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$$-\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}-\frac{z^7}{7}++-\cdots = -\frac{1}{3}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{3}\left[(-1)^{-2/3}\log\left\{1-(-1)^{2/3}z\right\}+(-1)^{2/3}\log\left\{1-(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$$\frac{z^1}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}-++\cdots = -\frac{1}{3}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{3}\left[(-1)^{-4/3}\log\left\{1-(-1)^{2/3}z\right\}+(-1)^{4/3}\log\left\{1-(-1)^{-2/3}z\right\}\right]$$

$z=1/2$ のとき

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+-+\cdots = \frac{1}{3}\log\frac{49}{8} = 0.60412625\cdots$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}-\frac{1}{7\cdot 2^7}++-\cdots = \frac{1}{3}\left(\log\frac{8}{7}-2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$
$$= -0.34055118\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}-++\cdots = \frac{1}{3}\left(\log\frac{8}{7}+2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$$
$$= 0.42957211\cdots$$

18·3 4次間隔での符号反転

関数 $f(z)$ が領域 D 上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

公式 18·1·1 より、項 $a_{4r+k}\, z^{4r+k}$ $(k=0,1,2,3)$ の符号を反転させた関数 $g(k,4,z)$ は、

$$g(k,4,z) = \frac{4-2}{4} f(z) + \frac{2}{4}\left\{\lambda_4 (-1)^k f(-z)\right\} \qquad \lambda_4 = \left\{1+(-1)^4\right\}/2$$

$$-\frac{2}{4}\sum_{s=1}^{\lfloor 4/2 \rfloor}\left[(-1)^{-\frac{2sk}{4}} f\left\{(-1)^{\frac{2s}{4}} z\right\} + (-1)^{\frac{2sk}{4}} f\left\{(-1)^{-\frac{2s}{4}} z\right\}\right]$$

$k=0,1,2,3$ 毎に書き下すと

$$g(0,4,z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} - \frac{f\left\{(-1)^{2/4} z\right\} + f\left\{(-1)^{-2/4} z\right\}}{2} - \frac{f\left\{(-1)^{4/4} z\right\} + f\left\{(-1)^{-4/4} z\right\}}{2}$$

$$g(1,4,z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2} - \frac{(-1)^{-2/4} f\left\{(-1)^{2/4} z\right\} + (-1)^{2/4} f\left\{(-1)^{-2/4} z\right\}}{2} - \frac{(-1)^{-4/4} f\left\{(-1)^{4/4} z\right\} + (-1)^{4/4} f\left\{(-1)^{-4/4} z\right\}}{2}$$

$$g(2,4,z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2} - \frac{(-1)^{-4/4} f\left\{(-1)^{2/4} z\right\} + (-1)^{4/4} f\left\{(-1)^{-2/4} z\right\}}{2} - \frac{(-1)^{-8/4} f\left\{(-1)^{4/4} z\right\} + (-1)^{8/4} f\left\{(-1)^{-4/4} z\right\}}{2}$$

$$g(3,4,z) = \frac{f(z)-f(-z)}{2} - \frac{(-1)^{-6/4} f\left\{(-1)^{2/4} z\right\} + (-1)^{6/4} f\left\{(-1)^{-2/4} z\right\}}{2} - \frac{(-1)^{-12/4} f\left\{(-1)^{4/4} z\right\} + (-1)^{12/4} f\left\{(-1)^{-4/4} z\right\}}{2}$$

例 1 二項級数の4次間隔での符号反転 ($|z| < 1,\ z \neq 1$)

元の級数

$$1+\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3+\frac{7!!}{8!!}z^4+\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7+\cdots = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

符号が反転された級数

$$-1+\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3-\frac{7!!}{8!!}z^4+\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7-+++\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{1}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)$$

$$1-\frac{1!!}{2!!}z^1+\frac{3!!}{4!!}z^2+\frac{5!!}{6!!}z^3+\frac{7!!}{8!!}z^4-\frac{9!!}{10!!}z^5+\frac{11!!}{12!!}z^6+\frac{13!!}{14!!}z^7+-++\cdots$$

$$
= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-2/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{(-1)^{2/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{(-1)^{4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)
$$

$$
1+\frac{1!!}{2!!}z^{1}-\frac{3!!}{4!!}z^{2}+\frac{5!!}{6!!}z^{3}+\frac{7!!}{8!!}z^{4}+\frac{9!!}{10!!}z^{5}-\frac{11!!}{12!!}z^{6}+\frac{13!!}{14!!}z^{7}++-+\cdots
$$

$$
= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{(-1)^{4/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-8/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{(-1)^{8/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)
$$

$$
1+\frac{1!!}{2!!}z^{1}+\frac{3!!}{4!!}z^{2}-\frac{5!!}{6!!}z^{3}+\frac{7!!}{8!!}z^{4}+\frac{9!!}{10!!}z^{5}+\frac{11!!}{12!!}z^{6}-\frac{13!!}{14!!}z^{7}+++-\cdots
$$

$$
= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{2/4}z}}+\frac{(-1)^{6/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-2/4}z}}\right)
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{-12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{4/4}z}}+\frac{(-1)^{12/4}}{\sqrt{1-(-1)^{-4/4}z}}\right)
$$

$z=1/2$ のとき

$$
-1+\frac{1!!}{2^{1}2!!}+\frac{3!!}{2^{2}4!!}+\frac{5!!}{2^{3}6!!}-\frac{7!!}{2^{4}8!!}+\frac{9!!}{2^{5}10!!}+\frac{11!!}{2^{6}12!!}+\frac{13!!}{2^{7}14!!}-+++\cdots = -0.62158357
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{5}}
$$

$$
1-\frac{1!!}{2^{1}2!!}+\frac{3!!}{2^{2}4!!}+\frac{5!!}{2^{3}6!!}+\frac{7!!}{2^{4}8!!}-\frac{9!!}{2^{5}10!!}+\frac{11!!}{2^{6}12!!}+\frac{13!!}{2^{7}14!!}+-++\cdots = 0.89806817
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{5}}
$$

$$
1+\frac{1!!}{2^{1}2!!}-\frac{3!!}{2^{2}4!!}+\frac{5!!}{2^{3}6!!}+\frac{7!!}{2^{4}8!!}+\frac{9!!}{2^{5}10!!}-\frac{11!!}{2^{6}12!!}+\frac{13!!}{2^{7}14!!}++-+\cdots = 1.21930055
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{5}}
$$

$$
1+\frac{1!!}{2^{1}2!!}+\frac{3!!}{2^{2}4!!}-\frac{5!!}{2^{3}6!!}+\frac{7!!}{2^{4}8!!}+\frac{9!!}{2^{5}10!!}+\frac{11!!}{2^{6}12!!}-\frac{13!!}{2^{7}14!!}+++-\cdots = 1.33264196
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{5}}
$$

例 2 対数級数の4次間隔での符号反転（ $|z| < 1,\ z \neq 1$ ）

元の級数

$$
\frac{z^{1}}{1}+\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{3}+\frac{z^{4}}{4}+\frac{z^{5}}{5}+\frac{z^{6}}{6}+\frac{z^{7}}{7}+\frac{z^{8}}{8}+\cdots = -\log(1-z)
$$

符号が反転された級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^8}{8}+++-\cdots = -\frac{log(1-z)+log(1+z)}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left[log\left\{1-(-1)^{2/4}z\right\}+log\left\{1-(-1)^{-2/4}z\right\}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[log\left\{1-(-1)^{4/4}z\right\}+log\left\{1-(-1)^{-4/4}z\right\}\right]$$
$$= arctan\, z+\frac{log(1-iz)+log(1+iz)}{2}$$

$$-\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}-+++\cdots = -\frac{log(1-z)-log(1+z)}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(-1)^{-2/4}log\left\{1-(-1)^{2/4}z\right\}+(-1)^{2/4}log\left\{1-(-1)^{-2/4}z\right\}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[(-1)^{-4/4}log\left\{1-(-1)^{4/4}z\right\}+(-1)^{4/4}log\left\{1-(-1)^{-4/4}z\right\}\right]$$
$$= -arctan\, z-\frac{log(1-z)+log(1+z)}{2}$$

$$\frac{z^1}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+-++\cdots = -\frac{log(1-z)+log(1+z)}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(-1)^{-4/4}log\left\{1-(-1)^{2/4}z\right\}+(-1)^{4/4}log\left\{1-(-1)^{-2/4}z\right\}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[(-1)^{-8/4}log\left\{1-(-1)^{4/4}z\right\}+(-1)^{8/4}log\left\{1-(-1)^{-4/4}z\right\}\right]$$
$$= arctan\, z-\frac{log(1-iz)+log(1+iz)}{2}$$

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}++-+\cdots = -\frac{log(1-z)-log(1+z)}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(-1)^{-6/4}log\left\{1-(-1)^{2/4}z\right\}+(-1)^{6/4}log\left\{1-(-1)^{-2/4}z\right\}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[(-1)^{-12/4}log\left\{1-(-1)^{4/4}z\right\}+(-1)^{12/4}log\left\{1-(-1)^{-4/4}z\right\}\right]$$
$$= arctan\, z-\frac{log(1-z)+log(1+z)}{2}$$

$z=1/2$ のとき

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}-\frac{1}{8\cdot 2^8}+++-\cdots = \frac{1}{2}log\frac{15}{4} = 0.66087792\cdots$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}-+++\cdots = -arccot\,2+log\,2-\frac{log\,3}{2}$$
$$= -0.31980657\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}+-++\cdots = \frac{1}{2}log\frac{12}{5} = 0.43773436\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{6\cdot 2^6}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{8\cdot 2^8}++-+\cdots = arccot\,2+log\,2-\frac{log\,3}{2}$$
$$= 0.60748864\cdots$$

例 3 指数級数の4次間隔での符号反転

元の級数

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\cdots = e^z$$

符号が反転された級数

ここでは上記公式を用いず、以前の章 16･3･2 で得られた $\cosh z$, $\sinh z$ の2分割級数を用いる。それらは次のようであった。

$$1+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{12}}{12!}+\frac{z^{16}}{16!}+\frac{z^{20}}{20!}+\cdots = \frac{\cosh z+\cos z}{2}$$

$$\frac{z^2}{2!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^{10}}{10!}+\frac{z^{14}}{14!}+\frac{z^{18}}{18!}+\cdots = \frac{\cosh z-\cos z}{2}$$

$$\frac{z^1}{1!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{13}}{13!}+\frac{z^{17}}{17!}+\cdots = \frac{\sinh z+\sin z}{2}$$

$$\frac{z^3}{3!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^{11}}{11!}+\frac{z^{15}}{15!}+\frac{z^{19}}{19!}+\cdots = \frac{\sinh z-\sin z}{2}$$

これらは指数級数の4分割級数である。

そこでこれらを $g(k,4,z)=f(z)-2f(k,4,z)\quad k=0,1,2,3$ に代入すれば、

$$-1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^8}{8!}+++-\cdots = e^z-\cosh z-\cos z$$

$$1-\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}-+++\cdots = e^z-\sinh z-\sin z$$

$$1+\frac{z^1}{1!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+-++\cdots = e^z-\cosh z+\cos z$$

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}++-+\cdots = e^z-\sinh z+\sin z$$

特に $z=1$ のとき

$$-1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}+++-\cdots = 0.63489888\cdots$$

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-+++\cdots = 0.70160965\cdots$$

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+-++\cdots = 1.71550350\cdots$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}++-+\cdots = 2.38455162\cdots$$

18・4 5次間隔での符号反転

関数 $f(z)$ が領域 D 上で次のようにベキ級数に展開されるとする。

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

公式 18・1・1 より、項 $a_{5r+k}\, z^{5r+k}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ の符号を反転させた関数 $g(k,5,z)$ は、

$$g(k,5,z) = \frac{5-2}{5} f(z) + \frac{2}{5}\left\{\lambda_5 (-1)^k f(-z)\right\} \qquad \lambda_5 = \left\{1+(-1)^5\right\}/2$$

$$-\frac{2}{5}\sum_{s=1}^{\lfloor 5/2 \rfloor}\left[(-1)^{-\frac{2sk}{5}} f\left\{(-1)^{\frac{2s}{5}} z\right\} + (-1)^{\frac{2sk}{5}} f\left\{(-1)^{-\frac{2s}{5}} z\right\}\right]$$

$k=0,1,\cdots,4$ 毎に書き下すと

$$g(0,5,z) = \frac{3}{5} f(z) - \frac{2}{5}\left[f\left\{(-1)^{2/5} z\right\} + f\left\{(-1)^{-2/5} z\right\}\right]$$
$$-\frac{2}{5}\left[f\left\{(-1)^{4/5} z\right\} + f\left\{(-1)^{-4/5} z\right\}\right]$$

$$g(1,5,z) = \frac{3}{5} f(z) - \frac{2}{5}\left[(-1)^{-2/5} f\left\{(-1)^{2/5} z\right\} + (-1)^{2/5} f\left\{(-1)^{-2/5} z\right\}\right]$$
$$-\frac{2}{5}\left[(-1)^{-4/5} f\left\{(-1)^{4/5} z\right\} + (-1)^{4/5} f\left\{(-1)^{-4/5} z\right\}\right]$$

$$g(2,5,z) = \frac{3}{5} f(z) - \frac{2}{5}\left[(-1)^{-4/5} f\left\{(-1)^{2/5} z\right\} + (-1)^{4/5} f\left\{(-1)^{-2/5} z\right\}\right]$$
$$-\frac{2}{5}\left[(-1)^{-8/5} f\left\{(-1)^{4/5} z\right\} + (-1)^{8/5} f\left\{(-1)^{-4/5} z\right\}\right]$$

$$g(3,5,z) = \frac{3}{5} f(z) - \frac{2}{5}\left[(-1)^{-6/5} f\left\{(-1)^{2/5} z\right\} + (-1)^{6/5} f\left\{(-1)^{-2/5} z\right\}\right]$$
$$-\frac{2}{5}\left[(-1)^{-12/5} f\left\{(-1)^{4/5} z\right\} + (-1)^{12/5} f\left\{(-1)^{-4/5} z\right\}\right]$$

$$g(4,5,z) = \frac{3}{5} f(z) - \frac{2}{5}\left[(-1)^{-8/5} f\left\{(-1)^{2/5} z\right\} + (-1)^{8/5} f\left\{(-1)^{-2/5} z\right\}\right]$$
$$-\frac{2}{5}\left[(-1)^{-16/5} f\left\{(-1)^{4/5} z\right\} + (-1)^{16/5} f\left\{(-1)^{-4/5} z\right\}\right]$$

例 1 指数級数の5次間隔での符号反転

元の級数

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{10}}{10!}+\cdots = e^z$$

符号が反転された級数

$$-1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{10}}{10!}++++-\cdots = \frac{3}{5}e^z$$
$$-\frac{2}{5}\left\{e^{(-1)^{2/5} z} + e^{(-1)^{-2/5} z}\right\} - \frac{2}{5}\left\{e^{(-1)^{4/5} z} + e^{(-1)^{-4/5} z}\right\}$$

$$1-\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{10}}{10!}-++++\cdots = \frac{3}{5}e^z$$

$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-2/5}e^{(-1)^{2/5}z}+(-1)^{2/5}e^{(-1)^{-2/5}z}\right\}$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-4/5}e^{(-1)^{4/5}z}+(-1)^{4/5}e^{(-1)^{-4/5}z}\right\}$$

$$1+\frac{z^1}{1!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{10}}{10!}+-+++\cdots=\frac{3}{5}e^z$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-4/5}e^{(-1)^{2/5}z}+(-1)^{4/5}e^{(-1)^{-2/5}z}\right\}$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-8/5}e^{(-1)^{4/5}z}+(-1)^{8/5}e^{(-1)^{-4/5}z}\right\}$$

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}-\frac{z^8}{8!}+\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{10}}{10!}++-++\cdots=\frac{3}{5}e^z$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-6/5}e^{(-1)^{2/5}z}+(-1)^{6/5}e^{(-1)^{-2/5}z}\right\}$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-12/5}e^{(-1)^{4/5}z}+(-1)^{12/5}e^{(-1)^{-4/5}z}\right\}$$

$$1+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}-\frac{z^9}{9!}+\frac{z^{10}}{10!}+++-+\cdots=\frac{3}{5}e^z$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-8/5}e^{(-1)^{2/5}z}+(-1)^{8/5}e^{(-1)^{-2/5}z}\right\}$$
$$-\frac{2}{5}\left\{(-1)^{-16/5}e^{(-1)^{4/5}z}+(-1)^{16/5}e^{(-1)^{-4/5}z}\right\}$$

特に$z=1$のとき

$$-1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}++++-\cdots=0.70161461\cdots$$
$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}-++++\cdots=0.71550400\cdots$$
$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+-+++\cdots=1.71788499\cdots$$
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}++-++\cdots=2.38489889\cdots$$
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+++-+\cdots=2.63494298\cdots$$

例２対数級数の5次間隔での符号反転（$|z|<1$, $z\neq 1$）

元の級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{10}}{10}+\cdots=-\log(1-z)$$

符号が反転された級数

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^9}{9}-\frac{z^{10}}{10}++++-\cdots=-\frac{3}{5}\log(1-z)$$
$$+\frac{2}{5}\left[\log\left\{1-(-1)^{2/5}z\right\}+\log\left\{1-(-1)^{-2/5}z\right\}\right]$$

$$+\frac{2}{5}\left[log\left\{1-(-1)^{4/5}z\right\}+log\left\{1-(-1)^{-4/5}z\right\}\right]$$

$$-\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{10}}{10}-++++\cdots=-\frac{3}{5}log(1-z)$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-2/5}log\left\{1-(-1)^{2/5}z\right\}+(-1)^{2/5}log\left\{1-(-1)^{-2/5}z\right\}\right]$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-4/5}log\left\{1-(-1)^{4/5}z\right\}+(-1)^{4/5}log\left\{1-(-1)^{-4/5}z\right\}\right]$$

$$\frac{z^1}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}-\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{10}}{10}+-+++\cdots=-\frac{3}{5}log(1-z)$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-4/5}log\left\{1-(-1)^{2/5}z\right\}+(-1)^{4/5}log\left\{1-(-1)^{-2/5}z\right\}\right]$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-8/5}log\left\{1-(-1)^{4/5}z\right\}+(-1)^{8/5}log\left\{1-(-1)^{-4/5}z\right\}\right]$$

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^8}{8}+\frac{z^9}{9}+\frac{z^{10}}{10}++-++\cdots=-\frac{3}{5}log(1-z)$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-6/5}log\left\{1-(-1)^{2/5}z\right\}+(-1)^{6/5}log\left\{1-(-1)^{-2/5}z\right\}\right]$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-12/5}log\left\{1-(-1)^{4/5}z\right\}+(-1)^{12/5}log\left\{1-(-1)^{-4/5}z\right\}\right]$$

$$\frac{z^1}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^6}{6}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^8}{8}-\frac{z^9}{9}+\frac{z^{10}}{10}+++-+\cdots=-\frac{3}{5}log(1-z)$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-8/5}log\left\{1-(-1)^{2/5}z\right\}+(-1)^{8/5}log\left\{1-(-1)^{-2/5}z\right\}\right]$$
$$+\frac{2}{5}\left[(-1)^{-16/5}log\left\{1-(-1)^{4/5}z\right\}+(-1)^{16/5}log\left\{1-(-1)^{-4/5}z\right\}\right]$$

$z=1/2$ のとき

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}-\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{6\cdot2^6}+\frac{1}{7\cdot2^7}+\frac{1}{8\cdot2^8}+\frac{1}{9\cdot2^9}-\frac{1}{10\cdot2^{10}}++++-\cdots=\frac{2}{5}log\,31-log\,2$$
$$=0.68044770\cdots$$

$$-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}+\frac{1}{5\cdot2^5}-\frac{1}{6\cdot2^6}+\frac{1}{7\cdot2^7}+\frac{1}{8\cdot2^8}+\frac{1}{9\cdot2^9}+\frac{1}{10\cdot2^{10}}-++++\cdots=-0.31215188\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{6\cdot2^6}-\frac{1}{7\cdot2^7}+\frac{1}{8\cdot2^8}+\frac{1}{9\cdot2^9}+\frac{1}{10\cdot2^{10}}+-+++\cdots=0.44087342\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot2^2}-\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{4\cdot2^4}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{6\cdot2^6}+\frac{1}{7\cdot2^7}-\frac{1}{8\cdot2^8}+\frac{1}{9\cdot2^9}+\frac{1}{10\cdot2^{10}}++-++\cdots=0.60881807\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}-\frac{1}{4\cdot2^4}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{6\cdot2^6}+\frac{1}{7\cdot2^7}+\frac{1}{8\cdot2^8}-\frac{1}{9\cdot2^9}+\frac{1}{10\cdot2^{10}}+++-+\cdots=0.66145422\cdots$$

Note

公式中の $(-1)^{m/n}$ $(m,n=1,2,3,\cdots)$ を初等超越関数と根号で表すことは可能である。しかし、5次以上の場合、それは非常にややこしいものになる。

2021.03.23

Kano Kono

宇宙人の数学