19 三角関数の合成公式

余弦関数と正弦関数の1次結合の公式は三角関数の合成公式と呼ばれている。第1節では、これの特殊値を用いて様々な公式を導出する。第2節では、余弦関数や正弦関数の多項式の和を求める。そして第3節では、余弦関数や正弦関数の級数の和を求める。

19･1 基本式とその応用

19･1･1 基本式

公式 19･1･1

(1) 余弦表示

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\Phi) \tag{1.1c}$$

(2) 正弦表示

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\Phi) \tag{1.1s}$$

但し、$\cos\Phi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\Phi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (1.ab)

証明

加法定理より

$$\cos(\theta-\Phi) = \cos\Phi\cos\theta + \sin\Phi\sin\theta$$

ここで、次のように置く。

$$\cos\Phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin\Phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{1.ab}$$

これらを上に代入すれば

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = \cos(\theta-\Phi)$$

これより (1.1c) を得る。 次に、

$$\cos\Phi\sin\theta + \sin\Phi\cos\theta = \sin(\theta+\Phi)$$

これに (1.ab) を代入すれば

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta = \sin(\theta+\Phi)$$

これより (1.1s) を得る。 Q.E.D.

2変数の逆正接関数

公式 19･1･1 において Φ は但し書きの2式より得られる。最近はこれが1式で得られる関数が用意されている。それは $arctan2(a,b)$ と記述されることもあるが、*Mathematica* においてはそれは $ArcTan[a,b]$ と記述されている。この関数は どの象限に点 (a,b) があるかを考慮して b/a の逆正接を与えるもので具体的には次頁のようなものである。

$$
ArcTan[a,b] = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{b}{a} & if\ a>0 \\ \tan^{-1}\dfrac{b}{a}+\pi & if\ a<0\ and\ b\geq 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{b}{a}-\pi & if\ a<0\ and\ b<0 \\ +\dfrac{\pi}{2} & if\ a=0\ and\ b>0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & if\ a=0\ and\ b<0 \\ undefined & if\ a=0\ and\ b=0 \end{cases}
$$

この関数を用いて 公式 19•1•1 を書き直せば次のようになる。

公式 19•1•1’

(1) 余弦表示

$$a \cos\theta + b \sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \Phi) \tag{1.1'c}$$

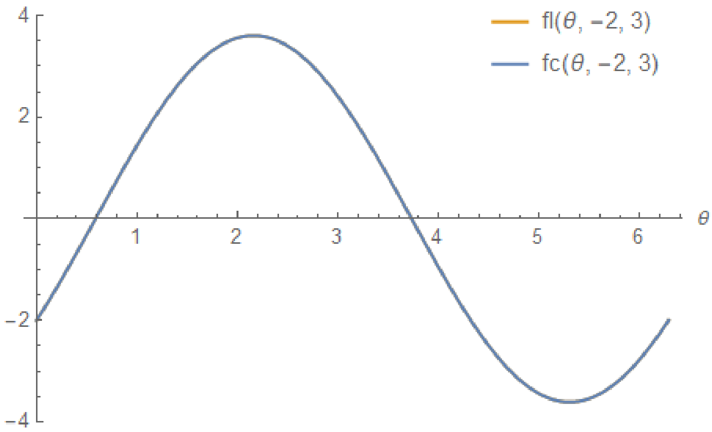
(2) 正弦表示

$$a \sin\theta + b \cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta + \Phi) \tag{1.1's}$$

但し、$\Phi = ArcTan[a,b]$

例　余弦表示

(1.1’c) の左辺を fl 右辺を fc としてこれらを2D図に描けば次のとおり。橙が左辺で青が右辺であるが両辺はぴったり重なっていて、橙(左辺)は見えない。



公式 19•1•1 において特に $a = 1$, $b = \pm 1$ と置けば次が得られる。

特殊値

$$\cos\theta \pm \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta \mp \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.0c}$$

$$\sin\theta \pm \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.0s}$$

これらの特殊値を用いて、余弦と正弦の和積公式が得られる。

19･1･2 余弦と正弦の和積公式

公式 19･1･2

(1) 余弦表示

$$\cos(A+B)+\sin(A-B)=2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \tag{c+s.c}$$

$$\cos(A+B)-\sin(A-B)=2\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \tag{c−s.c}$$

$$\sin(A+B)+\cos(A-B)=2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \tag{s+c.c}$$

$$\sin(A+B)-\cos(A-B)=-2\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \tag{s−c.c}$$

(2) 正弦表示

$$\cos(A+B)+\sin(A-B)=-2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \tag{c+s.s}$$

$$\cos(A+B)-\sin(A-B)=-2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \tag{c−s.s}$$

$$\sin(A+B)+\cos(A-B)=2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \tag{s+c.s}$$

$$\sin(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \tag{−c.s}$$

証明

$$\begin{aligned}\cos(A+B)+\sin(A-B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B\\&=\cos A(\cos B-\sin B)+\sin A(\cos B-\sin B)\end{aligned}$$

i.e.

$$\cos(A+B)+\sin(A-B)=(\cos A+\sin A)(\cos B-\sin B) \tag{1.2c}$$

右辺の各項にそれぞれ (1.0c) を適用すれば

$$\cos(A+B)+\sin(A-B)=2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \tag{c+s.c}$$

B を $-B$ に置換すれば

$$\cos(A-B)+\sin(A+B)=2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-B+\frac{\pi}{4}\right)$$

i.e.

$$\sin(A+B)+\cos(A-B)=2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \tag{s+c.c}$$

(1.2c) に (1.0s) を適用すれば

$$\cos(A+B)+\sin(A-B)=-2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \tag{c+s.s}$$

B を $-B$ に置換すれば

$$cos(A-B) + sin(A+B) = -2\,sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)sin\left(-B-\frac{\pi}{4}\right)$$

i.e.

$$sin(A+B) + cos(A-B) = 2\,sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(s+c.s)}$$

次に、

$$\begin{aligned} cos(A+B) - sin(A-B) &= cosA\,cosB - sinA\,sinB - sinA\,cosB + cosA\,sinB \\ &= cosA(cosB+sinB) - sinA(cosB+sinB) \end{aligned}$$

i.e.

$$cos(A+B) - sin(A-B) = (cosA - sinA)(cosB + sinB) \qquad \text{(1.2s)}$$

右辺の各項にそれぞれ (1.0c) を適用すれば

$$cos(A+B) - sin(A-B) = 2\,cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(c−s.c)}$$

B を $-B$ に置換すれば

$$sin(A+B) - cos(A-B) = -2\,cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(s−c.c)}$$

(1.2s) に (1.0s) を適用すれば

$$cos(A+B) - sin(A-B) = -2\,sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(c−s.s)}$$

B を $-B$ に置換すれば

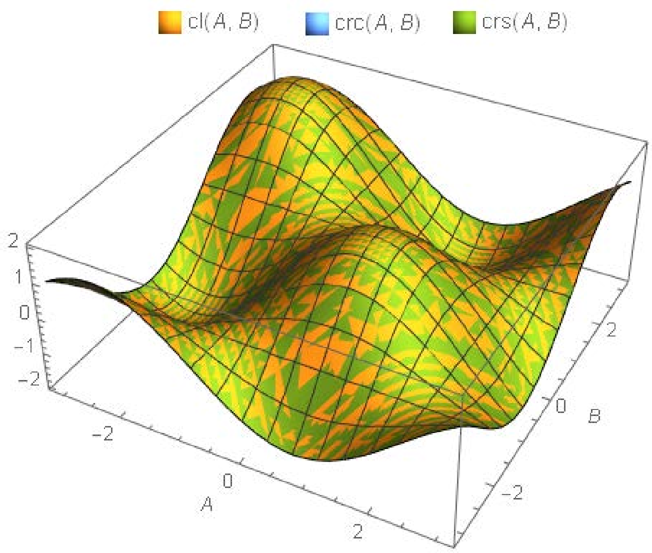
$$sin(A+B) - cos(A-B) = -2\,sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(s−c.s)}$$

Q.E.D.

例

$$cos(A+B) + sin(A-B) = 2\,cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)cos\left(B+\frac{\pi}{4}\right) = -2\,sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$$

これらの3D図を重ねて描くと次頁のようになる。左辺が cl 、中辺が crc 、右辺が crs である。
3者はぴったり重なって斑に見えている。



Note

知ってしまえば簡単である。例えば

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

において A, B をそれぞれ $A-\pi/4$, $B-\pi/4$ に置換すれば

$$2\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(A-B)=\sin(A+B)+\cos(A-B)$$

(s+c.c)

何故 これがどの公式集にも見られないのか、不思議である。

19・2 漸化式

本節では、三角関数の2項和の計算を逐次繰り返して n 項和を求める。

公式 19・2・1

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos(\theta \pm \phi) = A_2 \cos(\theta \pm \Phi) \tag{2.1c}$$

$$a_1 \sin\theta + a_2 \sin(\theta \pm \phi) = A_2 \sin(\theta \pm \Phi) \tag{2.1s}$$

但し

$$A_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\phi}$$

$$\Phi = ArcTan[a_1 + a_2 \cos\phi\ , a_2 \sin\phi]$$

証明

加法定理より

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\phi \cos\theta + \sin\phi \sin\theta$$

これを (2.1c) の左辺に代入すれば

$$\begin{aligned} a_1 \cos\theta + a_2 \cos(\theta - \phi) &= a_1 \cos\theta + a_2 (\cos\phi \cos\theta + \sin\phi \sin\theta) \\ &= a_1 \cos\theta + a_2 \cos\phi \cos\theta + a_2 \sin\phi \sin\theta \\ &= (a_1 + a_2 \cos\phi) \cos\theta + (a_2 \sin\phi) \sin\theta \end{aligned}$$

ここで $a_1' = a_1 + a_2 \cos\phi$, $a_2' = a_2 \sin\phi$ と置けば

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos(\theta - \phi) = a_1' \cos\theta + a_2' \sin\theta$$

これに 公式 19・1・1' (1.1'c) を適用すれば、

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos(\theta - \phi) = a_1' \cos\theta + a_2' \sin\theta = A \cos(\theta - \Phi) \tag{2.1c−}$$

$$A = \sqrt{(a_1 + a_2 \cos\phi)^2 + (a_2 \sin\phi)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\phi}$$

$$\Phi = ArcTan[a_1 + a_2 \cos\phi\ , a_2 \sin\phi]$$

次に ϕ を $-\phi$ に置換すれば

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\phi}$$

$$-\Phi = ArcTan[a_1 + a_2 \cos\phi\ , a_2 \sin\phi]$$

Φ を $-\Phi$ に置換して

$$a_1 \cos\theta + a_2 \cos(\theta + \phi) = A \cos(\theta + \Phi) \tag{2.1c+}$$

(2.1c−) , (2.1c+) 併せて (2.1c) を得る。

加法定理より

$$\sin(\theta + \phi) = \cos\phi \sin\theta + \sin\phi \cos\theta$$

これを (2.1s) の左辺に代入すれば

$$\begin{aligned} a_1 \sin\theta + a_2 \sin(\theta + \phi) &= a_1 \sin\theta + a_2 (\cos\phi \sin\theta + \sin\phi \cos\theta) \\ &= a_1 \sin\theta + a_2 \cos\phi \sin\theta + a_2 \sin\phi \cos\theta \\ &= (a_1 + a_2 \cos\phi) \sin\theta + (a_2 \sin\phi) \cos\theta \end{aligned}$$

ここで $a_1' = a_1 + a_2 \cos\phi$, $a_2' = a_2 \sin\phi$ と置けば

$$a_1 \sin\theta + a_2 \sin(\theta + \phi) = a_1' \sin\theta + a_2' \cos\theta$$

これに 公式 19･1･1’ (1.1’s) を適用すれば、

$$a_1 \sin\theta + a_2 \sin(\theta+\phi) = a_1' \sin\theta + a_2' \cos\theta = A \sin(\theta+\Phi) \qquad (2.1s+)$$

$$A = \sqrt{(a_1 + a_2 \cos\phi)^2+(a_2 \sin\phi)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\phi}$$

$$\Phi = ArcTan[a_1 + a_2 \cos\phi , a_2 \sin\phi]$$

(2.1s+) において ϕ を $-\phi$ に置換すれば

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(-\phi)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\phi}$$

$$-\Phi = ArcTan[a_1 + a_2 \cos\phi , a_2 \sin\phi]$$

Φ を $-\Phi$ に置換して

$$a_1 \sin\theta + a_2 \sin(\theta-\phi) = A \sin(\theta-\Phi) \qquad (2.1s-)$$

(2.1s+) , (2.1s−) 併せて (2.1s) を得る。 Q.E.D.

公式 19･2･2

$$a_1 \cos(\theta+\phi_1) + a_2 \cos(\theta+\phi_2) = A_2 \cos\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\}$$

$$a_1 \sin(\theta+\phi_1) + a_2 \sin(\theta+\phi_2) = A_2 \sin\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\}$$

但し

$$A_2 = \sqrt{a_2^2 + a_1^2 + 2a_2 a_1 \cos(\phi_1-\phi_2)}$$

$$\Phi_2 = ArcTan[a_2 + a_1 \cos(\phi_1-\phi_2) , a_1 \sin(\phi_1-\phi_2)]$$

証明

$$a_1 \cos(\theta+\phi_1) + a_2 \cos(\theta+\phi_2) = a_2 \cos(\theta+\phi_2) + a_1 \cos\{(\theta+\phi_2)+(\phi_1-\phi_2)\}$$

$$a_1 \sin(\theta+\phi_1) + a_2 \sin(\theta+\phi_2) = a_2 \sin(\theta+\phi_2) + a_1 \sin\{(\theta+\phi_2)+(\phi_1-\phi_2)\}$$

公式 19･2･1 を適用すれば

$$a_2 \cos(\theta+\phi_2) + a_1 \cos\{(\theta+\phi_2)+(\phi_1-\phi_2)\} = A_2 \cos\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\}$$

$$a_2 \sin(\theta+\phi_2) + a_1 \sin\{(\theta+\phi_2)+(\phi_1-\phi_2)\} = A_2 \sin\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\}$$

$$A_2 = \sqrt{a_2^2 + a_1^2 + 2a_2 a_1 \cos(\phi_1-\phi_2)}$$

$$\Phi_2 = ArcTan[a_2 + a_1 \cos(\phi_1-\phi_2) , a_1 \sin(\phi_1-\phi_2)]$$

例1 $\boldsymbol{\theta = 0 \ , \ a_r(x) = (-1)^{r-1} r^{-x} , \ \phi_r(y) = y \log r \quad (r = 1, 2)}$

$$1^{-x}\cos(y\log 1) - 2^{-x}\cos(y\log 2) = A_2(x,y)\cos(y\log 2+\Phi_2(x,y)) \qquad (2c)$$

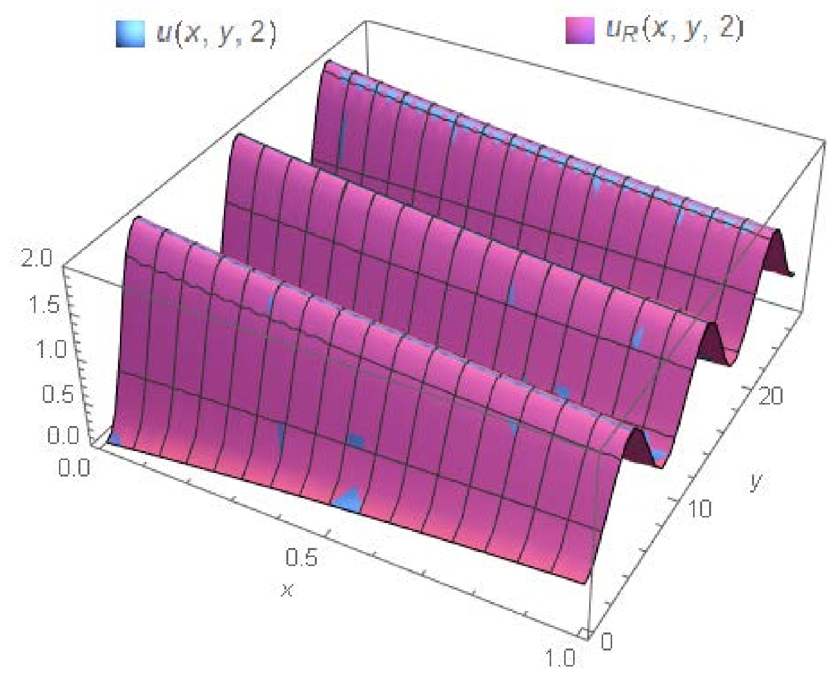
$$1^{-x}\sin(y\log 1) - 2^{-x}\sin(y\log 2) = A_2(x,y)\sin(y\log 2+\Phi_2(x,y)) \qquad (2s)$$

但し

$$A_2(x,y) = \sqrt{2^{-2x}+1^{-2x} - 2\cdot 2^{-x} 1^{-x} \cos(y\log 1-y\log 2)}$$

$$\Phi_2(x,y) = ArcTan[-2^{-x} + 1^{-x}\cos(y\log 1-y\log 2) , 1^{-x}\sin(y\log 1-y\log 2)]$$

(2c) の両辺の3D図は次のとおり。青色が左辺 $u(x,y)$ で小豆色が右辺 $u_R(x,y)$ である。両者はぴったり重なっていて前者は殆ど見えない。



公式 19･2･3

$$a_1 cos(\theta+\phi_1)+a_2 cos(\theta+\phi_2)+a_3 cos(\theta+\phi_3) = A_3 cos\{(\theta+\phi_3)+\Phi_3\}$$

$$a_1 sin(\theta+\phi_1)+a_2 sin(\theta+\phi_2)+a_3 sin(\theta+\phi_3) = A_3 sin\{(\theta+\phi_3)+\Phi_3\}$$

但し

$$A_1 = a_1$$

$$\Phi_1 = 0$$

$$A_3 = \sqrt{a_3^2+A_2^2+2a_3A_2 cos(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)}$$

$$\Phi_3 = ArcTan[a_3+A_2 cos(\phi_2-\phi_3+\Phi_2), A_2 sin(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)]$$

証明

$$a_1 cos(\theta+\phi_1) + a_2 cos(\theta+\phi_2) + a_3 cos(\theta+\phi_3)$$

$$= A_2 cos\{(\theta+\phi_2)+\Phi_2\} + a_3 cos(\theta+\phi_3)$$

$$= a_3 cos(\theta+\phi_3) + A_2 cos\{(\theta+\phi_3)+(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)\}$$

$$a_1 sin(\theta+\phi_1) + a_2 sin(\theta+\phi_2) + a_3 sin(\theta+\phi_3)$$

$$= a_3 sin(\theta+\phi_3) + A_2 sin\{(\theta+\phi_3)+(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)\}$$

公式 19･2･1 を適用すれば

$$a_3 cos(\theta+\phi_3) + A_2 cos\{(\theta+\phi_3)+(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)\} = A_3 cos\{(\theta+\phi_3)+\Phi_3\}$$

$$a_3 sin(\theta+\phi_3) + A_2 sin\{(\theta+\phi_3)+(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)\} = A_3 sin\{(\theta+\phi_3)+\Phi_3\}$$

$$A_3 = \sqrt{a_3^2+A_2^2+2a_3A_2 cos(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)}$$

$$\Phi_3 = ArcTan[a_3+A_2 cos(\phi_2-\phi_3+\Phi_2), A_2 sin(\phi_2-\phi_3+\Phi_2)]$$

例2　$\theta=0$, $a_r(x)=(-1)^{r-1}r^{-x}$, $\phi_r(y)=y\log r$ 　($r=1,2,3$)

$$1^{-x}\cos(y\log 1)-2^{-x}\cos(y\log 2)+3^{-x}\cos(y\log 3)=A_3(x,y)\cos(y\log 3+\Phi_3(x,y)) \quad (3c)$$

$$1^{-x}\sin(y\log 1)-2^{-x}\sin(y\log 2)+3^{-x}\sin(y\log 3)=A_3(x,y)\sin(y\log 3+\Phi_3(x,y)) \quad (3s)$$

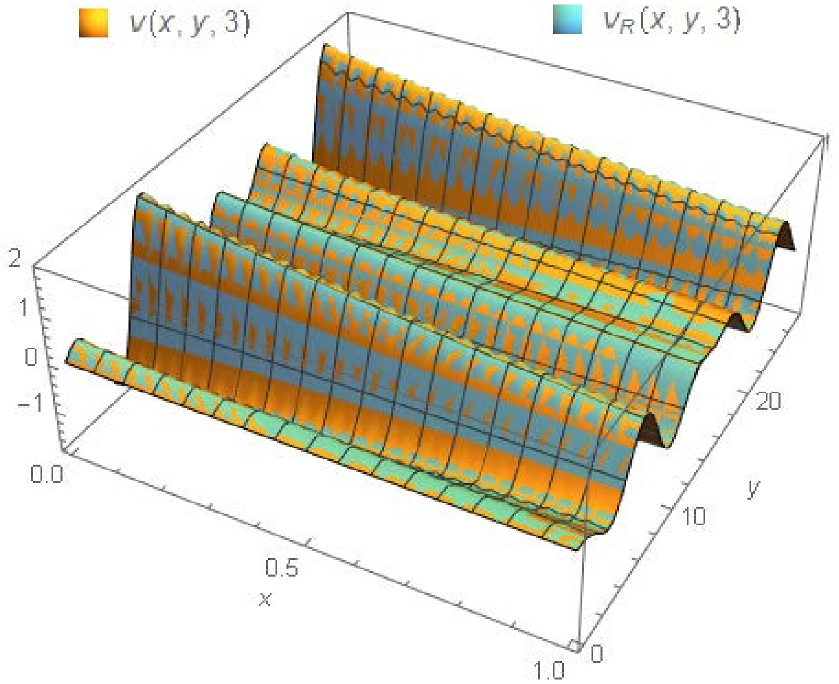
但し

$$A_1(x,y)=a_1(x) \quad , \quad \Phi_1(x,y)=0$$

$$A_3(x,y)=\sqrt{3^{-2x}+A_2(x,y)^2+2\cdot 3^{-x}A_2(x,y)\cos\{y\log 2-y\log 3+\Phi_2(x,y)\}}$$

$$\Phi_3(x,y)=ArcTan[\,3^{-x}+A_2(x,y)\cos\{y\log 2-y\log 3+\Phi_2(x,y)\}\,,\; A_2(x,y)\sin\{y\log 2-y\log 3+\Phi_2(x,y)\}\,]$$

(3s) の両辺の3D図は次のとおり。橙色が左辺 $v(x,y)$ でシアンが右辺 $v_R(x,y)$ である。両者はぴったり重なっていて斑に見えている。。



かくて帰納法により、次の一般的な公式が得られる。

公式 19•2•n

$$\sum_{r=1}^{n} a_r\cos(\theta+\phi_r)=A_n\cos\{(\theta+\phi_n)+\Phi_n\}$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r\sin(\theta+\phi_r)=A_n\sin\{(\theta+\phi_n)+\Phi_n\}$$

但し

$$A_1=a_1$$

$$\Phi_1=0$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+A_{n-1}^2+2a_nA_{n-1}\cos(\phi_{n-1}-\phi_n+\Phi_{n-1})}$$

$$\Phi_n=ArcTan[\,a_n+A_{n-1}\cos(\phi_{n-1}-\phi_n+\Phi_{n-1})\,,\,A_{n-1}\sin(\phi_{n-1}-\phi_n+\Phi_{n-1})\,]$$

例3　$\theta = 0$, $a_r(x) = (-1)^{r-1} r^{-x}$, $\phi_r(y) = y \log r$ 　($r = 1, 2, \cdots, 6$)

$$\sum_{r=1}^{6} (-1)^{r-1} r^{-x} \cos(y \log r) = A_6(x,y) \cos(y \log 6 + \Phi_6(x,y)) \tag{6c}$$

$$\sum_{r=1}^{6} (-1)^{r-1} r^{-x} \sin(y \log r) = A_6(x,y) \sin(y \log 6 + \Phi_6(x,y)) \tag{6s}$$

(6c) の両辺の3D図を描くための数式処理ソフト*Mathematica* によるソース・コードとその結果を示す。左右はぴったり重なっていて斑に見えている。

a_r & ϕ_r

```
a_r_[x_] := (-1)^(r-1) r^-x        φ_r_[y_] := y Log[r]
```

u & v (Left hand side)

```
u[x_, y_, n_] := Sum[a_r[x] Cos[φ_r[y]], {r, 1, n}]      v[x_, y_, n_] := Sum[a_r[x] Sin[φ_r[y]], {r, 1, n}]
```

A_n & Φ_n (Recurrence formula)

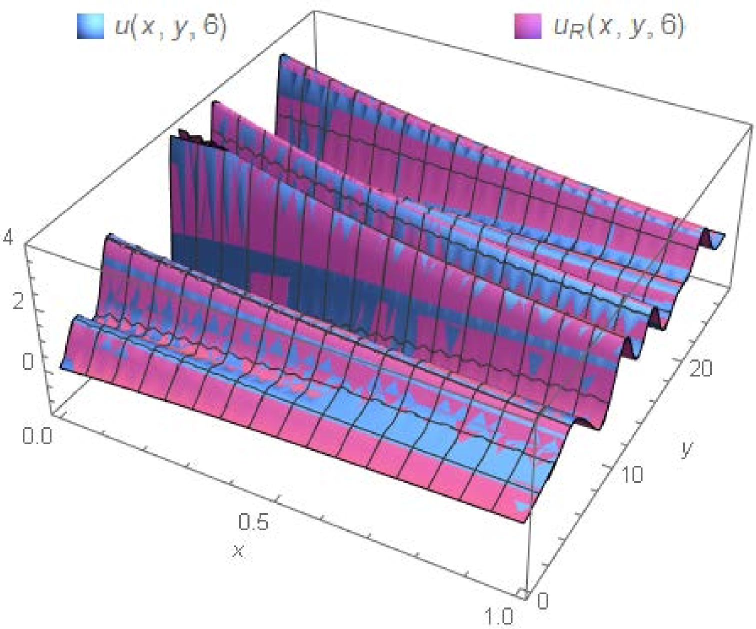
```
A_n_[x_, y_] :=
 If[n == 1, a_1[x], Sqrt[a_n[x]^2 + A_(n-1)[x, y]^2 + 2 a_n[x] A_(n-1)[x, y] Cos[φ_(n-1)[y] - φ_n[y] + Φ_(n-1)[x, y]]]]

Φ_n_[x_, y_] := If[n == 1, 0, ArcTan[a_n[x] + A_(n-1)[x, y] Cos[φ_(n-1)[y] - φ_n[y] + Φ_(n-1)[x, y]],
                                   A_(n-1)[x, y] Sin[φ_(n-1)[y] - φ_n[y] + Φ_(n-1)[x, y]]]]
```

u_R & v_R (Right hand side)

```
u_R[x_, y_, n_] := A_n[x, y] Cos[φ_n[y] + Φ_n[x, y]]
v_R[x_, y_, n_] := A_n[x, y] Sin[φ_n[y] + Φ_n[x, y]]
```

n = 6 (drawing)

```
dummy[x_, y_] := -10
Plot3D[{dummy[x, y], u[x, y, 6], u_R[x, y, 6]}, {x, 0, 1}, {y, 0, 27.3},
 AxesLabel → Automatic, PlotLegends → "Expressions", ClippingStyle → None,
 PlotStyle → {, , ColorData[96, 4]}, PlotRange → {-1.5, 4}]
```



公式 19･2･n の長所と短所

公式 19･2･n は漸化式で表されており、コンピュータには適している。 実は、例1と例2の図も例3のソースコードにおいて n=2 , n=3 と置いて描かれたものである。

しかしながら、3項以上の場合 A_n , Φ_n の陽表的な(a_r ϕ_r のみによる)表現は大変煩雑になる。例えば、

$$\Phi_3[x, y]$$

$$\text{ArcTan}\Big[3^{-x} + \sqrt{1 + 2^{-2x} - 2^{1-x}\,\text{Cos}[y\,\text{Log}[2]]} \times \text{Cos}\Big[\text{ArcTan}\big[-2^{-x} + \text{Cos}[y\,\text{Log}[2]],\ -\text{Sin}[y\,\text{Log}[2]]\big] + y\,\text{Log}[2] - y\,\text{Log}[3]\Big],$$
$$\sqrt{1 + 2^{-2x} - 2^{1-x}\,\text{Cos}[y\,\text{Log}[2]]} \times \text{Sin}\Big[\text{ArcTan}\big[-2^{-x} + \text{Cos}[y\,\text{Log}[2]],\ -\text{Sin}[y\,\text{Log}[2]]\big] + y\,\text{Log}[2] - y\,\text{Log}[3]\Big]\Big]$$

4項以上の場合、 A_n , Φ_n の陽表的な表現は絶望的である。

19･3 陽表式

本節では三角多項式のより簡明な表現を求め、これを拡張して三角級数の公式を得る。

19･3･1 2項の陽表的な和

公式 19･3･1

$$a_1 \cos(\theta+\phi_1) + a_2 \cos(\theta+\phi_2) = A\cos(\theta+\Phi) \tag{3.1c}$$

$$a_1 \sin(\theta+\phi_1) + a_2 \sin(\theta+\phi_2) = A\sin(\theta+\Phi) \tag{3.1s}$$

但し

$$A = \sqrt{(a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)^2 + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)^2}$$

$$\Phi = ArcTan[a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2 \,, a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2]$$

証明

(3.1s) の左辺を加法定理で展開すると

$$a_1 \sin(\theta+\phi_1) + a_2 \sin(\theta+\phi_2)$$

$$= a_1(\sin\theta\cos\phi_1 + \cos\theta\sin\phi_1) + a_2(\sin\theta\cos\phi_2 + \cos\theta\sin\phi_2)$$

$$= (a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)\sin\theta + (a_1\sin\phi_1 + a_2\cos\phi_2)\cos\theta$$

ここで

$$a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2 = \alpha \quad , \quad a_1\sin\phi_1 + a_2\cos\phi_2 = \beta$$

と置けば、(3.1s) は

$$\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta = A\sin(\theta+\Phi)$$

これに 公式 19･1･1' (1.1's) を適用すれば、

$$A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad , \quad \Phi = ArcTan[\alpha,\beta]$$

α,β を元の記号に戻せば

$$A = \sqrt{(a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)^2 + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)^2}$$

$$\Phi = ArcTan[a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2 \,, a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2]$$

次に (3.1s) において θ を $\theta+\pi/2$ に置換すれば

$$a_1 \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\phi_1\right) + a_2 \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\phi_2\right) = A\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\Phi\right)$$

これは (3.1c) に等しい。　　　Q.E.D.

19･3･2 三角多項式

公式 19･3･1 で注目すべきは絶対値 A と偏角 Φ の陽表的な形である。 これらを観察すれば、n 項の和ならばどのような形になるかが容易に推量できる。実際、次が成立する。

公式 19･3･2

$$c(\theta) = \sum_{r=1}^{n} a_r \cos(\theta+\phi_r) = A\cos(\theta+\Phi) \tag{3.2c}$$

$$s(\theta) = \sum_{r=1}^{n} a_r \sin(\theta+\phi_r) = A\sin(\theta+\Phi) \tag{3.2s}$$

但し

$$A=\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\right)^2+\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right)^2}\qquad\left(=\sqrt{c^2(0)+s^2(0)}\right)$$

$$\Phi=ArcTan\left[\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\ ,\ \sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right]\qquad\left(=ArcTan[c(0),s(0)]\right)$$

証明

公式 19･3･1 の証明方法も可能であるが、ここでは恒等式を用いたより簡単な方法を採用する
次のように置く。

$$c(\theta)=\sum_{r=1}^{n}a_r\cos(\theta+\phi_r)\quad,\quad s(\theta)=\sum_{r=1}^{n}a_r\sin(\theta+\phi_r)$$

$$f(\theta)=c(\theta)+i\,s(\theta)$$

これらより

$$f(\theta)=\sqrt{c^2(\theta)+s^2(\theta)}\left\{\frac{c(\theta)}{\sqrt{c^2(\theta)+s^2(\theta)}}+i\frac{s(\theta)}{\sqrt{c^2(\theta)+s^2(\theta)}}\right\}$$

これが極形式で次のように表示されるとする。

$$f(\theta)=A\{\cos(\theta+\Phi)+i\sin(\theta+\Phi)\}$$

$$A=\sqrt{c^2(\theta)+s^2(\theta)}$$

$$\theta+\Phi=ArcTan[c(\theta)\ ,s(\theta)]$$

c,s を元の記号に戻すと

$$A=\sqrt{\left\{\sum_{r=1}^{n}a_r\cos(\theta+\phi_r)\right\}^2+\left\{\sum_{r=1}^{n}a_r\sin(\theta+\phi_r)\right\}^2}\tag{a}$$

$$\theta+\Phi=ArcTan\left[\sum_{r=1}^{n}a_r\cos(\theta+\phi_r)\ ,\ \sum_{r=1}^{n}a_r\sin(\theta+\phi_r)\right]\tag{t}$$

ここで

$$\left\{\sum_{r=1}^{n}a_r\cos(\theta+\phi_r)\right\}^2+\left\{\sum_{r=1}^{n}a_r\sin(\theta+\phi_r)\right\}^2$$

$$=\sum_{r=1}^{n}a_r^2+2\sum_{r\neq s}a_ra_s\{\cos(\theta+\phi_r)\cos(\theta+\phi_s)+\sin(\theta+\phi_r)\sin(\theta+\phi_s)\}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}a_r^2+2\sum_{r\neq s}a_ra_s\cos\{(\theta+\phi_r)-(\theta+\phi_s)\}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}a_r^2+2\sum_{r\neq s}a_ra_s\cos(\phi_r-\phi_s)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}a_r^2+2\sum_{r\neq s}a_ra_s(\cos\phi_r\cos\phi_s+\sin\phi_r\sin\phi_s)$$

$$=\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\right)^2+\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right)^2$$

これを (a) に代入して

$$A=\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\right)^2+\left(\sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right)^2}\qquad\left(=\sqrt{c^2(0)+s^2(0)}\right)$$

また、(t) に $\theta=0$ を代入して

$$\Phi=ArcTan\left[\sum_{r=1}^{n}a_r\cos\phi_r\ ,\ \sum_{r=1}^{n}a_r\sin\phi_r\right]\qquad\left(=ArcTan[c(0),s(0)]\right)$$

を得る。

例 $a_r(x)=(-1)^{r-1}r^{-x}$, $\phi_r(y)=y\log r$, $r=1\sim100$

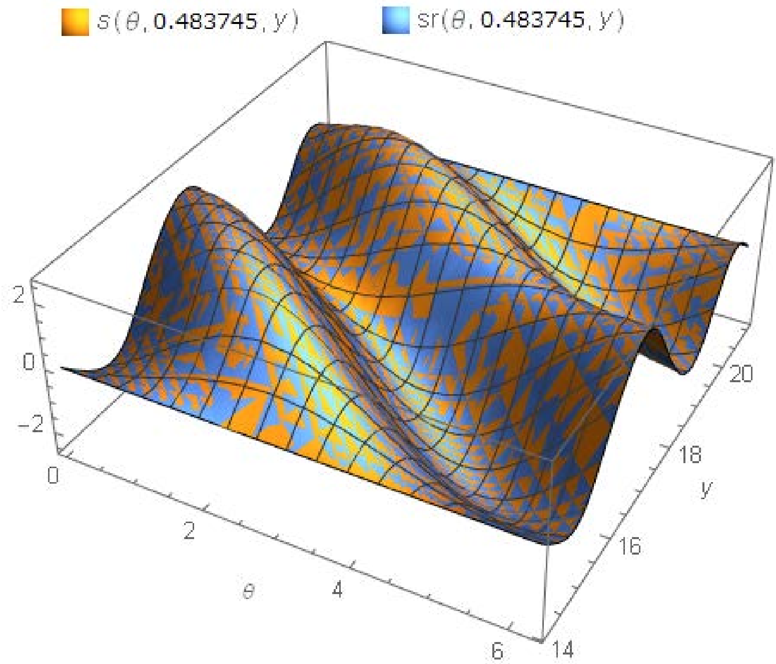
$$s(\theta,x,y)=\sum_{r=1}^{100}\frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\sin(\theta+y\log r)=A(x,y)\sin\{\theta+\Phi(x,y)\}\qquad(3.2sx)$$

但し

$$A(x,y)=\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{100}\frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\cos(y\log r)\right)^2+\left(\sum_{r=1}^{100}\frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\sin(y\log r)\right)^2}$$

$$\Phi(x,y)=ArcTan\left[\sum_{r=1}^{100}\frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\cos(y\log r)\ ,\ \sum_{r=1}^{100}\frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\sin(y\log r)\right]$$

$x=0.483745\cdots$ のとき (3.2sx) の両辺を3D図に描くと次のようになる。橙が左辺で青が右辺である。斑模様は両辺が重なっていることを示している。



y の開始線は $y=14.111606\cdots$ であるが 、この線上では θ の値に関わらず (3.2sx) の両辺はゼロである。これは $x=0.483745\cdots$, $y=14.111606\cdots$ が A の零点であるからである。
当然、この線上で Φ は不定である。 $x=0.48$, $y=14.11$ のときは $A=0.00734\cdots$, $\Phi=2.87029\cdots$ となる。

19･3･3 三角級数

公式 19･3･2 で注目すべきはその証明方法である。これを観察すれば、$\sum$ の上限が∞であっても何ら問題がないことが分かる。かくて次が成立する。

公式 19･3･3

$$c(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos(\theta+\phi_r) = A\cos(\theta+\Phi) \tag{3.3c}$$

$$s(\theta) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin(\theta+\phi_r) = A\sin(\theta+\Phi) \tag{3.3s}$$

但し

$$A = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r\cos\phi_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r\sin\phi_r\right)^2} \qquad \left(= \sqrt{c^2(0)+s^2(0)}\right)$$

$$\Phi = ArcTan\left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r\cos\phi_r\ ,\ \sum_{r=1}^{\infty} a_r\sin\phi_r\right] \qquad (= ArcTan[c(0), s(0)])$$

Note

絶対値 A の $\sqrt{\ }$ の中は一般的には $\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} a_r a_s \cos(\phi_r - \phi_s)$ と記述されているが、二重級数は計算に時間が掛かるので本章では採用しない。

例 $\boldsymbol{a_r(x) = (-1)^{r-1} r^{-x}\ ,\ \ \phi_r(y) = y\log r\ ,\ \ r = 1 \sim \infty}$

$$c(\theta,x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\cos(\theta+y\log r) = A(x,y)\cos\{\theta+\Phi(x,y)\} \quad \{= cr(\theta,x,y)\}$$

$$s(\theta,x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\sin(\theta+y\log r) = A(x,y)\sin\{\theta+\Phi(x,y)\} \quad \{= sr(\theta,x,y)\}$$

但し、

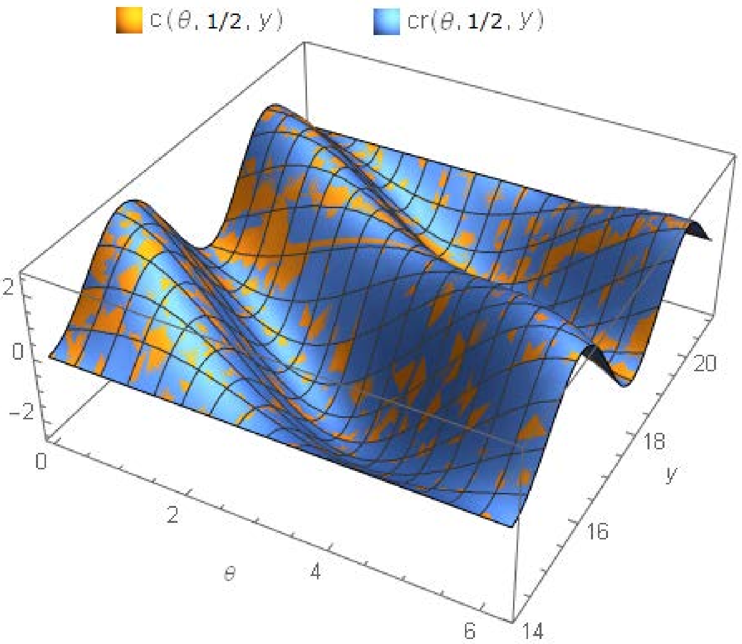
$$A(x,y) = \sqrt{\{c(0,x,y)\}^2 + \{s(0,x,y)\}^2}$$

$$\Phi(x,y) = ArcTan[c(0,x,y), s(0,x,y)]$$

$c(\theta,x,y)$, $cr(\theta,x,y)$ を図示するが、これらの級数は収束が遅くて正確な図を描き得難い。そこで、$c(\theta,x,y)$, $s(\theta,x,y)$ に次のようようなオイラー変換を施す。

$$c(\theta,x,y) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{(-1)^r}{r^x}\cos(\theta+y\log r)$$

$x = 1/2$ のとき $c(\theta,x,y)$, $cr(\theta,x,y)$ を3D図に描くと次頁のようになる。橙が左辺で青が右辺である。斑模様は両者が重なっていることを示している。



y の開始線は y=14.132745… であるが 、この線上では θ の値に関わらず両辺はゼロである。これは x=1/2 , y=14.132745… が A の零点であるからである。当然、この線上で Φ は不定である。

2021.06.26
2022.12.25 Updated

河野 和
広島市

宇宙人の数学