20 ガンマ関数の実部虚部別級数展開

本章では、ガンマ関数を実部虚部別にテイラー級数、ローラン級数およびマクローリン級数に展開する。

使用する公式

1. 「 12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」の 公式12･1･1、12･1･2、12･2･1、12･2･2。
2. 「 14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」の 公式 14･1･2。これを再掲すると次のとおり。

公式 14･1･2 (再掲)

複素関数 $f(z)$ $(z=x+iy)$ が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。但し、$0^0=1$ とする。

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

20･1 ガンマ関数とその逆数の実部虚部別テイラー展開

公式 20･1･1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1,f_2,\ldots)$ を Bell 多項式、$z=x+iy$、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a\ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次が成立する。

$$\Gamma(z)=\Gamma(a)+\sum_{s=1}^{\infty} c_s(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

収束半径は a から直近の特異点までの距離。

$$u(x,y)=\Gamma(a)+\sum_{s=1}^{\infty} c_s(a)\frac{(x-a)^s}{s!}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$|z-a|\le$ ◇

但し

$$c_n(a)=\Gamma(a)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(a),\psi_1(a),\ldots,\psi_{n-1}(a)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0=1$$

証明

公式12･1･1 によれば、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1,f_2,\ldots)$ を Bell 多項式とするとき、$a\ne 0,-1,-2,-3,\cdots$ について次式が成立する。

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a) \frac{(z-a)^s}{s!} \tag{1.1}$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a) \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \dots, \psi_{n-1}(a) \right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

(1.1) の s の初期値を 0 に変更すれば

$$\Gamma(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(a) \frac{(z-a)^s}{s!} \qquad \begin{cases} c_s(a) = \Gamma(a) & s=0 \\ c_s(a) = c_s(a) & s>0 \end{cases}$$

ここで $z = x + iy$ として右辺に 公式 14･1･2 を適用すれば、

$$f^{(s)}(a) = c_s(a)$$

$$f^{(2r+s)}(a) = c_{2r+s}(a)$$

$$f^{(2r+s+1)}(a) = c_{2r+s+1}(a)$$

であるから、

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} \qquad \begin{cases} c_s(a) = \Gamma(a) & s=0 \\ c_s(a) = c_s(a) & s>0 \end{cases}$$

$$= c_{0+0} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{0+s}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^0 y^0}{0!} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$= \Gamma(a) + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a) \frac{(x-a)^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

例　2 の周りのテイラー展開（数値計算）

公式に従い $\Gamma(z)$ を 2 の周りでテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}\left(f_1, f_2, \dots\right)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。$1+0.1i$ での実部・虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は18項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
c[n_, a_] := Gamma[a] Sum[BellY[n, k, Tblψ[n, a]], {k, 1, n}]
Γ[z_, a_, m_] := Gamma[a] + Sum[c[s, a] (z - a)^s / s!, {s, 1, m}]
u[x_, y_, a_, m_] := Gamma[a] + Sum[c[s, a] (x - a)^s / s!, {s, 1, m}] + Sum[c[2 r + s, a] (x - a)^s / s! (-1)^r y^(2 r) / (2 r)!, {r, 1, m}, {s, 0, m}]
v[x_, y_, a_, m_] := Sum[c[2 r + s + 1, a] (x - a)^s / s! (-1)^r y^(2 r + 1) / (2 r + 1)!, {r, 0, m}, {s, 0, m}]
```

```
N[{Re[Gamma[1 + 0.1 i]], u[1, 0.1, 2, 18]}]
{0.990207, 0.990206}
N[{Im[Gamma[1 + 0.1 i]], v[1, 0.1, 2, 18]}]
{-0.0568238, -0.0568222}
```

実部虚部とも、関数値と級数値はほぼ一致している。

公式 20･1･2

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式、$z=x+iy$ 、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $1/\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、$a \ne 0, -1, -2, -3, \cdots$ について次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a) \frac{(z-a)^s}{s!} \qquad |z-a| < \infty \tag{1.2}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(a)} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(a) \frac{(x-a)^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1}(a) \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \dots, \psi_{n-1}(a)\right)$$

$$0^0 = 1$$

証明

(1.2) と $c_n(a)$ は 公式12･1･2 より従う。(1.2) の第2項に 公式 14･1･2 を適用して $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を得る。

例 2 の周りのテイラー展開(数値計算)

公式に従い $1/\Gamma(z)$ を2の周りでテイラー展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。$1+0.1i$ での実部･虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は15項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$\texttt{c[n\_, a\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[a]}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \texttt{BellY[n, k, Tbl}\psi\texttt{[n, a]]}$$

$$\texttt{g[z\_, a\_, m\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[a]}} + \sum_{s=1}^{m} \texttt{c[s, a]} \frac{(z-a)^s}{s!}$$

$$\texttt{u[x\_, y\_, a\_, m\_] :=} \frac{1}{\texttt{Gamma[a]}} + \sum_{s=1}^{m} \texttt{c[s, a]} \frac{(x-a)^s}{s!} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} \texttt{c[2 r + s, a]} \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\texttt{v[x\_, y\_, a\_, m\_] :=} \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \texttt{c[2 r + s + 1, a]} \frac{(x-a)^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{Gamma}[1+0.1\,i]}\right],\ u[1,\ 0.1,\ 2,\ 15]\right\}\right]$$

{1.00658, 1.00658}

$$N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{Gamma}[1+0.1\,i]}\right],\ v[1,\ 0.1,\ 2,\ 15]\right\}\right]$$

{0.0577631, 0.0577631}

実部虚部とも、関数値と級数値は完全に一致している。

20・2 ガンマ関数とその逆数の実部虚部別ローラン展開

公式 20・2・1 (ローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、$z=x+iy$ 、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、次が成立する。

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{s+1}}{s+1} \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < 1$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{2r+s+1}}{2r+s+1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{2r+s+2}}{2r+s+2} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \diamond$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

証明

公式12・2・1 によれば、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_s}{s!} z^{s-1} \tag{2.1}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

(2.1) において s の初期値を 0 に変更すれば

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{s+1}}{s+1} \frac{z^s}{s!}$$

$z=x+iy$ として第1項を実部と虚部に分離し、第2項に 公式 14・1・2 を適用すれば、

$$f^{(s)}(0) = \frac{c_{s+1}}{s+1}$$

$$f^{(2r+s)}(0) = \frac{c_{2r+s+1}}{2r+s+1}$$

$$f^{(2r+s+1)}(0) = \frac{c_{2r+s+2}}{2r+s+2}$$

であるから、

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{2r+s+1}}{2r+s+1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{2r+s+2}}{2r+s+2} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

例　ローラン展開(数値計算)

公式に従い $\Gamma(z)$ を0の周りでローラン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。0.5+0.1i での実部・虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は20項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$c[n\_] := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{BellY}[n, k, \mathrm{Tbl}\psi[n, 1]]$$

$$\Gamma[z\_, m\_] := \frac{1}{z} + \sum_{s=0}^{m} \frac{c[s+1]}{s+1} \frac{z^s}{s!}$$

$$u[x\_, y\_, m\_] := \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \frac{c[2r+s+1]}{2r+s+1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v[x\_, y\_, m\_] := -\frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \frac{c[2r+s+2]}{2r+s+2} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

```
N[{Re[Gamma[0.5 + 0.1 i]], u[0.5, 0.1, 20]}]
          {1.69762, 1.69762}
N[{Im[Gamma[0.5 + 0.1 i]], v[0.5, 0.1, 20]}]
          {-0.332843, -0.332843}
```

実部虚部とも、関数値と級数値は完全に一致している。

公式 20・2・2 (逆ローラン展開)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、$z = x + iy$ 、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $1/\Gamma(z)$ の実部及び虚部 とするとき、次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \sum_{s=2}^{\infty} s c_{s-1} \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = x + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)\, c_{2r+s-1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = y + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (2r+s+1)\, c_{2r+s} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$0^0 = 1$$

証明

公式12・2・2 によれば、$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_s}{s!} z^{s+1} \tag{2.2}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{n-1}(1)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

(2.2) において s の初期値を 2 に変更すれば

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \sum_{s=2}^{\infty} s c_{s-1} \frac{z^s}{s!}$$

$z=x+iy$ として第1項を実部と虚部に分離し、第2項に 公式 14･1･2 を適用すれば、

$$f^{(s)}(0) = s c_{s-1}$$

$$f^{(2r+s)}(0) = (2r+s)\, c_{2r+s-1}$$

$$f^{(2r+s+1)}(0) = (2r+s+1)\, c_{2r+s}$$

であるから、

$$u(x,y) = x + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s)\, c_{2r+s-1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = y + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2r+s+1)\, c_{2r+s} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

例 （数値計算）

公式に従い $1/\Gamma(z)$ を0の周りで逆ローラン展開する。多項式 $B_{n,k}\left(f_1, f_2, \dots\right)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 $BellY[\,]$ を用いて生成される。$0.5+0.1i$ での実部･虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は10項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$\texttt{c[n\_] := } \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \texttt{ BellY[n, k, Tbl}\psi\texttt{[n, 1]]}$$

$$\texttt{g[z\_, m\_] := z + } \sum_{s=2}^{m} \texttt{s c[s - 1]} \frac{z^s}{s!}$$

$$\texttt{u[x\_, y\_, m\_] := x + } \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \texttt{(2 r + s) c[2 r + s - 1]} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$\texttt{v[x\_, y\_, m\_] := y + } \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \texttt{(2 r + s + 1) c[2 r + s]} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$\texttt{N}\left[\left\{\texttt{Re}\left[\frac{1}{\texttt{Gamma[0.5 + 0.1 i]}}\right], \texttt{u[0.5, 0.1, 10]}\right\}\right]$$

```
{0.567255, 0.567255}
```

$$\texttt{N}\left[\left\{\texttt{Im}\left[\frac{1}{\texttt{Gamma[0.5 + 0.1 i]}}\right], \texttt{v[0.5, 0.1, 10]}\right\}\right]$$

```
{0.111219, 0.111219}
```

実部虚部とも、関数値と級数値は完全に一致している。

20･3 ガンマ関数とその逆数の実部虚部別マクローリン展開

公式 20･3･1

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ を Bell 多項式、$z = x + iy$ 、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $\Gamma(1+z)$ の実部及び虚部 とするとき、次が成立する。

$$\Gamma(1+z) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{z^s}{s!} \qquad |z| < 1$$

$$u(x,y) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{x^s}{s!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1} \frac{x^s}{s!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} \qquad |z| < \diamond$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{n-1}(1)\right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$0^0 = 1$$

証明

公式 20･1･1 に $a = 1$ を与え、更に z を $z+1$ に置換して与式を得る。

例（数値計算）

公式に従い $\Gamma(1+z)$ をマクローリン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY*[ ] を用いて生成される。$0.4+0.3i$ での実部･虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は18項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
c[n_] := Sum[BellY[n, k, Tblψ[n, 1]], {k, 1, n}]
f[z_, m_] := 1 + Sum[c[s] z^s/s!, {s, 1, m}]
u[x_, y_, m_] := 1 + Sum[c[s] x^s/s!, {s, 1, m}] + Sum[c[2 r + s] x^s/s! (-1)^r y^(2 r)/(2 r)!, {r, 1, m}, {s, 0, m}]
v[x_, y_, m_] := Sum[c[2 r + s + 1] x^s/s! (-1)^r y^(2 r + 1)/(2 r + 1)!, {r, 0, m}, {s, 0, m}]
N[{Re[Gamma[1 + 0.4 + 0.3 i]], u[0.4, 0.3, 18]}]
        {0.847678, 0.847678}
N[{Im[Gamma[1 + 0.4 + 0.3 i]], v[0.4, 0.3, 18]}]
        {-0.0119186, -0.0119186}
```

実部虚部とも、関数値と級数値は完全に一致している。

公式 20･3･2

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式、$z=x+iy$ 、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を $1/\Gamma(1+z)$ の実部及び虚部 とするとき、次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{z^s}{s\,!} \qquad |z| < \infty$$

$$u(x,y) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \frac{x^s}{s\,!} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s} \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_{2r+s+1} \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

但し

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{n-1}(1)) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$0^0 = 1$$

証明

公式 20･1･2 に $a=1$ を代入し、更に z を $z+1$ に置換して与式を得る。

例（数値計算）

公式に従い $1/\Gamma(1+z)$ をマクローリン展開する。多項式 $B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ は数式処理ソフト *Mathematica* の関数 *BellY* [ ] を用いて生成される。$0.4+0.3i$ での実部･虚部の値を計算し関数値と級数値をそれぞれ比較する。級数は10項まで計算する。その結果は次のとおり。

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
Tblψ[n_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, n - 1}]
```

$$c[n\_] := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \,\mathrm{BellY}[n, k, \mathrm{Tbl}\psi[n, 1]]$$

$$g[z\_, m\_] := 1 + \sum_{s=1}^{m} c[s] \frac{z^s}{s\,!}$$

$$u[x\_, y\_, m\_] := 1 + \sum_{s=1}^{m} c[s] \frac{x^s}{s\,!} + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=0}^{m} c[2r+s] \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v[x\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} c[2r+s+1] \frac{x^s}{s\,!} \frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

$$N\left[\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{Gamma}[1+0.4+0.3\,i]}\right], u[0.4, 0.3, 10]\right\}\right]$$

{1.17946, 1.17946}

$$N\left[\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{Gamma}[1+0.4+0.3\,i]}\right], v[0.4, 0.3, 10]\right\}\right]$$

{0.0165836, 0.0165836}

実部虚部とも、関数値と級数値は完全に一致している。

2022.03.07

河野 和
広島市

宇宙人の数学