21 複素数の周りの実部虚部別テイラー展開

「 14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」においては 複素関数を実数の周りで実部虚部別にテイラー展開した。本章では、複素関数を複素数の周りで実部虚部別にテイラー展開する。また、これの特殊ケースとして、複素関数を複素平面の垂直線上で実部虚部別にテイラー展開する。

使用する公式

「 14 複素関数の実部虚部別テイラー展開 」の 公式 14･1･2 。再掲すると次のとおり。

公式 14･1･2（再掲）

複素関数 $f(z)$ （$z=x+iy$） が実数 a の周りで 次のように実係数のテイラー級数に展開されるとせよ。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a)\frac{(z-a)^s}{s!}$$

するとこの実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ について次式が成立する。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+s+1)}(a)\frac{(x-a)^s}{s!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

但し、$0^0=1$。

21･1 複素数の周りの実部虚部別テイラー展開

21･1･1 複素数の周りのテイラー展開

公式 14･1･2 は 次のように一般化することが出来る。

定理 21･1･1

$f(z)$ （$z=x+iy$） を複素関数、$u(x,y)$, $v(x,y)$ をその実部及び虚部とする。また Re , Im は実部及び虚部を表す記号とする。すると、$f(z)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、任意の点 $(a,b)\in D$ について次式が成立する。

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f^{(s)}(a+ib)\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!} \tag{1.1}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} - Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} + Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

証明

(1.1) より

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}f^{(s)}(a+ib)\frac{\{x-a+i(y-b)\}^s}{s!}$$

$X=x-a\,,Y=y-b$ と置けば、これは次のように表される。

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}f^{(s)}(a+ib)\frac{(X+iY)^s}{s!}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}Re\left[f^{(s)}(a+ib)\right]\frac{(X+iY)^s}{s!}+i\sum_{s=0}^{\infty}Im\left[f^{(s)}(a+ib)\right]\frac{(X+iY)^s}{s!}$$

右辺の第1項に 公式14･1･2 を適用すれば、

$$\sum_{s=0}^{\infty}Re\left[f^{(s)}(a+ib)\right]\frac{(X+iY)^s}{s!}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r}}{(2r)!}$$
$$+i\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

右辺の第2項に 公式14･1･2 を適用すれば、

$$i\sum_{s=0}^{\infty}Im\left[f^{(s)}(a+ib)\right]\frac{(X+iY)^s}{s!}=i\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r}}{(2r)!}$$
$$+i^2\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

よって

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r}}{(2r)!}$$
$$-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r+1}}{(2r+1)!}$$
$$+i\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r+1}}{(2r+1)!}$$
$$+i\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{X^s}{s!}\frac{(-1)^rY^{2r}}{(2r)!}$$

i.e.

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{X^s}{s!}\left\{Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{Y^{2r}}{(2r)!}-Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{Y^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$
$$+i\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{X^s}{s!}\left\{Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{Y^{2r}}{(2r)!}+Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{Y^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

X,Y を元の記号に戻せば、

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$

$$- Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\Biggr\}$$

$$+i\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\Biggl\{Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}$$

$$+ Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\Biggr\}$$

実部と虚部をそれぞれ $u(x,y)$, $v(x,y)$ と記述して与式を得る。　Q.E.D.

Note

$f^{(s)}(a)$ $(s=0,1,2,\cdots)$ が実数のとき、この定理は 公式 14･1･2 に帰着する。

21･1･2 垂直線上のテイラー展開

定理 21･1･1 において $x=a$ と置けば、次の定理が得られる。

定理 21･1･2

$f(z)$ $(z=x+iy)$ を複素関数、$u(x,y)$, $v(x,y)$ をその実部及び虚部とする。また Re , Im は実部及び虚部を表す記号とする。すると、$f(z)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、任意の点 $(a,b)\in D$ について次式が成立する。

$$f(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(s)}(a+ib)}{s!}\{(a-a)+i(y-b)\}^s \tag{1.2}$$

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Re\left[\frac{f^{(2r)}(a+ib)}{(2r)!}\right](y-b)^{2r} - Im\left[\frac{f^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Im\left[\frac{f^{(2r)}(a+ib)}{(2r)!}\right](y-b)^{2r} + Re\left[\frac{f^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

証明

定理 21･1･1 において $x=a$ と置けば

$$f(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty}f^{(s)}(a+ib)\frac{\{a+iy-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{0^s}{s!}\Biggl\{Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}$$

$$- Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\Biggr\}$$

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{0^s}{s!}\Biggl\{Im\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}$$

$$+ Re\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\Biggr\}$$

ここで、$u(a,y)$ の { } 内の記号を次のように略記する。

$$Re\left[f^{(2r+s)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} = R_{2r+s}$$

$$Im\left[f^{(2r+s+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!} = I_{2r+s+1}$$

すると

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{0^s}{s!}\left(R_{2r+s} - I_{2r+s+1}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{0^0}{0!}\left(R_{2r+0} - I_{2r+0+1}\right) + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{0^s}{s!}\left(R_{2r+s} - I_{2r+s+1}\right)$$

$0^0 = 1$, $0^n = 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であるから

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(R_{2r+0} - I_{2r+0+1}\right)$$

R_{2r} , I_{2r+1} を 元の記号に戻せば

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{Re\left[f^{(2r)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} - Im\left[f^{(2r+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

類似の方法で、

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\left\{Im\left[f^{(2r)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!} + Re\left[f^{(2r+1)}(a+ib)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

これらを少し書き換えて与式を得る。

Remark

(1.2) は開領域 D 内の垂直線 $x=a$ 上での関数 $f(a+iy)$ の b の周りのテイラー級数である。そして $u(a,y),v(a,y)$ はこれの部分級数であり、前者は実部で 後者は虚部である。図的に言えば、$u(a,y),v(a,y)$ は 定理 21･1･1 の $u(x,y),v(x,y)$ の3D図が $x=a$ での切断された2D図である。これらは垂直線上しか表すことができないが、a をパラメトリックに変化させることによって D 内全域を表すことが出来る。このように $u(a,y),v(a,y)$ の定義域は狭くなるが、その代償として、これらはより簡単な1重級数で表される。

計算方法

次節以降ではいくつかの数値例を計算するが、手計算は困難である。そこで、

(1) 計算及び描画には数式処理ソフト *Mathematica* を使用する。

(2) $Re\left[f^{(s)}(z)\right]$, $Im\left[f^{(s)}(z)\right]$ の計算には *Mathematica* の関数 $Re[z]$, $Im[z]$ を使用する。

(3) $0^0 = 1$ と仮定する。このため計算や描画に先立ち、ソフト中で次のオプションが指定される。

```
Unprotect [Power] ;  Power [0,0] = 1 ;
```

21・2 例1: 正弦関数

複素数の周りの実部虚部別にテイラー展開の簡単な例として、本節では $\sin z$ を取り上げる。

21・2・1 $a+ib$ の周りの展開

$$\sin z = \sum_{s=0}^{\infty} \sin\left(a+ib+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} \sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s!}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} \cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s!}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$0^0=1$。

導出

$f(z)=\sin z$ の高階導関数は

$$f^{(s)}(z) = \sin\left(z+\frac{s\pi}{2}\right)$$

これより

$$f^{(s)}(a+ib) = \sin\left(a+ib+\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2r+s)}(a+ib) = \sin\left(a+ib+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2r+s+1)}(a+ib) = \sin\left(a+ib+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)$$

これらを 定理 21・1・1 に代入すれば

$$\sin z = \sum_{s=0}^{\infty} \sin\left(a+ib+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[\sin\left(a+ib+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.-Im\left[\sin\left(a+ib+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[\sin\left(a+ib+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.+Re\left[\sin\left(a+ib+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

このままでも良いが、

$$\sin\left(a+ib+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right) = \sin\left(a+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)\cosh b$$
$$+\,i\cos\left(a+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)\sinh b$$

$$\sin\left(a+ib+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)=\sin\left(a+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)\cosh b$$
$$+\,i\cos\left(a+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)\sinh b$$

であるから

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\left\{\sin\left(a+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)\cosh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)\,!}\right.$$
$$\left.-\cos\left(a+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)\sinh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\right\}$$

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\left\{\cos\left(a+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)\sinh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)\,!}\right.$$
$$\left.+\sin\left(a+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)\cosh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\right\}$$

更に、

$$\sin\left(a+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)=(-1)^r\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(a+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)=(-1)^r\cos\left(a+\frac{(s+1)\pi}{2}\right)=-(-1)^r\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)$$

であるから

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\left\{(-1)^r\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\cosh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)\,!}\right.$$
$$\left.+(-1)^r\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\sinh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\right\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s\,!}\left\{\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)\,!}+\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\right\}$$

i.e.

$$u(x,y)=\sum_{s=0}^{\infty}\sin\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s\,!}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)\,!}+\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\right\}$$

また、

$$\sin\left(a+\frac{(2r+s+1)\pi}{2}\right)=(-1)^r\sin\left(a+\frac{(s+1)\pi}{2}\right)=(-1)^r\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(a+\frac{(2r+s)\pi}{2}\right)=(-1)^r\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)$$

であるから

$$v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s\,!}\left\{(-1)^r\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\sinh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)\,!}\right.$$
$$\left.+(-1)^r\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\cosh b\,\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)\,!}\right\}$$

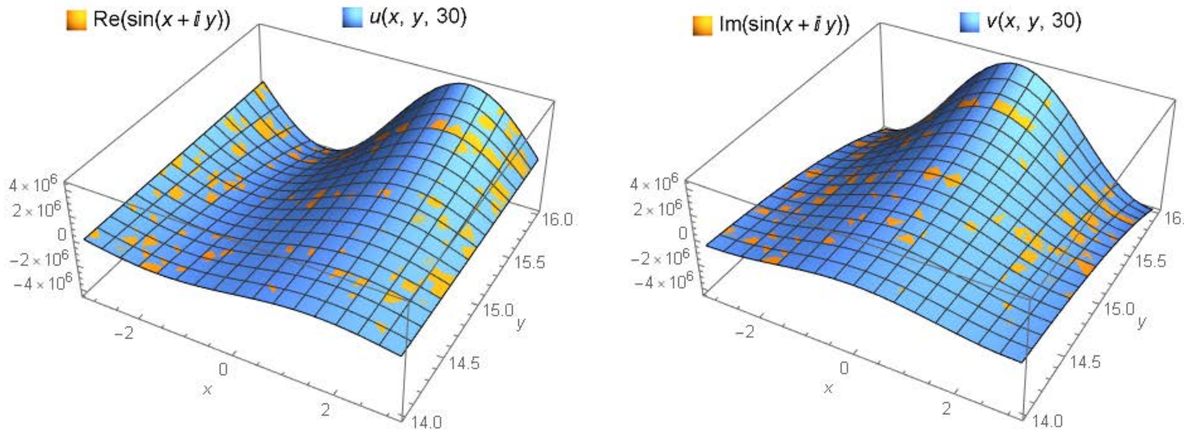
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+)!}\right\}$$

i.e.

$$v(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty}\cos\left(a+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^s}{s!}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+)!}\right\}$$

$-1+i\,15$ の周りの展開

$a=-1\,,\,b=15$ のとき、$u(x,y),v(x,y)$ の3D図は次のようになる。左図が $u(x,y)$ で右図が $v(x,y)$ である。両図において橙は関数で青は級数である。両者はぴったり重なっている。



Note

これらはそれぞれ次に帰着する。

$$u(x,y) = \sin x\cdot\{\cosh b\,\cosh(y-b)+\sinh b\,\sinh(y-b)\} = \sin x\cdot\cosh y$$
$$v(x,y) = \cos x\cdot\{\sinh b\,\cosh(y-b)+\cosh b\,\sinh(y-b)\} = \cos x\cdot\sinh y$$
$$\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

21・2・2 垂直線 $x=a$ 上の b の周りの展開

21・2・1 に $x=a$ を代入すると次のようになる。

$$\sin(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty}\sin\left(a+ib+\frac{s\pi}{2}\right)\frac{\{(a-a)+i(y-b)\}^s}{s!}$$

$$u(a,y) = \sin a\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

$$v(a,y) = \cos a\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sinh b\,\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+\cosh b\,\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

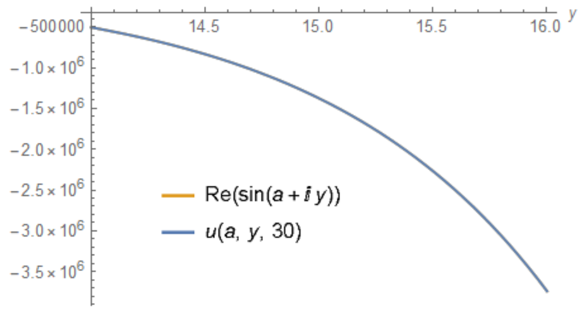
但し、$0^0=1$。

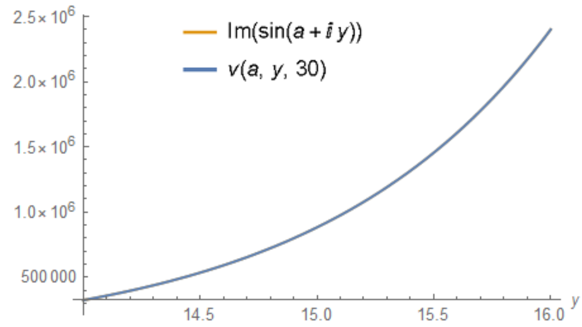
これらは垂直線 $x=a$ 上の b の周りのテイラー展開である。ここで u,v は1重級数となっている。

垂直線 $x=-1$ 上の 15 の周りの展開

$a=-1\,,\,b=15$ のとき、$u(a,y),v(a,y)$ の2D図は次のようになる。左図が $u(a,y)$ で右図が

$v(a,y)$ である。両図において橙は関数で青は級数である。両者はぴったり重なっている。





これらは 上の3D図の $x=-1$ での切断図である。

21･3 例2：対数関数

本節では特異点がある関数例として $\log z$ を取り上げる。これはちょっと複雑である。

21･3･1 $a+ib$ の周りの展開

$$\log z=\log(a+ib)+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\,Re[\log(a+ib)]-Im\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)\\&-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]+Im\left[\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right](y-b)\right\}\\&-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.\\&\left.\qquad+Im\left[\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x,y)=&\,Im[\log(a+ib)]+Re\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)\\&-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]-Re\left[\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right](y-b)\right\}\\&-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.\\&\left.\qquad-Re\left[\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}\end{aligned}$$

但し、$0^0=1$。　$|z|<$ ◇

導出

$f(z)=\log z$ の高階導関数は

$$f^{(s)}(z)=(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{z^s}\qquad s=1,2,3,\cdots$$

これより

$$f^{(s)}(a+ib)=(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\qquad s=1,2,3,\cdots$$

$$f^{(2r+s)}(a+ib)=(-1)^{2r+s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\qquad s=1,2,3,\cdots$$

$$f^{(2r+s+1)}(a+ib)=(-1)^{2r+s}\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\qquad s=1,2,3,\cdots$$

これらを 定理 21･1･1 に代入すれば

$$\log z=\log(a+ib)+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

ここで、形式的に

$$log(a+ib) = (-1)^{-1}\frac{(-1)!}{(a+ib)^0}$$

これは後で使用される。

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.-Im\left[(-1)^s\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$
$$=\frac{(x-a)^0}{0!}\left\{Re\left[(-1)^{-1}\frac{(-1)!}{(a+ib)^0}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^0}{0!}\right.$$
$$\left.-Im\left[(-1)^0\frac{0!}{(a+ib)^1}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^1}{1!}\right\}$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^0}{0!}\right.$$
$$\left.-Im\left[(-1)^s\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^1}{1!}\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.-Im\left[(-1)^s\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

ここで $(-1)^{-1}\frac{(-1)!}{(a+ib)^0}$ を $log(a+ib)$ に置換して

$$u(x,y) = Re[log(a+ib)] - Im\left[\frac{1}{a+ib}\right]\frac{(y-b)^1}{1!}$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]-Im\left[(-1)^s\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right]\frac{(y-b)^1}{1!}\right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.-Im\left[(-1)^s\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

i.e.

$$u(x,y) = Re[log(a+ib)] - Im\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)$$
$$-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]+Im\left[\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right](y-b)\right\}$$

$$
-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.
\left.+Im\left[\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}
$$

$$
v(x,y)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{2r+s}\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right.
\left.+Im\left[(-1)^{2r+s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right\}
$$

$$
=\frac{(x-a)^0}{0!}\left\{Re\left[(-1)^0\frac{0!}{(a+ib)^1}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^1}{1!}\right.
\left.+Im\left[{\color{red}(-1)^{-1}\frac{(-1)!}{(a+ib)^0}}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^0}{0!}\right\}
$$

$$
+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^s\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^1}{1!}\right.
\left.+Im\left[(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^0}{0!}\right\}
$$

$$
+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{2r+s}\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right.
\left.+Im\left[(-1)^{2r+s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right\}
$$

$$
=Re\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)+Im\left[{\color{blue}\log(a+ib)}\right]
$$

$$
+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^s\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^1}{1!}\right.
\left.+Im\left[(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]\frac{(-1)^0(y-b)^0}{0!}\right\}
$$

$$
+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^s}{s!}\left\{Re\left[(-1)^{2r+s}\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right.
\left.+Im\left[(-1)^{2r+s-1}\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right\}
$$

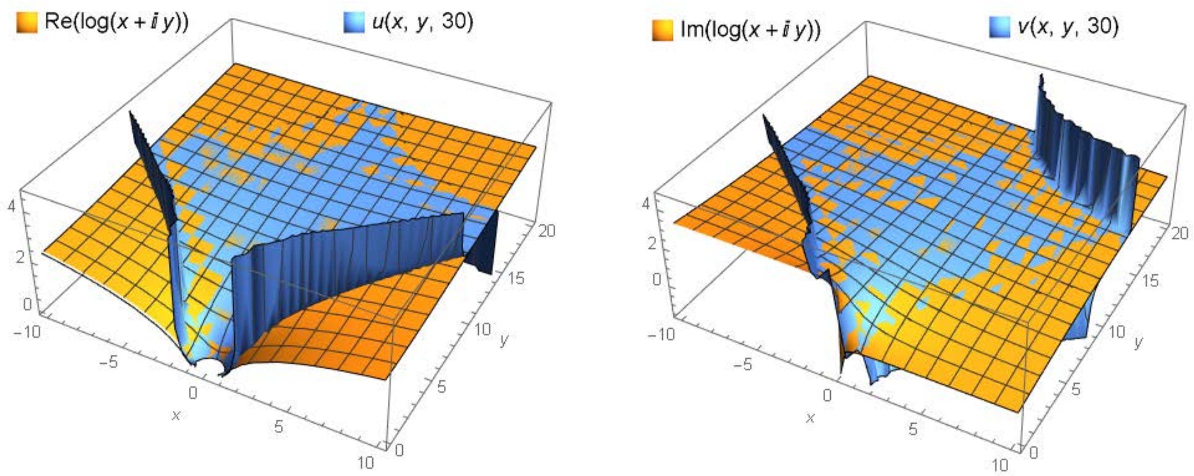
i.e.

$$
v(x,y)=Im[\log(a+ib)]+Re\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)
-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[\frac{(s-1)!}{(a+ib)^s}\right]-Re\left[\frac{s!}{(a+ib)^{s+1}}\right](y-b)\right\}
$$

$$-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x-a)^s}{s!}\left\{Im\left[\frac{(2r+s-1)!}{(a+ib)^{2r+s}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r}}{(2r)!}\right.$$
$$\left.-Re\left[\frac{(2r+s)!}{(a+ib)^{2r+s+1}}\right]\frac{(-1)^r(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

0+*i*10 の周りの展開

$a=0, b=10$ のとき、$u(x,y), v(x,y)$ の3D図は次のようになる。左図が $u(x,y)$ で右図が $v(x,y)$ である。両図において橙は関数で青は級数である。



原点 $(0,0)$ はこの関数の特異点である。従って、これらの収束域は点 $(0,10)$ を中心とする半径 10 の円に内接する正方形の内部である。この図では $b=10$ であるが、b を大きくするほど正方形は左右及び上に拡大する。

検証

テイラー級数は $0+10i$ の周りで 4 項まで展開され、$1+9i$ での関数値と級数値が比較される。その結果は次のとおり。

```
Clear[a, b]; a = 0; b = 10;
N[{Re[Log[1 + i 9]], u[1, 9, 4]}]
{2.20336, 2.20336}
N[{Im[Log[1 + i 9]], v[1, 9, 4]}]
{1.46014, 1.46014}
```

僅か 4 項までの計算で関数値と級数値は完全に一致している。展開の中心点と目的点が近いことを考慮しても、対数関数の級数としてはこの収束速度は驚きである。しかも中心点と目的点が上方に移動するほど収束速度も上がると期待される。

21･3･2 垂直線 $x=a$ 上の b の周りの展開

21･3･1 に $x=a$ を代入すると次のようになる。

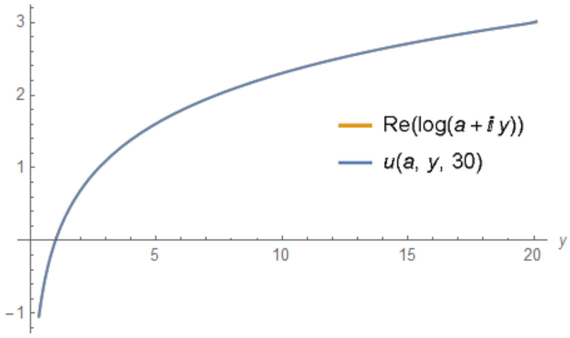
$$u(a,y)=Re[\log(a+ib)]-Im\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{Re\left[\frac{(2r-1)!}{(a+ib)^{2r}}\right]\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!}+Im\left[\frac{(2r)!}{(a+ib)^{2r+1}}\right]\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

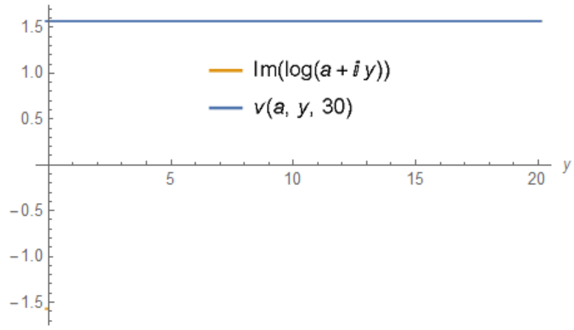
$$v(a,y) = Im[\log(a+ib)] + Re\left[\frac{1}{a+ib}\right](y-b)$$
$$- \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left\{Im\left[\frac{(2r-1)!}{(a+ib)^{2r}}\right]\frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!} - Re\left[\frac{(2r)!}{(a+ib)^{2r+1}}\right]\frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}\right\}$$

但し、$0^0 = 1$　　$|z-10| < 10$。

虚軸 $x=0$ 上の 10 の周りの展開

$a=0, b=10$ のとき、$u(a,y), v(a,y)$ の2D図は次のようになる。左図が $u(a,y)$ で右図が $v(a,y)$ である。両図において橙は関数で青は級数である。両者はぴったり重なっている。





21·4 例3：ディリクレ・イータ関数

本節ではディリクレ・イータ関数 $\eta(z)$ を取り上げる。これは次の級数で定義される関数である。

$$\eta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} e^{-z\log s} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} +- \cdots$$

この関数は複素平面上の任意の点の周りでテイラー展開ができるが、特に興味深いのは臨界線 $x=1/2$ 上および臨界領域の境界 $x=1$ 上での展開である。

21·4·1 $\boldsymbol{a+ib}$ の周りの展開

$$\eta(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \eta^{(s)}(a+ib) \frac{\{z-(a+ib)\}^s}{s!}$$

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^s}{s!} \left\{ Re\left[\eta^{(2r+s)}(a+ib)\right] \frac{(-1)^r (y-b)^{2r}}{(2r)!} - Im\left[\eta^{(2r+s+1)}(a+ib)\right] \frac{(-1)^r (y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!} \right\}$$

$$v(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-a)^s}{s!} \left\{ Im\left[\eta^{(2r+s)}(a+ib)\right] \frac{(-1)^r (y-b)^{2r}}{(2r)!} + Re\left[\eta^{(2r+s+1)}(a+ib)\right] \frac{(-1)^r (y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!} \right\}$$

但し、$\eta^{(s)}(z) = \dfrac{z^{-s}}{\Gamma(1-s)} + (-1)^{-s} \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{t=2}^{k} \frac{(-1)^{t-1}}{2^{k+1}} \binom{k}{t} \frac{\log^s t}{t^z}$ ，　$0^0 = 1$。

導出

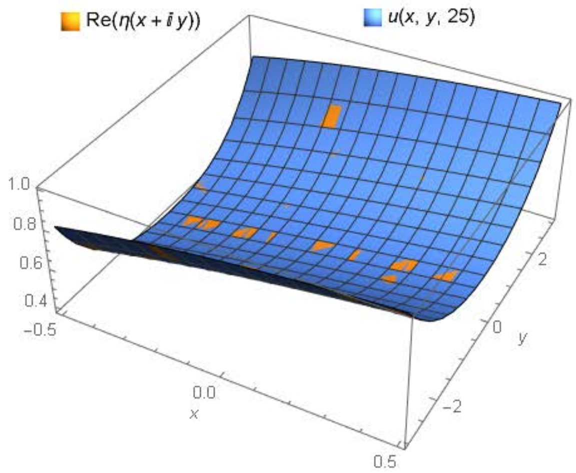
$\eta(z)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ は 定理 21·1·1 より直ちに得られる。但し書きの $\eta^{(s)}(z)$ は「 26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分 」(超微積分編)の 公式 26·3·2h による。

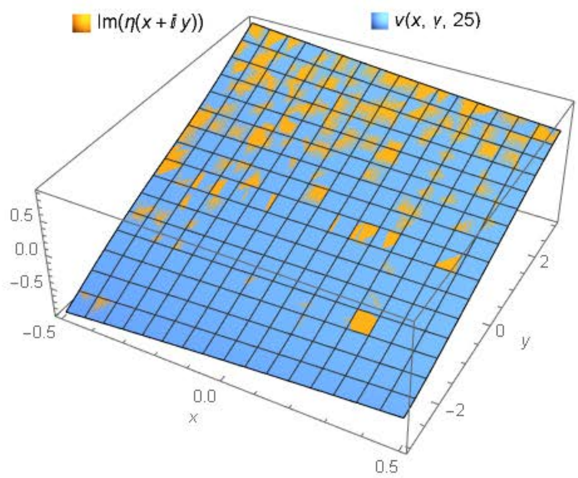
0.3+i2 の周りの展開

先ずは検証である。テイラー級数は 0.3+2i の周りで 25 項まで展開され、-0.3-2i での関数値と級数値が比較される。その結果は次のとおり。両者は完全に一致している。

```
Clear[a, b]; a = 0.3; b = 2;
N[{Re[DirichletEta[-0.3 - 2 i]], u[-0.3, -2, 25]}]
                    {0.574, 0.574}
N[{Im[DirichletEta[-0.3 - 2 i]], v[-0.3, -2, 25]}]
                 {-0.528098, -0.528098}
```

次にこれらを描画してみる。$a=0.3$, $b=2$ のとき、$u(x,y)$, $v(x,y)$ の3D図は次のようになる。左図が $u(x,y)$ で右図が $v(x,y)$ である。両図において橙は関数で青は級数である。両者は完全に一致している。





21･4･2 垂直線 $x=a$ 上の b の周りの展開

ディリクレ･イータ関数 $\eta(z)$ に 定理 21･1･2 を適用すると次のようになる。

$$\eta(a+iy) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\eta^{(s)}(a+ib)}{s\,!}\{(a-a)+i(y-b)\}^s$$

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Re\left[\frac{\eta^{(2r)}(a+ib)}{(2r)\,!}\right](y-b)^{2r} - Im\left[\frac{\eta^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)\,!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Im\left[\frac{\eta^{(2r)}(a+ib)}{(2r)\,!}\right](y-b)^{2r} + Re\left[\frac{\eta^{(2r+1)}(a+ib)}{(2r+1)\,!}\right](y-b)^{2r+1}\right\}$$

但し、$0^0 = 1$。

ここで問題になるのが高階微分係数 $\eta^{(s)}(a+ib)$ である。上の2枚の3D図を描くために半2重級数を用いたが、80 分を要した。10000 の周りのテイラー展開では、計算はともかく、描画はほとんど不可能である そこで考案したのが次式である。

$$\eta(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{ab}(s)\{x+iy-(a+ib)\}^s$$

$$u(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Re[c_{ab}(2r)](y-b)^{2r} - Im[c_{ab}(2r+1)](y-b)^{2r+1}\right\}$$

$$v(a,y) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{Im[c_{ab}(2r)](y-b)^{2r} + Re[c_{ab}(2r+1)](y-b)^{2r+1}\right\}$$

但し、$0^0 = 1$。

これらの式は次の手順で用いられる。

(i) 数式処理ソフトを用いて $\eta(z)$ を $a+ib$ の周りでテイラー展開する。

(ii) その係数を配列 $c_{ab}(s)$ $s=0,1,2,\cdots,n$ に溜めて置く。

(iii) その係数を配列から取り出して $u(a,y)$, $v(a,y)$ の描画や計算をする。

臨界線 $x=1/2$ 上の 10000 の周りの展開

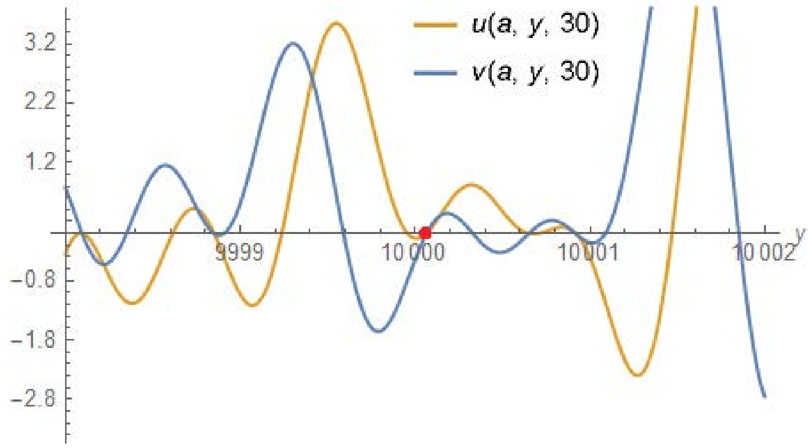
```
Array[c_ab, 101];
```

```
Clear[a, b]; a = 1 / 2; b = 10000;
N[Series[DirichletEta[z], {z, a + ⅈ b, 100}]];
Table[c_ab[n] = SeriesCoefficient[%, n], {n, 0, 100}];
```

$$u[a\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\mathrm{Re}[c_{ab}[2r]]\,(y-b)^{2r} - \mathrm{Im}[c_{ab}[2r+1]]\,(y-b)^{2r+1}\right)$$

$$v[a\_, y\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \left(\mathrm{Im}[c_{ab}[2r]]\,(y-b)^{2r} + \mathrm{Re}[c_{ab}[2r+1]]\,(y-b)^{2r+1}\right)$$

```
Plot[{u[a, y, 30], v[a, y, 30]}, {y, 9998, 10002},
 AxesLabel → Automatic, PlotLegends → "Expressions", ClippingStyle → None,
 PlotRange → {-3.8, 3.8}, PlotStyle → {ColorData[97, 2], ColorData[97, 1]}]
```



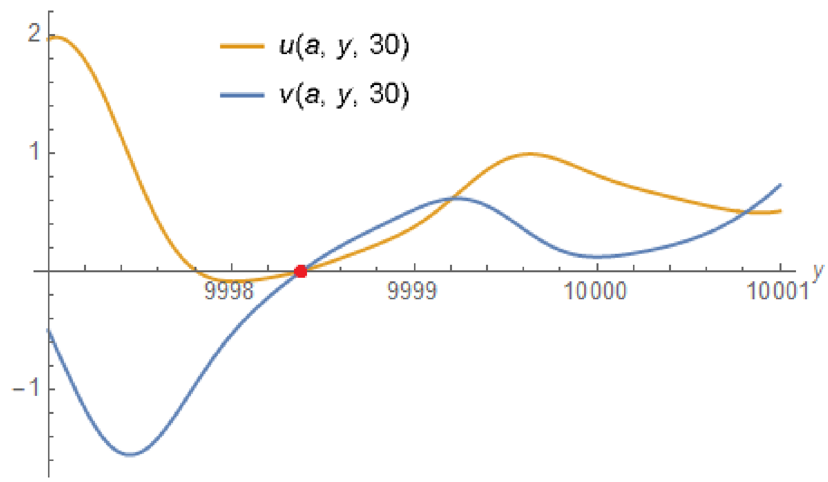
この区間には 5 個の非自明な零点が観察されるが、$y=10000$ 付近の零点を求めると

```
SetPrecision[FindRoot[u[a, y, 5], {y, 10000.1}], 15]
{y → 10000.0653454145}
SetPrecision[FindRoot[v[a, y, 5], {y, 10000.1}], 15]
{y → 10000.0653454145}
SetPrecision[Im[ZetaZero[10143]], 14]
10000.0653454145
```

僅か 5 項までの計算で 10143 番目の非自明な零点が得られている。

臨界領域境界 $x=1$ 上の 10000 の周りの展開

同様にして描画すると、



$y = 9998$ 付近の零点を求めると

```
SetPrecision[FindRoot[u[a, y, 27], {y, 9998.2}], 12]
{y → 9998.38647287}
```

```
SetPrecision[FindRoot[v[a, y, 27], {y, 9998.2}], 12]
{y → 9998.38647287}
```

```
N[2206 π / Log[2], 12]
9998.38647287
```

27 項までの計算で 1103 番目の $\eta(z)$ 固有の零点が得られている。

2022.03.28
2022.04.15 Renewed

河野 和
広島市

宇宙人の数学