## 22 一般余弦法則

余弦法則は三角形に関する幾何学的法則である。従ってその内角は $0$ より大きく $\pi$ より小さい。本章において我々はこの内角を $\pi\sim\infty$ に拡張する (i.e. 三角形の解析化)。これにより、余弦関数は三角形の制約下でも自由度を得る。

この一般化された余弦法則は三角関数の合成公式の一部であり、これにより、三角関数の合成関数の絶対値は幾何学的に説明できる。

### 22・1 一般余弦法則

***a,b,c* が三角形の3辺となる条件**

三角形を構成する3辺の長さを $a,b,c$ とするとき、次の三つの不等式が成り立つ。

$$a<b+c$$
$$b<c+a$$
$$c<a+b$$

ここで、

$$\left.\begin{array}{l} b<c+a \\ c<a+b \end{array}\right\} \iff |b-c|<a$$

であるから、上記は次のように書き換えることができる。

***a,b,c* が三角形の3辺となる条件(簡略形)**

三角形を構成する3辺の長さを $a,b,c$ とするとき、次の不等式が成り立つ。

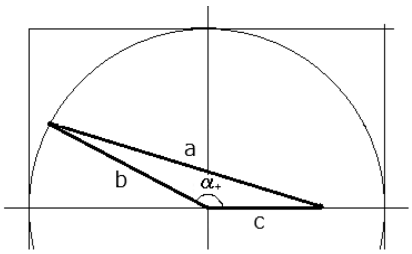
$$|b-c|<a<b+c$$

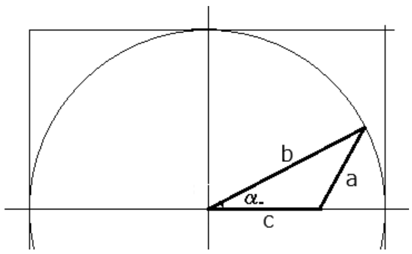
**法則 22・1・0 (余弦法則)**

$a,b,c$ はそれぞれ $|b-c|<a<b+c$ なる正数であるとき、次式を満たす正数 $0<\alpha<\pi$ が存在する。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \tag{1.0}$$

この法則をデカルト平面上に図示すると次のようになる。

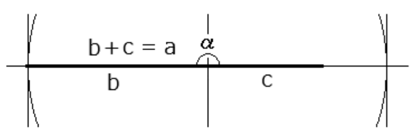


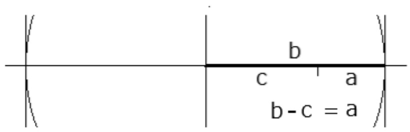




右図では $b$ と $c$ の夾角 $\alpha_-$ が第1象限にあり、左図では夾角 $\alpha_+$ が第2象限にある。両図とも $b$ は水平軸には重ならない。

**直線三角形**

我々は (1.0) を全デカルト平面に拡張したい。そこでその第1歩として、$\alpha\rightarrow 0$ , $\alpha\rightarrow\pi$ としてみよう。すると次のようになる。




これらはいづれも定直線である。よって我々はこれらを直線三角形と呼ぶことにする。

右図は $\alpha_-=0$ の直線三角形で、このとき $a$ は最小となる。よって我々はこれを最小直線三角形と呼ぶことにする。

左図は $\alpha_-=\pi$ の直線三角形で、このとき $a$ は最大となる。よって我々はこれを最大直線三角形と呼ぶことにする。

なお、幾何学において このような図形は三角形と見做されなかった。

**一般余弦法則**

しかし、一旦これらの直線三角形を許容すると、余弦法則を全デカルト平面に拡張することが出来る。我々はそれを一般余弦法則 と呼ぶことにしよう。

法則 22・1・1₋

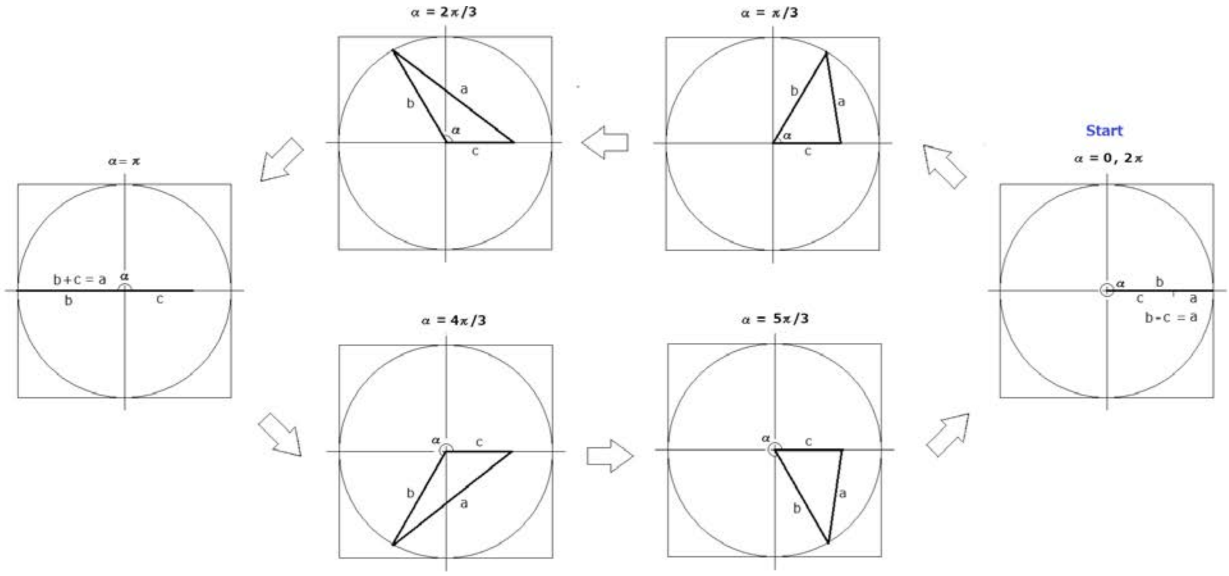
$b,c$ は正数であり $a$ は $|b-c| \le a \le b+c$ なる非負数であるとき、次式を満たす実数 $\alpha$ が存在する。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{1.1₋}$$

ここで $\alpha$ は 長さ $b,c$ の２直線の成す角であり 且つ $a,b,c$ の３直線が成す三角形の内角である。

証明

次図を用いて証明する。原点から横軸上に固定された直線の長さを $c$ 、原点を廻る直線の長さを $b$ 、これらの夾角を $\alpha$ そして $\alpha$ の対辺の長さを $a$ とする。$\alpha$ と $a$ は可変である。

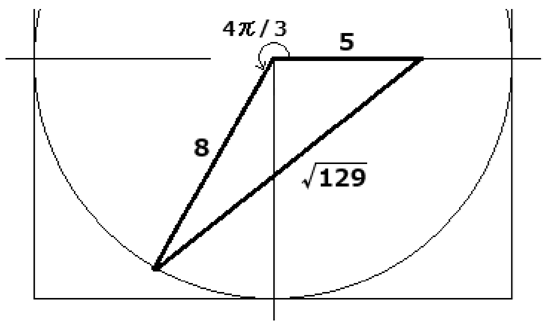



右図は最小直線三角形( $\alpha=0$ , $a=|b-c|$ )である。ここを出発点として $\alpha$ が $\pi/3$ , $2\pi/3$ と反時計回りで増加すれば、図は上段の2図を経て左図の最大直線三角形( $\alpha=\pi$ , $a=b+c$ )に至る。更に $\alpha$ が $4\pi/3$ , $5\pi/3$ と反時計回りで増加すれば、図は下段の2図を経て出発点の右図に戻る。

一見して分かるように、上段図と下段図は鏡像関係にある。このことは 解析的性質 $\cos(2\pi-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ に起因する。　　Q. E. D.

**例　$a=\sqrt{129}$, $b=8$, $c=5$, $\alpha=4\pi/3$**

$$8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cos\frac{4\pi}{3} = 129 \qquad \therefore \quad a = \sqrt{129} = 11.3578$$




法則 22・1・1₊

$b,c$ は正数であり $a$ は $|b-c| \le a \le b+c$ なる非負数であるとき、次式を満たす実数 $\alpha$ が存在する。

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \tag{1.1₊}$$

ここで $\alpha$ は 長さ $b,c$ の２直線の成す角であり 且つ $a,b,c$ の３直線が成す三角形の外角である。

証明

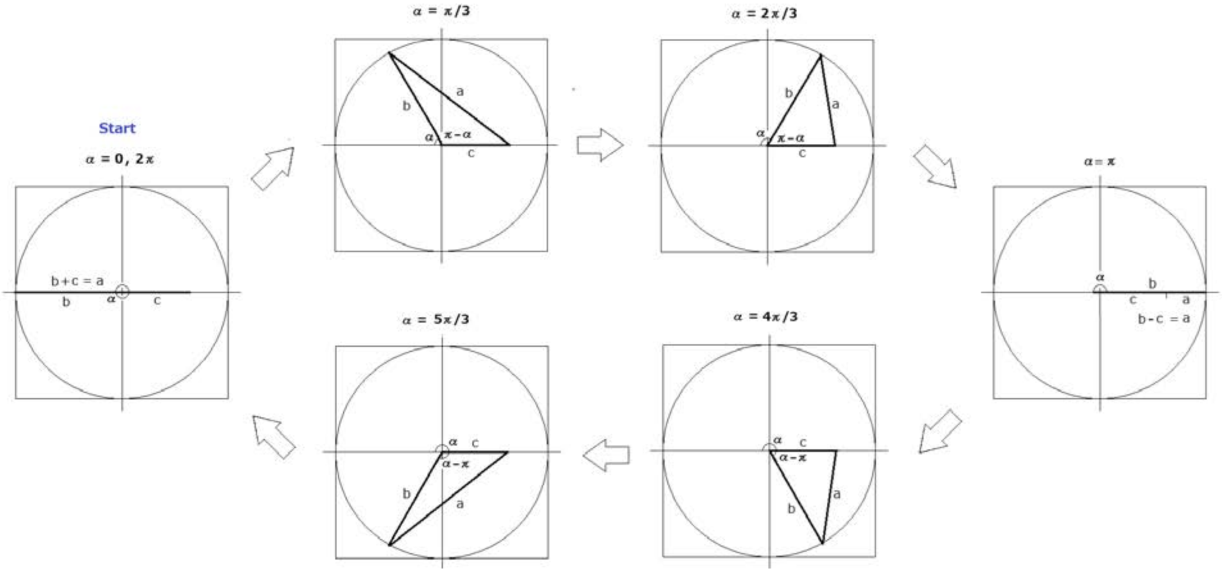
(1.1₋) において $\alpha$ を $\pi-\alpha$ に置換すれば

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi-\alpha)$$

$cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha$ であるから、これを右辺に代入して $(1.1_+)$ を得る。　　Q. E. D.

参考

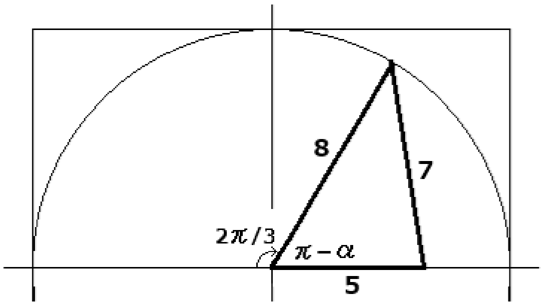
前法則の証明と類似の図を描けば次のとおり。




この遷移図が前法則のそれと異なるところは3つある。その1つは $\alpha$ が三角形の外角で有ることである。その2つは出発点が最大直線三角形であることである。その3つは $\alpha$ の増加方向が時計回りであることである。

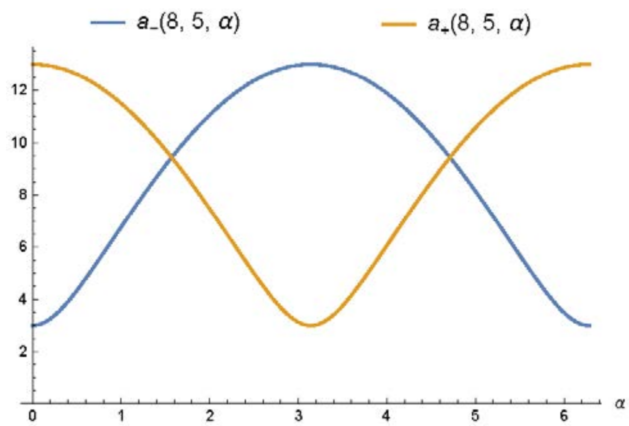
例　$a=7, b=8, c=5, \alpha=2\pi/3$

$$8^2 + 5^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5\, cos\frac{2\pi}{3} = 49 \qquad \therefore \quad a = \sqrt{49} = 7$$




両法則の位相差

$(1.1_-)$ と $(1.1_+)$ の平方根をそれぞれ $a_-$, $a_+$ とし、$0 \le \alpha \le 2\pi$ についてこれらを図示すれば次のようになる。



22・2 余弦法則の正弦表示

前節の一般余弦法則は正弦表示が可能である。

法則 22・2・1₋

$b,c$ は正数であり $a$ は $|b-c| \le a \le b+c$ なる非負数であるとき、次式を満たす実数 $\alpha$ が存在する。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\alpha \tag{2.1-}$$

証明

法則 22・1・1₋ より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{1.1-}$$

$\alpha$ を $\alpha-\pi/2$ に置換すれば

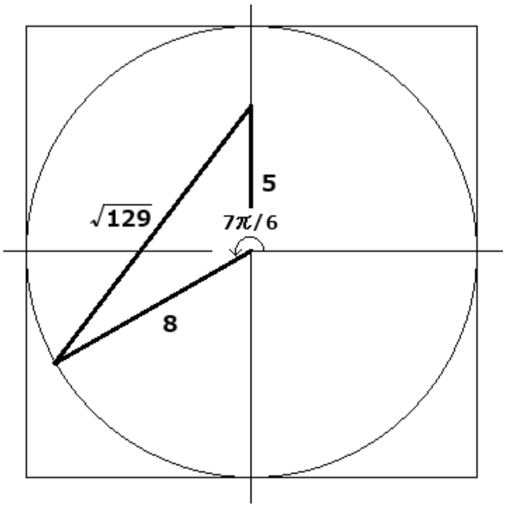
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\cos(\alpha-\pi/2) = \sin\alpha$ であるから、これを右辺に代入して (2.1₋) を得る。 Q. E. D.

この法則の幾何学的意味を知るためには、法則 22・1・1₋ の遷移図 を全て $\pi/2$ ラジアンだけ反時計方向へ回転させれば良い。

例 $a=\sqrt{129}, b=8, c=5, \alpha=7\pi/6$

$$8^2 + 5^2 - 2\cdot8\cdot5\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = 8^2 + 5^2 - 2\cdot8\cdot5\sin\frac{7\pi}{6} = 129 \qquad \therefore\ a = \sqrt{129} = 11.3578$$




法則 22・2・1₊

$b,c$ は正数であり $a$ は $|b-c| \le a \le b+c$ なる非負数であるとき、次式を満たす実数 $\alpha$ が存在する。

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\sin\alpha \tag{2.1+}$$

証明

法則 22・1・1₋ より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{1.1-}$$

$\alpha$ を $\alpha+\pi/2$ に置換すれば

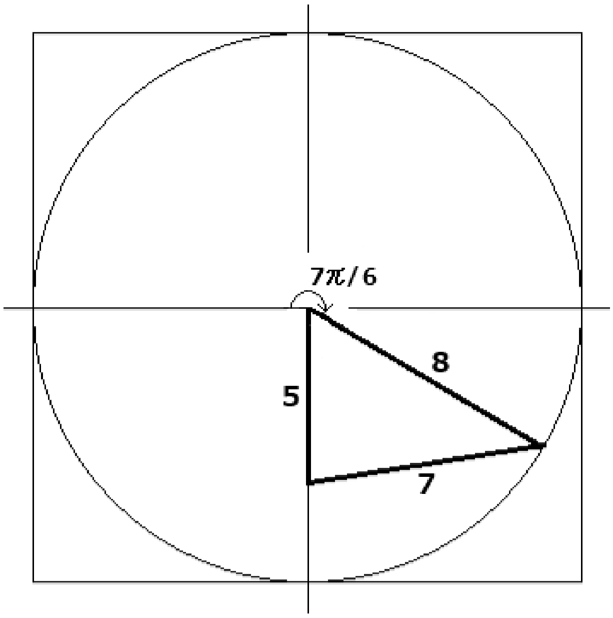
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$ であるから、これを右辺に代入して (2.1₊) を得る。 Q. E. D.

この法則の幾何学的意味を知るためには、法則 22・1・1₊ の遷移図 を全て $\pi/2$ ラジアンだけ時計方向へ回転させれば良い。

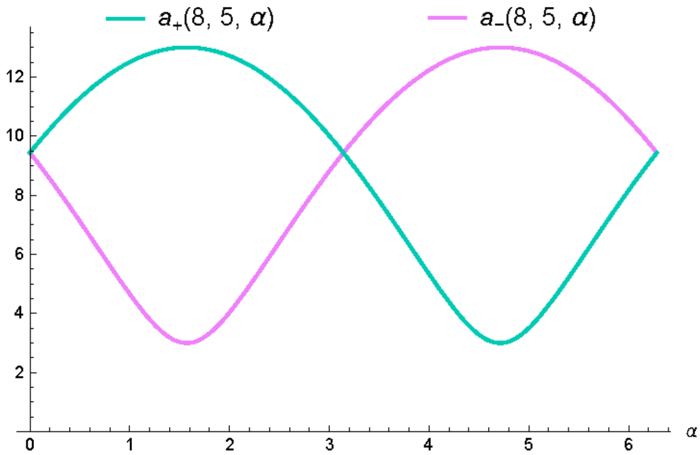
例　$a=7, b=8, c=5, \alpha=7\pi/6$

$$8^2+5^2+2\cdot8\cdot5\,sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=8^2+5^2+2\cdot8\cdot5\,sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=49 \qquad \therefore\quad a=7$$




両法則の位相差

(2.1-) と (2.1+ ) の平方根をそれぞれ $a_-$ , $a_+$ とし、$0\le\alpha\le2\pi$ についてこれらを図示すれば次のようになる。



22･3 合成公式との関係

一般余弦法則は 三角関数の合成公式の一部であり、これにより、三角関数の合成関数の絶対値は幾何学的に説明できる。

拙著「 19 三角関数の合成公式 」の 公式 19･2･2 は次のようであった。

公式 19･2･2 (再掲)

$$a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2 = A_2 \cos(\phi_2 + \Phi_2)$$

$$a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2 = A_2 \sin(\phi_2 + \Phi_2)$$

但し

$$A_2 = \sqrt{a_2^2 + a_1^2 + 2a_2 a_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

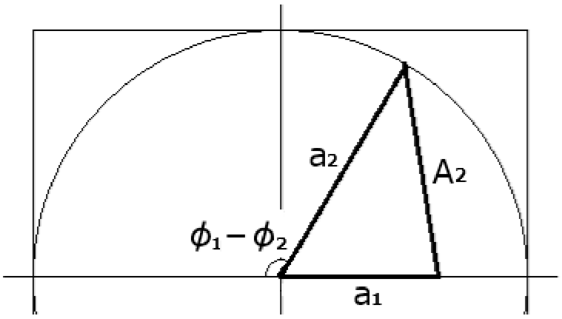
$$\Phi_2 = ArcTan[a_2 + a_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)\ ,\ a_1 \sin(\phi_1 - \phi_2)]$$

この公式において $a_1, a_2$ は正数と仮定して良い。$a_k$ がそうでないならば $\pm\pi$ を $\phi_k$ に含めればよいからである。よって、絶対値 $A_2$ を2乗すると

$$A_2^2 = a_2^2 + a_1^2 + 2a_2 a_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

これは 法則 22･1･1+ の $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$ に一致する。よって、

長さ $A_2, a_1, a_2$ の 3 直線は三角形を成し、$a_1, a_2$ の 2 直線の外角が $\phi_1 - \phi_2$ である。図示すると次のとおり。




例 $a_1 = 5,\ a_2 = 8,\ \phi_1 = 5\pi/6,\ \phi_2 = \pi/6$

$$5\cos\frac{5\pi}{6} + 8\cos\frac{\pi}{6} = A_2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \Phi_2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$5\sin\frac{5\pi}{6} + 8\sin\frac{\pi}{6} = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \Phi_2\right) = \frac{13}{2}$$

但し

$$A_2 = \sqrt{8^2 + 5^2 + 2\cdot 8\cdot 5\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)} = 7$$

$$\Phi_2 = ArcTan\left[8 + 5\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right),\ 5\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = arctan\frac{5\sqrt{3}}{11} = 0.666946$$

2025.03.31


河野 和
広島市


宇宙人の数学