超微積分要約

1　ガンマ関数とディガンマ関数

階乗 $n!$ と調和数 H_n $(=1+1/2+\cdots+1/n)$ は通常は自然数について定義されますが、ガンマ関数とディガンマ関数を使えばこれらを実数 p について定義することができます。即ち、

$$p!=\Gamma(1+p)\quad,\quad H_p=\psi(1+p)+\gamma\quad(\gamma=0.57721\cdots)$$

前者はベキ関数の高階原始関数や高階導関数の係数を表示するのに便利であり、後者は対数関数の非整数階の微積分に不可欠です。

ここではこれらの関数についての諸公式が記述されていますが、中でも重要なのは第3節で証明された次の2式です。即ち、$m,n=0,1,2,3,\cdots$ のとき、

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m)}=(-1)^{m-n}\frac{m!}{n!}\qquad,\qquad\frac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)}=(-1)^{n+1}n!$$

これらは $\Gamma(z)$ や $\psi(z)$ の特異点同士の比が整数またはその逆数に帰着することを示すものですが、前者は整分数関数の高階微分(9･2)の表示に必要であり、後者は対数関数の超微積分(7･5、12･5)に不可欠です。

2　多重階乗

ここでは多重階乗とガンマ関数との関係式が示されます。例えば、2重の場合、

$$(2n-1)!!=2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)/\sqrt{\pi}$$

$$(2n)!!=2^n\Gamma\left(n+\frac{2}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)=2^n\Gamma(n+1)=2^n n!$$

これらは後に整ベキ関数の半積分(7･3)の表示に用いられます。

また、副産物として、次のようなマクローリン展開が得られます。

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(0)}{0!!}x^0+\frac{f'(0)}{2!!}x^1+\frac{f''(0)}{4!!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6!!}x^3+\cdots$$

$$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{f(0)}{0!!!}x^0+\frac{f'(0)}{3!!!}x^1+\frac{f''(0)}{6!!!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{9!!!}x^3+\cdots$$

3　一般二項定理と一般多項定理

先ず、二項定理と一般二項定理が述べられます。後に、ライプニッツ則(18･1)と超微分に関するライプニッツ則(19･1)はこれらとそっくりの形で表されます。

続いて、次のような多項定理と一般多項定理が示されます。

定理3･3･1

実数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ と自然数 n について次式が成立する。

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_m\right)^n=\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}}x_1^{n-r_1}x_2^{r_1-r_2}\cdots x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}}x_m^{r_{m-1}}$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{n}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{n}\binom{n}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}}\cdots\binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}}$$

$$\times x_1^{n-r_1-\cdots-r_{m-1}}x_2^{r_1}x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}}$$

定理3･4･1
実数 α および $x_1, x_2, \cdots, x_m$ s.t. $|x_1| \ge |x_2+x_3+\cdots+x_m|$ について次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2+\cdots+x_m)^\alpha &= \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{r_{m-2}} \binom{\alpha}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{m-2}}{r_{m-1}} x_1^{\alpha-r_1} x_2^{r_1-r_2}\cdots x_{m-1}^{r_{m-2}-r_{m-1}} x_m^{r_{m-1}} \\
&= \sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}\binom{r_1+r_2+\cdots+r_{m-1}}{r_2+\cdots+r_{m-1}}\cdots\binom{r_{m-2}+r_{m-1}}{r_{m-1}} \\
&\quad \times x_1^{\alpha-(r_1+\cdots+r_{m-1})} x_2^{r_1} x_3^{r_2}\cdots x_m^{r_{m-1}}
\end{aligned}
$$

但し、$|x_1| = |x_2+x_3+\cdots+x_m|$ は $\alpha>0$ のときに許される。

後に、多関数の積の高階微分(20･1)と多関数の積の超微分(21･2)はこれらにそっくりの形で表されます。

ここで注目すべきは、一般二項係数の次のような性質です。

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}$$

つまり、一般二項係数を用いたからには $\sum$ の上限は ∞ が本来だと言うことです。
従って n を自然数とし p を実数とするとき、大抵の場合次が成立します。

$$n \to p \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, f(n,x) \;\to\; \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r} f(p,x)$$

ちなみに元の係数が二項係数でない場合、例えば 1 の場合、次のようになります。

$$n \to p \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{r=0}^{n} 1\cdot f(n,x) \;\to\; \sum_{r=0}^{p} 1\cdot f(p,x)$$

$\sum_{r=0}^{p} 1\cdot f(p,x)$ は難物ですが $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r} f(p,x)$ は問題なしです。本稿の超微積分を可能ならしめているのは正に一般二項係数のこの性質です。(ニュートン様様。)

4 高階積分

(1) 定義･記法

$f(x)$ の1階原始関数は通常 $F(x)$ と記述されますが、このような記法は2階以上の原始関数の記述には不適です。そこで本稿では $f(x)$ の各階原始関数を $f^{<1>}(x), f^{<2>}(x), \cdots, f^{<n>}(x)$ と記述します。ここで、例えば $f(x) = \sin x$ の場合、$f^{<1>}(x)$ は $-\cos x$ を意味することも、また $-\cos x + c$ を意味することもあります。どちらであるかはその時々の定義に従います。
また、$f(x)$ の各階積分を次のように記述します。

$$\int_{a_1}^{x} f(x)dx^1 ,\ \int_{a_2}^{x}\int_{a_1}^{x} f(x)dx^2 ,\ \cdots ,\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} f(x)dx^n$$

そして、このような高階積分を**可変下限の高階積分**と呼びます。これに対し、

$$\int_{a}^{x} f(x)dx^1 ,\ \int_{a}^{x}\int_{a}^{x} f(x)dx^2 ,\ \cdots ,\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} f(x)dx^n$$

のような高階積分を**固定下限の高階積分**と呼びます。

(2) 高階積分の基本定理

1階については微分積分の基本定理がありますが、高階についても同様の定理が成立します。

定理4・1・3

$f^{<r>}$ $r=0,1,\cdots,n$ を閉区間 I 上の連続関数とし、$f^{<r+1>}$ を $f^{<r>}$ の任意の原始関数とするとき、$a_r, x\in I$ に対して次式が成立する。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}f(x)dx^n=f^{<n>}(x)-\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a_{n-r})\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_{n-r+1}}^{x}dx^r$$

特に $a_r=a$ for $r=1,2,\cdots,n$ のとき

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x}f(x)dx^n=f^{<n>}(x)-\sum_{r=0}^{n-1}f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}$$

(3) 直系と傍系

これらの式の右辺第2項を**積分定数多項式**と呼びます。そして積分定数多項式がゼロのとき、左辺を**直系高階積分**と呼び、$f^{<n>}(x)$ を**直系高階原始関数**と呼びます。反対に積分定数多項式がゼロでないとき、左辺を**傍系高階積分**と呼び、右辺を**傍系高階原始関数**と呼びます。

例えば

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{2\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\sin x\,dx^3=\cos x$$: 左辺は直系3階積分、右辺は直系3階原始関数。

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\sin x\,dx^3=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$$: 左辺は傍系3階積分、右辺は傍系3階原始関数。

また、定理4・1・3から、$f(x)$ の高階積分が直系であるためには、$r=1,2,\cdots,n$ について a_r が $f^{<r>}$ の零点でなければならないことがわかります。

(4) 高階積分と Riemann-Liouville 積分

固定下限の高階積分は Riemann-Liouville 積分と呼ばれる1階積分に帰着します。

定理4・2・1 (Cauchyの重回積分の公式)

$f(x)$ を連続積分可能な関数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、

$$\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x}f(x)dx^n=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

右辺の Riemann-Liouville 積分は重要な積分ですが、高階積分においては左辺自体が演算機能を持っているため、是非に必要ではありません。

余談ながら 定理4・1・3 の左辺をこの Riemann-Liouville 積分に置き換えた上、$f(x)$ に係る積分演算子のインデックスを $-n$ ほどシフトすると次のようになります。

$$f^{<0>}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$

これは $f(x)$ の a の周りのテイラー展開で、右辺の積分はベルヌーイ型と呼ばれる剰余項です。

(5) 初等関数の高階積分

m が自然数のとき、関数 x^m の2階積分は次のようになります。

$$\int_0^x\int_0^x x^m dx^2 = \frac{1}{(m+1)(m+2)}x^{m+2} = \frac{m!}{(m+2)!}x^{m+2}$$

従って α が正の実数のときは次のようになります。

$$\int_0^x\int_0^x x^\alpha dx^2 = \frac{\alpha!}{(\alpha+2)!}x^{\alpha+2}$$

ここで実数 α の階乗はガンマ関数 $\Gamma(1+\alpha)$ で表されるので、この式は

$$\int_0^x\int_0^x x^\alpha dx^2 = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+2)}x^{\alpha+2}$$

となります。

このような簡単な計算により、初等関数について次の諸式を得ます。なお、$\uparrow, \downarrow$ は天井関数と床関数を示します。

ベキ関数等の高階積分

$$\int_0^x\cdots\int_0^x x^\alpha dx^n = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)}x^{\alpha+n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$\int_\infty^x\cdots\int_\infty^x x^\alpha dx^n = (-1)^n\frac{\Gamma(-\alpha-n)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha+n} \qquad (\alpha < -n)$$

$$\int_{\mp\infty}^x\cdots\int_{\mp\infty}^x e^{\pm x}dx^n = (\pm 1)^n e^{\pm x}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \qquad x > 0$$

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^x\cdots\int_{\frac{2\pi}{2}}^x\int_{\frac{1\pi}{2}}^x \sin x\, dx^n = \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^x\cdots\int_{\frac{1\pi}{2}}^x\int_{\frac{0\pi}{2}}^x \cos x\, dx^n = \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{n\pi i}{2}}^x\cdots\int_{\frac{2\pi i}{2}}^x\int_{\frac{1\pi i}{2}}^x \sinh x\, dx^n = \frac{e^x - (-1)^n e^{-x}}{2}$$

$$\int_{\frac{(n-1)\pi i}{2}}^x\cdots\int_{\frac{1\pi i}{2}}^x\int_{\frac{0\pi i}{2}}^x \cosh x\, dx^n = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$$

逆三角関数の高階積分

$$\begin{aligned}\int_0^x\cdots\int_0^x \tan^{-1}x\, dx^n = &\frac{\tan^{-1}x}{n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k {}_nC_{n-2k}\, x^{n-2k} \\ &+ \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k {}_nC_{n+1-2k}\, x^{n+1-2k} \\ &- \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\left\{\psi(1+n) - \psi(2r)\right\}x^{n+1-2r}\end{aligned}$$

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x cot^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n\,!}cot^{-1}x - \frac{tan^{-1}x}{n\,!}\sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^k{}_nC_{n-2k}\,x^{n-2k}$$

$$- \frac{log\left(x^2+1\right)}{2\cdot n\,!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}$$

$$\int_{a_n}^x\!\!\cdots\!\int_{a_1}^x sin^{-1}x\,dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}sin^{-1}x$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)\,!}\sqrt{1-x^2}$$

但し、$a_1 = i\cdot 1.508879\cdots$, $a_2 = 0$, $a_3 = -i\cdot 0.475883\cdots$, $a_4 = 0$, $\cdots$

$$\int_{a_n}^x\!\!\cdots\!\int_{a_1}^x cos^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n\,!}cos^{-1}x - \sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2(n-2r)!}sin^{-1}x$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}\sum_{s=0}^{n-2r+1}(-1)^s{}_{n-2r+1}C_s\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)\,!}\sqrt{1-x^2}$$

但し、$a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 =$ 複素数 , $a_4 = 0$, $\cdots$

$$\int_1^x\!\!\cdots\!\int_1^x sec^{-1}x dx^n = \frac{x^n}{n\,!}sec^{-1}x - \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)\,!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)\,!}\sqrt{x^2-1}$$

$$\int_{a_n}^x\!\!\cdots\!\int_{a_1}^x csc^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n\,!}csc^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)\,!}\frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!}log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$-\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\sum_{s=0}^{n-2r}(-1)^s\frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s}\frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2}\frac{x^{n-2r}}{(n-2r)\,!}\sqrt{x^2-1}$$

但し、a_1 , a_2 , $\cdots$, a_n は全て複素数。

逆双曲線関数の高階積分

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x tanh^{-1}x\,dx^n = \frac{tanh^{-1}x}{n\,!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}{}_nC_{n-2k}\,x^{n-2k} + \frac{log\left(1-x^2\right)}{2\cdot n\,!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$

$$- \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r}$$

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x coth^{-1}x\,dx^n = \frac{x^n}{n\,!}coth^{-1}x + \frac{tanh^{-1}x}{n\,!}\sum_{k=1}^{n/2\downarrow}{}_nC_{n-2k}\,x^{n-2k}$$

$$+ \frac{log\left(1-x^2\right)}{2\cdot n\,!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}{}_nC_{n+1-2k}\,x^{n+1-2k}$$

$$- \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}{}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n)-\psi(2r)\}x^{n+1-2r} \qquad |x|<1$$

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} \sinh^{-1}x\, dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} \frac{(-1)^r x^{n-2r}}{(2r)!!^2 (n-2r)!} \sinh^{-1}x$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} \sum_{s=0}^{n-2r+1} (-1)^{r+s}{}_{n-2r+1}C_s \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{1+x^2}$$

但し、$a_1 = 1.508879\cdots$, $a_2 = 0$, $a_3 = -0.475883\cdots$, $a_4 = 0$, $\cdots$

$$\int_{1}^{x}\cdots\int_{1}^{x} \cosh^{-1}x\, dx^n = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow} \frac{x^{n-2r}}{(2r)!!^2 (n-2r)!} \cosh^{-1}x$$
$$- \sum_{r=1}^{n/2\uparrow} \sum_{s=0}^{n-2r+1} (-1)^{s}{}_{n-2r+1}C_s \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r+1}}{(n-2r+1)!}\sqrt{x^2-1}$$

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} \mathrm{sech}^{-1}x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\mathrm{sech}^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!} \frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!} \sin^{-1}x$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} \sum_{s=0}^{n-2r} (-1)^{s} \frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s} \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{1-x^2}$$

但し、$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$、$a_2$, a_4 , a_6 , $\cdots$ は複素数。

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x} \mathrm{csch}^{-1}x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\mathrm{csch}^{-1}x + \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} \frac{(-1)^r(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!} \frac{x^{n-2r-1}}{(n-2r-1)!} \sinh^{-1}x$$
$$+ \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} \sum_{s=0}^{n-2r} (-1)^{r+s} \frac{{}_{n-2r}C_s}{2r+s} \frac{(s-1)!!^2}{(s+2r-1)!!^2} \frac{x^{n-2r}}{(n-2r)!}\sqrt{x^2+1}$$

ここで　$a_1 = 0$, $a_2 = 0.6079\cdots$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1.5539$, $\cdots$

(6) 項別高階積分と高階原始関数のテイラー級数

定理4・6・1

$f^{<r>}$ $r=0,1,\cdots,n$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とし、$f^{<r+1>}$ を $f^{<r>}$ の任意の原始関数とします。このとき、もし関数 $f(x)$ が a の周りでテイラー展開可能ならば、$x \in [a,b]$ に対して次式が成立します。

$$f^{<n>}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{<n-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{r!}$$

この式は $f^{<n>}(x)$ のテイラー級数が積分定数多項式と $f(x)$ の項別高階積分から成ることを示しています。このことから次のことが明らかになります。

(1) $f(x)$ の固定下限の項別高階積分は一般に傍系高階積分になる。

(2) $f(x)$ の a を下限とする項別高階積分が直系高階積分になるのは次の場合である。

$$f^{<r>}(a)=0 \quad for\ r=1,2,\cdots,n \quad \& \quad f^{(s)}(a) \neq 0,\pm\infty \quad for\ at\ least\ one\ s \geqq 0$$

例えば $\displaystyle\int_{a}^{x}\cdots\int_{a}^{x} e^x dx^n = \sum_{r=0}^{\infty} e^a \frac{(x-a)^{n+r}}{(n+r)!}$　　$a \neq -\infty$ は傍系高階積分になり、

$$\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x} \tan^{-1}x\, dx^n = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2r)!}{(n+2r+1)!} x^{n+2r+1}$$ は直系高階積分になります。

次に、$\log x$ の高階原始関数をテイラー展開して次式が得られます。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_nC_r H_{n-r} \qquad \left\{H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r(r+1)\cdots(r+n)} = \frac{2^n}{n!}\left(\log 2 - H_n\right) + \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_r H_{n-r}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_nC_r H_{n-r} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^p}{1+x}dx = 2^p\{\log 2-\psi(1+p)-\gamma\}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{p}{r}\{\psi(1+r)+\gamma\}$$

例

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+-\cdots = \frac{4}{3}\log 2-\frac{8}{9}$$

5 項別高階積分(三角関数、双曲線関数)

三角関数および双曲線関数のうち2階以上の高階積分が初等関数で表せない関数について、これらを級数に展開した上項別に高階積分し、以下の諸式を得ます。

$\uparrow, \downarrow$ は天井関数と床関数を示し、ベルヌイ数とオイラー数はそれぞれ次のようであるとします。

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\qquad E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

(1) テイラー展開

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k\,(2k+n-1)!}x^{2k+n-1} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tanh x\,dx^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k+n-1)!}x^{2k+n-1} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+n)!}x^{2k+n} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

(2) フーリエ展開

$$\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\ ,\quad \beta(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$$ とするとき、

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan x\,dx^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^n}\sin\left(2kx-\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^{k-1}\frac{\eta(2k-1)}{2^{2k-2}}\frac{x^{n+1-2k}}{(n+1-2k)!} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tanh x\,dx^n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-2kx}}{k^n} + \frac{x^n}{n!}$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\eta(k+1)}{2^k}\frac{x^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \qquad x>0$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sec x\,dx^n = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}\cos\left\{(2k+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n/2\downarrow}(-1)^{k-1}\frac{2\beta(2k)}{(n-2k)!}x^{n-2k} \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_\infty^x\cdots\int_\infty^x \operatorname{sech} x\,dx^n = (-1)^n 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^n} \qquad x>0$$

(3) リーマンの奇数ゼータとディリクレの偶数ベータ

また、テイラー級数とフーリエ級数を突合することにより、リーマンの奇数ゼータとディリクレの偶数ベータが得られます。例えば

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k(2k+2n+1)!}\pi^{2k+2n+1} - \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\log 2\right\}$$
$$-\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{\pi^{2n+1-2k}}{(2n+1-2k)!}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\zeta(2k+1)$$

$$\zeta(2n+1) = (-1)^n\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^{2n+1}}{(2n)!}\left(\log\pi-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{2k(2k+2n+1)!}\pi^{2k+2n+1}\right\}$$
$$+(-1)^n\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{\pi^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\zeta(2k+1)$$

$$\zeta(n) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{-k}}{k^n}+\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{j-1}\frac{2^{n-1-j}-1}{2^{n-1-j}}\frac{1}{j!}\zeta(n-j)\right\}$$
$$-\frac{(-2)^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k(2k+n-1)!}-\frac{1}{2}\frac{1}{n!}+\frac{\log 2}{(n-1)!}\right\}$$

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|E_{2k}|}{(2k+2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2n}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\beta(2n-2k)}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

6 項別高階積分(逆三角関数、逆双曲線関数)

ここでは逆三角関数および逆双曲線関数の級数を項別に高階積分します。「4　高階積分」で求めたものよりもシンプルな公式が得られます。また、両者から様々な副産物が得られます。

(1) テイラー展開

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \tan^{-1}x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} \qquad |x|<1$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \cot^{-1}x\,dx^n = \frac{\pi}{2}\frac{x^n}{n!}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} \qquad 0<x\le 1$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!}x^{2k+n+1} \qquad |x|<1 \quad \text{傍系}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \cos^{-1} x\, dx^n = \frac{\pi}{2}\frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!} x^{2k+n+1} \qquad |x|<1 \qquad \text{傍系}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \tanh^{-1} x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!} x^{2k+n+1} \qquad |x|<1$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \sinh^{-1} x\, dx^n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!} x^{2k+n+1} \qquad |x|<1 \qquad \text{傍系}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \operatorname{sech}^{-1} x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log\frac{2}{x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k+n)!} x^{2k+n}$$

$$0<x<1 \qquad \text{傍系}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \operatorname{csch}^{-1} x\, dx^n = \frac{x^n}{n!}\left(\log\frac{2}{x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k+n)!} x^{2k+n}$$

$$0<x<1 \qquad \text{傍系}$$

(2) 副産物

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{1-x^2} dx = 2^{n-1}\log 2 - \sum_{r=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n) - \psi(2r)\}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k {}_nC_{n-2k} + \frac{\log 2}{2}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k {}_nC_{n+1-2k}$$

$$- \sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n) - \psi(2r)\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!} = \frac{2^{n-1}}{n!}\log 2 - \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow} {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n) - \psi(2r)\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+n+1)!} = \frac{\pi}{4\,n!}\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}(-1)^k {}_nC_{n-2k} + \frac{\log 2}{2\cdot n!}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k {}_nC_{n+1-2k}$$

$$- \frac{1}{n!}\sum_{r=1}^{n/2\downarrow}(-1)^r {}_nC_{n+1-2r}\{\psi(1+n) - \psi(2r)\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+n+1)!} = \frac{{}_{2n-1}C_{n-1}}{(2n)!!}\pi - \sum_{k=1}^{n/2\uparrow} \frac{1}{(2k-1)!!^2(n-2k+1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k+n)!} = \frac{1}{n!}\left(\log 2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) + \sum_{r=1}^{n/2\downarrow}\frac{1}{2r(2r-1)!!^2}\frac{1}{(n-2r)!}$$

$$- \frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!\,(2r+1)!}\frac{1}{(n-2r-1)!}$$

例

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8} + \frac{1}{7\cdot8\cdot9\cdot10} + \cdots = \frac{2}{3}\log 2 - \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8} - \frac{1}{7\cdot8\cdot9\cdot10} + - \cdots = \frac{5}{12} - \frac{\pi}{12} - \frac{\log 2}{6}$$

$$\frac{(-1)!!^2}{2!} + \frac{1!!^2}{4!} + \frac{3!!^2}{6!} + \frac{5!!^2}{8!} + \cdots = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\frac{1!!^2}{2\cdot3!} + \frac{3!!^2}{4\cdot5!} + \frac{5!!^2}{6\cdot7!} + \frac{7!!^2}{8\cdot9!} + \cdots = \frac{1}{1!}(\log 2 + 1) - \frac{\pi}{2}$$

7 超積分

$\sum_{j=1}^{m} a$ のインデックス j の定義域を自然数域 $[1,m]$ から実数域 $[0,p]$ に拡張したものが積 ap ($=\sum_{j=0}^{p} a$) であり、$\prod_{k=1}^{n} b$ のインデックス k の定義域を自然数域 $[1,n]$ から実数域 $[0,q]$ に拡張したものが冪 b^q ($=\prod_{k=0}^{q} b$) です。定義域を拡張することは一般には解析接続と呼ばれていますが、この手法は演算子のインデックス関数にも適用できそうです。ここでは、積分演算子のインデックス関数の定義域を拡張して超積分(非整数階の積分)を求めます。

(1) 定義・記法

$f(x)$ の非整数階原始関数を $f^{<p>}(x)$と記述し、これを $f(x)$ の**超原始関数**と呼びます。超原始関数は無数にあるので、$f^{<p>}(x)$がどれを意味しているかはその時々の定義に従います。

関数 f を1つの独立変数 x について $a(0)$ から $a(p)$まで連続的に積分することを**超積分**と言い、次のように記述します。

$$\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx^p \quad \left\{=\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx\sim dx\right\}$$

そして下限関数 $a(k)$ が

$a(k)=a\ \ for\ \ all\ \ \ k\in[0,p]$ のとき、 これを**固定下限の超積分**と呼び、

$a(k)\neq a\ \ for\ some\ k\in[0,p]$ のとき、 これを**可変下限の超積分**と呼びます。

(2) 超積分の基本定理

超積分についても次のような定理が成立します。

$f^{<r>}\ \ r\in[0,p]$ は 閉区間 I 上の連続関数 且つ f の任意の r 階超原始関数とし $a(r)$ は閉区間 $[0,p]$ 上の連続関数とするとき、$a(r),\ x\in I$ に対して

$$\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(0)}^{x} f(x)\,dx^p = f^{<p>}(x) - \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}\{a(p-r)\}\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(p-r+1)}^{x} dx^r$$

特に $a(r)=a\quad for\ all\ \ r\in[0,p]$ のとき

$$\int_{a}^{x}\sim\int_{a}^{x} f(x)\,dx^n = f^{<p>}(x) - \sum_{r=0}^{p-1} f^{<p-r>}(a)\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}$$

(3) 直系と傍系

これらの式の右辺第2項を**積分定数関数**と呼びます。そして積分定数関数がゼロのとき、左辺を**直系超積分**と呼び、$f^{<p>}(x)$ を**直系超原始関数**と呼びます。反対に積分定数多項式がゼロでないとき、左辺を**傍系超積分**と呼び、右辺を**傍系超原始関数**と呼びます。例えば

$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^{x}\sim\int_{\frac{0\pi}{2}}^{x}\sin x\,dx^p = \sin\left(x-\frac{p\pi}{2}\right)$$

の左辺は直系 p 階積分で、右辺は直系 p 階原始関数

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\sin x\,dx^p = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Gamma(2r+2+p)}x^{2r+1+p}$$

の左辺は傍系 p 階積分で

右辺は傍系 p 階原始関数です。

(4) 超積分と Riemann-Liouville 積分

固定下限の超積分は Riemann-Liouville 積分と呼ばれる1階積分に帰着します。

$$\int_a^x \sim \int_a^x f(x)\,dx^p = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt$$

これは Cauchyの重回積分の公式 のパラメーター n を実数化したものです。左辺は演算機能を喪失しているため、右辺の Riemann-Liouville 積分は非常に重要です。固定下限の超積分は全てこれにより数値的に検証できます。他方、可変下限の超積分は Riemann-Liouville 積分が適用できないので検証が非常に困難です。

(5) Fractional Integral と 超積分

伝統的な Fractional Integral では、この Riemann-Liouville 積分を用いて超原始関数を求めます。例えば、$f(x)=x^{\alpha}$ の場合、

$$f(t) = t^{\alpha}\ ,\ \ g(x-t) = \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

と置けば

$$\left(x^{\alpha}\right)^{<p>} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x t^{\alpha}(x-t)^{p-1}dt = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt$$

これは畳み込み積分 $(f*g)(x)$ ですから、$(f*g)(x)$ のラプラス変換を行うと

$$(f*g)(x) \longrightarrow F(s)\cdot G(s)$$

$$f(x) = x^{\alpha} \longrightarrow \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} = F(s)$$

$$g(x) = \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p)}{s^p} = \frac{1}{s^p} = G(s)$$

$$\therefore\ F(s)\cdot G(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\frac{1}{s^p} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}\frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{s^{\alpha+p+1}}$$

これをラプラス逆変換して超原始関数 $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}x^{a+p}$ を得ます。

Fractional Integral の手法はかくも難しく、$\log x$ の超原始関数などをこの方法で求めることは困難です。何よりも問題なのは、Fractional Integral では $\sin x$ などの直系非整数階積分が不可能なことです。何故ならば、これら可変下限の積分には Riemann-Liouville 積分が適用できないからです。

これに対し筆者の提唱する超積分法では、先ず、高階積分

$$\int_0^x\cdots\int_0^x x^{\alpha}dx^n = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n)}x^{\alpha+n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

を求めます。そして積分演算子のインデクス n を実数 p に置換して

$$\int_0^x\sim\int_0^x x^{\alpha}dx^p = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)}x^{\alpha+p} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

と、いとも簡単に超原始関数を得ることができます。

また、$\sin x$ などの超積分も、可変下限の高階積分を施した後に積分演算子のインデックスを実数に置換することによって、容易に実行できます。

(6) 初等関数の超積分

このような方法で「4 高階積分」から次のような超積分が得られます。

$$\int_0^x\sim\int_0^x x^{\alpha}dx^p = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p)}x^{\alpha+p} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$\int_{\infty}^x\sim\int_{\infty}^x x^{\alpha}dx^p = (-1)^p\frac{\Gamma(-\alpha-p)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha+p} \qquad (\alpha < -p)$$

$$\int_{\mp\infty}^{x} \sim \int_{\mp\infty}^{x} e^{\pm x} dx^p \quad = (\pm 1)^p e^{\pm x}$$

$$\int_{0}^{x} \sim \int_{0}^{x} \log x dx^p = \frac{\log x - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} x^p$$

$$\int_{\frac{p\pi}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi}{2}}^{x} \sin x dx^p \quad = \sin\left(x - \frac{p\pi}{2} \right)$$

$$\int_{\frac{(p-1)\pi}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{-1\pi}{2}}^{x} \cos x dx^p = \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} \right)$$

$$\int_{\frac{p\pi i}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{0\pi i}{2}}^{x} \sinh x dx^p \quad = \frac{e^x - (-1)^p e^{-x}}{2}$$

$$\int_{\frac{(p-1)\pi i}{2}}^{x} \sim \int_{\frac{-1\pi i}{2}}^{x} \cosh x dx^p \quad = \frac{e^x + (-1)^p e^{-x}}{2}$$

$$\int_{0}^{x} \sim \int_{0}^{x} \tan^{-1} x \, dx^p = \frac{\tan^{-1} x}{\Gamma(1+p)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{p-2k} x^{p-2k}$$
$$+ \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2\Gamma(1+p)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{p+1-2k} x^{p+1-2k}$$
$$- \frac{1}{\Gamma(1+p)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{p}{p+1-2r} \{\psi(1+p) - \psi(2r)\} x^{p+1-2r}$$

$$\int_{0}^{x} \sim \int_{0}^{x} \cot^{-1} x \, dx^p = \frac{x^p}{\Gamma(1+p)} \cot^{-1} x - \frac{\tan^{-1} x}{\Gamma(1+p)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{p-2k} x^{p-2k}$$
$$- \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2\Gamma(1+p)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{p+1-2k} x^{p+1-2k}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(1+p)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{p}{p+1-2r} \{\psi(1+p) - \psi(2r)\} x^{p+1-2r}$$

$$\int_{0}^{x} \sim \int_{0}^{x} \tanh^{-1} x \, dx^p = \frac{\tanh^{-1} x}{\Gamma(1+p)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{p-2k} x^{p-2k}$$
$$+ \frac{\log\left(1-x^2\right)}{2\Gamma(1+p)} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{p+1-2k} x^{p+1-2k}$$
$$- \frac{1}{\Gamma(1+p)} \sum_{r=1}^{\infty} \binom{p}{p+1-2r} \{\psi(1+p) - \psi(2r)\} x^{p+1-2r}$$

(7) 副産物

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{mk+1} \binom{n}{k} = \frac{B(1+n, 1/m)}{m}$$

$$B(q, p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{p+r} \binom{q-1}{r} \quad , \quad \left(x^q\right)^{<p>} = \frac{x^{q+p}}{\Gamma(p)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{p+r} \binom{q}{r}$$

但し$B(x, y)$はベータ関数

8 項別超積分

「5 項別高階積分(三角関数､双曲線関数)」､「6 項別高階積分(逆三角関数､逆双曲線関数)」から､次の項別超積分が得られます｡

$\uparrow,\downarrow$ は天井関数と床関数を示し､ベルヌイ数とオイラー数はそれぞれ次のようであるとします｡

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\quad E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tan x\,dx^p=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,\Gamma(2k+p)}x^{2k+p-1}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tanh x\,dx^p=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,\Gamma(2k+p)}x^{2k+p-1}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sec x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|E_{2k}\right|}{\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}\quad \text{傍系}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \operatorname{sech} x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_{2k}}{\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}\quad \text{傍系}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x\sim\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cot x\,dx^p=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)\left|B_{2k}\right|}{2k\,\Gamma(2k+p)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+p-1}\qquad \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x\sim\int_{\frac{\pi}{2}}^x \csc x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|E_{2k}\right|}{\Gamma(2k+p+1)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k+p}\qquad \frac{\pi}{2}<x<\pi\quad \text{傍系}$$

$$\int_{\infty}^x\sim\int_{\infty}^x \operatorname{csch} x\,dx^p=(-1)^p 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^p}\qquad x>0$$

$$\int_{\infty}^x\sim\int_{\infty}^x \operatorname{sech} x\,dx^p=(-1)^p 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)x}}{(2k+1)^p}\qquad x>0$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tan^{-1}x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}\qquad 0<x<1$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \cot^{-1}x\,dx^p=\frac{\pi}{2}\frac{x^p}{\Gamma(1+p)}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}\qquad 0<x<1$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sin^{-1}x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}\qquad 0<x<1\quad \text{傍系}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \cos^{-1}x\,dx^p=\frac{\pi}{2}\frac{x^p}{\Gamma(1+p)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}\qquad 0<x<1\quad \text{傍系}$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \tanh^{-1}x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}\qquad 0<x<1$$

$$\int_0^x\sim\int_0^x \sinh^{-1}x\,dx^p=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+p+2)}x^{2k+p+1}\qquad 0<x<1\quad \text{傍系}$$

$$\int_0^x \sim \int_0^x sech^{-1}x\,dx^p = \frac{x^p}{\Gamma(1+p)}\left\{\log\frac{2}{x}+\psi(1+p)+\gamma\right\} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p}$$

$0<x<1$ 傍系

$$\int_0^x \sim \int_0^x csch^{-1}x\,dx^p = \frac{x^p}{\Gamma(1+p)}\left\{\log\frac{2}{x}+\psi(1+p)+\gamma\right\} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,\Gamma(2k+p+1)}x^{2k+p}$$

$0<x<1$ 傍系

9 高階微分

(1) 定義・記法

$n=1,2,3,\cdots$ について、関数 $f^{(n-1)}(x)$ の導関数を $f^{(n)}(x)$ と記述し、これを関数 $f(x)$ の**高階導関数** と言います。

また、関数 f を1つの独立変数 x について繰り返し微分することを**高階微分**と言い、次のように記述します。

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) \qquad \left\{ = \frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\right)\cdots\right)\ \frac{d}{dx}\text{は}\,n\,\text{個}\right\}$$

(2) 高階微分の基本定理

4・1・3 (高階積分の基本定理)より次の定理が成立します。

$f^{(r)}$ $r=0,1,\cdots,n$ は閉区間 I 上の連続関数 且つ f の r 階導関数とするとき

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n)}(x) \qquad x\in I$$

この定理は、**高階微分には直系しか存在しない**ことを保証するものです。

(3) 初等関数の高階微分

m が自然数のとき、関数 x^m の2階微分は次のようになります。

$$\left(x^m\right)^{(2)} = m(m-1)x^{m-2} = \frac{m!}{(m-2)!}x^{m-2}$$

従って α が正の実数のときは次のようになります。

$$\left(x^\alpha\right)^{(2)} = \frac{\alpha!}{(\alpha-2)!}x^{\alpha-2}$$

ここで実数 α の階乗はガンマ関数 $\Gamma(1+\alpha)$ で表されるので、この式は

$$\left(x^\alpha\right)^{(2)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-2)}x^{\alpha+2}$$

となります。このように計算し、初等関数について次の諸式を得ます。

$$\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n)}x^{\alpha-n} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$= (-1)^{-n}\frac{\Gamma(-\alpha+n)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-n} \qquad (\alpha < 0)$$

$$\left(e^{\pm x}\right)^{(n)} = (\pm 1)^{-n}e^{\pm x}$$

$$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\sinh x)^{(n)} = \frac{e^{x}-(-1)^{-n}e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x)^{(n)} = \frac{e^{x}+(-1)^{-n}e^{-x}}{2}$$

etc.

(4) 逆三角関数の高階微分

$\uparrow, \downarrow$ をそれぞれ天井関数、床関数とし n を自然数とするとき

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n}\frac{(n-1)!}{\left(x^{2}+1\right)^{n}}\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}(-1)^{r}{}_{n}C_{n+1-2r}\,x^{n+1-2r}$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\left(x^{2}+1\right)^{n}}\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}(-1)^{r}{}_{n}C_{n+1-2r}\,x^{n+1-2r}$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n-1}{n-1-2r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(1-x^{2}\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\cos^{-1}x\right)^{(n)} = -\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}\binom{n-1}{n-1-2r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(1-x^{2}\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

etc.

(5) 逆双曲線関数の高階微分

$\uparrow, \downarrow$ をそれぞれ天井関数、床関数とし n を自然数とするとき

$$\left(\tanh^{-1}x\right)^{(n)} = \left(\coth^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n}\frac{(n-1)!}{\left(x^{2}-1\right)^{n}}\sum_{r=1}^{n/2\uparrow}{}_{n}C_{n+1-2r}\,x^{n+1-2r}$$

$$\left(\sinh^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^{r}\binom{n-1}{n-1-2r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(x^{2}+1\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\cosh^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\sum_{r=0}^{n/2\downarrow}(-1)^{r}\binom{n-1}{n-1-2r}\frac{(2r-1)!!\,(2n-3-2r)!!\,x^{n-1-2r}}{\left(x^{2}-1\right)^{n-r-\frac{1}{2}}}$$

etc.

(6) 副産物

$$\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^{k}{}_{n}C_{n+1-2k} = -2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\{k+(n-1)\}!}{k!} = \frac{(n-1)!}{2^{n}}$$

例

$$-{}_5C_4 + {}_5C_2 - {}_5C_0 = 4$$

$$1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 4\cdot 5 +- \cdots = \frac{1}{4}$$

10 項別高階微分(三角関数、双曲線関数)

三角関数および双曲線関数のうち2階以上の高階導関数を簡単な一般式で表すことが困難な関数について、これらを級数に展開した上項別に高階微分し、以下の諸式を得ます。

↑, ↓ は天井関数と床関数を示し、ベルヌイ数とオイラー数はそれぞれ次のようであるとします。

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\quad E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

(1) テイラー展開

$$(\tan x)^{(n)} = \sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$(\tanh x)^{(n)} = \sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$(\cot x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} - \sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \qquad 0<x<\pi$$

$$(\coth x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} - \sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \qquad 0<x<\pi$$

$$(\csc x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{(2^{2k}-2)|B_{2k}|}{2k\,(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \qquad 0<x<\pi$$

$$(\mathrm{csch}\, x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!} x^{2k-n-1} \qquad 0<x<\pi$$

$$(\sec x)^{(n)} = \sum_{k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k-n)!} x^{2k-n} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$(\mathrm{sech}\, x)^{(n)} = \sum_{k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k-n)!} x^{2k-n} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

(2) フーリエ展開

$$(\tanh x)^{(n)} = (-1)^{n-1}2^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^n e^{-2kx} \qquad x > 0$$

$$(\coth x)^{(n)} = (-1)^n 2^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n e^{-2kx} \qquad x > 0$$

$$(\mathrm{csch}\, x)^{(n)} = (-1)^n 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^n e^{-(2k+1)x} \qquad x > 0$$

$$(\operatorname{sech} x)^{(n)} = (-1)^n 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (2k+1)^n e^{-(2k+1)x} \qquad x>0$$

(3) ディリクレの奇数イータ(負)と偶数ベータ(負)

また、テイラー級数とフーリエ級数を突合することにより、ディリクレの奇数イータ(負)と偶数ベータ(負)が得られます。

$$\eta(1-2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n}$$

$$\eta(1-2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{4n-1}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left\{(2n-1)! + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\}$$

$$\eta(1-2n) = \frac{\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{2n}$$

$$\beta(-2n) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k-2n-1}$$

$$\beta(-2n) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left\{(2n)! - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\right\}$$

$$\beta(-2n) = \frac{E_{2n}}{2}$$

(4) その他の副産物

$$\frac{1^n}{e^1}+\frac{2^n}{e^2}+\frac{3^n}{e^3}+\frac{4^n}{e^4}+\cdots = n! + (-1)^n\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}$$

$$\frac{1^n}{e^1}-\frac{2^n}{e^2}+\frac{3^n}{e^3}-\frac{4^n}{e^4}+-\cdots = (-1)^{n-1}\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{2k\,(2k-n-1)!}$$

$$\frac{1^n}{e^1}+\frac{3^n}{e^3}+\frac{5^n}{e^5}+\frac{7^n}{e^7}+\cdots = \frac{n!}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=\frac{n+1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{2k(2k-n-1)!}$$

$$\frac{1^n}{e^1}-\frac{3^n}{e^3}+\frac{5^n}{e^5}-\frac{7^n}{e^7}+-\cdots = \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=\frac{n+1}{2}\downarrow}^{\infty}\frac{E_{2k}}{(2k-n)!}$$

$$\frac{1^p}{e^1}+\frac{2^p}{e^2}+\frac{3^p}{e^3}+\frac{4^p}{e^4}+\cdots \fallingdotseq \Gamma(1+p) \qquad p>0$$

$$\frac{1^p}{e^1}+\frac{3^p}{e^3}+\frac{5^p}{e^5}+\frac{7^p}{e^7}+\cdots \fallingdotseq \frac{\Gamma(1+p)}{2} \qquad p>0$$

$$(2n-1)! = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(2^{2k}-2\right)|B_{2k}|}{2k(2k-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

$$(2n)! = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{2k}|B_{2k}|}{2k(2k-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

11 項別高階微分(逆三角関数、逆双曲線関数)

逆三角関数および逆双曲線関数のうち2階以上の高階導関数の一般形を得ることが困難なものについて、これらを級数に展開した上項別に高階微分し、以下の諸式を得ます。

(1) テイラー展開

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n} \qquad |x|<1$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(n)} = -\sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n} \qquad |x|<1$$

$$\left(\sin^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n} \qquad |x|<1$$

$$\left(\cos^{-1}x\right)^{(n)} = -\sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n} \qquad |x|<1$$

$$\left(\csc^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(2k+n)!}{(2k+1)!}x^{-2k-n-1} \qquad |x|>1$$

$$\left(\sec^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(2k+n)!}{(2k+1)!}x^{-2k-n-1} \qquad |x|>1$$

$$\left(\tanh^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{(2k)!}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n} \qquad |x|<1$$

$$\left(\coth^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{(n)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{(2k+1)!}x^{-2k-1-n} \qquad |x|>1$$

$$\left(\sinh^{-1}x\right)^{(n)} = \sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k+1-n)!}x^{2k+1-n} \qquad |x|<1$$

$$\left(\cosh^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+n-1)!}{\{(2k)!!\}^2}x^{-2k-n} \qquad x>1$$

$$\left(\operatorname{csch}^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n} - \sum_{k=\frac{n}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k-n)!}x^{2k-n} \qquad 0<x<1$$

$$\left(\operatorname{sech}^{-1}x\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n} - \sum_{k=\frac{n}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\,(2k-n)!}x^{2k-n} \qquad 0<x<1$$

(2) 副産物

$$\sum_{k=\frac{n-1}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+1-n)!} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{2^n}\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}(-1)^k{}_nC_{n+1-2k}$$

例

$$1\cdot 2 - 3\cdot 4 + 5\cdot 6 - 7\cdot 8 +- \cdots \quad = -\frac{1}{2}$$

12 超微分

ここでは、微分演算子のインデックス関数の定義域を拡張して超微分(非整数階の微分)を求めます。

(1) 定義・記法

$f(x)$ の非整数階導関数を$f^{(p)}(x)$と記述し、これを $f(x)$ の**超導関数**と呼びます。超導関数は無数にあるので、$f^{(p)}(x)$がどれを意味しているかはその時々の定義に従います。

関数 f を1つの独立変数 x について繰り返し非整数回微分することを**超微分**と言い、次のように記述します。

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) \qquad \left\{ = \frac{d}{dx}\sim\frac{d}{dx}f(x) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\text{は}p\text{ 個}\right\}$$

(2) 超微分の基本定理

超微分についても次のような定理が成立します。

$f^{(r)}$ $r\in[0,p]$ は閉区間 I 上の連続関数 且つ f の任意の r 階超導関数とし $a(r)$ は閉区間 $[0,p]$ 上の連続関数とするとき、$a(r), x\in I$ について

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} f^{(r)}\{a(p-r)\}\int_{a(p)}^{x}\sim\int_{a(p-r)}^{x} dx^r$$

特に$a(r)=a$ $\;$ *for all* $r\in[0,p]$ のとき

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} f^{(r)}(a)\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}$$

(3) 直系と傍系

これらの式の右辺第2項を**微分定数関数**と呼びます。そして微分定数関数がゼロのとき、左辺を**直系超微分**と呼び、$f^{(p)}(x)$ を**直系超導関数**と呼びます。反対に微分定数多項式がゼロでないとき、左辺を**傍系超微分**と呼び、右辺を**傍系超導関数**と呼びます。例えば$f(x)=e^x$ とすれば

$a\neq -\infty$ のとき、$\displaystyle \frac{d^p}{dx^p}e^x = e^x + \frac{d^p}{dx^p}\sum_{r=0}^{p-1} e^a\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)}$

右辺は微分定数関数を含むから傍系 p 階超導関数です。従って左辺は傍系 p 階微分です

$a = -\infty$ のとき、$\displaystyle \frac{d^p}{dx^p}e^x = e^x$

右辺は微分定数関数を含まないから直系 p 階超導関数、従って左辺は直系 p 階微分です

この例からも分るように、高階微分とは異なって超微分には直系と傍系が存在します。

(4) 超微分と Riemann−Liouville differintegral

関数 $f(x)$ の超積分が固定下限の場合、$f(x)$ の超微分は次式で得ることができます。これは先に $n-p$ 階積分し後から n 階微分して差し引きで p 階微分を得るもので、Riemann−Liouville differintegral と呼ばれています。

$$\frac{d^p}{dx^p}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-p-1}f(t)dt \qquad n=ceil(p)$$

この左辺も演算機能を持たないため、右辺の役割は非常に重要です。

(5) Fractional Derivative と超微分

伝統的な Fractional Derivative では、この Riemann-Liouville differintegral を用いて超導関数を求めます。例えば、

$f(x) = \log x$ の場合、

$$(\log x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \frac{d^1}{dx^1} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \log t \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} \log t \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-4\sqrt{x} \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x}} \right) - 2\sqrt{x-t} \, (\log t - 2) \right]_0^x$$

以下、延々計算

⋮

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left\{ 4\sqrt{x}(\log 2 - 1) + 2\sqrt{x}\log x \right\} = \frac{\log x + 2\log 2}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

Fractional Derivative の手法はかくも難しく、$p = 1/3$ の場合でもをこの方法で計算できるか否かは不明です。

また、$\sin x$ などの非整数階微分に Riemann-Liouville differintegral が適用できないことは積分の場合と同じです。

これに対し筆者の提唱する超微分法では、先ず、$\log x$ の超積分を求めます。

$$\int_0^x \sim \int_0^x \log x \, dx^p = \frac{\log x - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} x^p$$

微分は積分の逆演算だから、演算子のインデックスの符号を反転します。すると直ちに

$$(\log x)^{(p)} = \frac{\log x - \psi(1-p) - \gamma}{\Gamma(1-p)} x^{-p}$$

これに $p = 1/2$ を代入し

$$(\log x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log x - \psi(1/2) - \gamma}{\Gamma(1/2)} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\log x - (-\gamma - 2\log 2) - \gamma}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\log x + 2\log 2}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

と、いとも簡単に超導関数が得られます。

余談ですが、例えば $p = 2$ のときは、ガンマ関数とディガンマ関数で述べた公式

$$\frac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)} = (-1)^{n+1} n! \qquad , \qquad \Gamma(-n) = \pm\infty$$

により、次のようになります。

$$(\log x)^{(2)} = \frac{\log x - \psi(-1) - \gamma}{\Gamma(-1)} x^{-2} = -(-1)^{1+1} 1! \, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

また、$\sin x$ などの超導関数も、類似の方法により容易に得られます。

(6) 初等関数の超微分

このような方法で「9 高階微分」から次のような超微分が得られます。

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(p)}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-p)}x^{\alpha-p} \qquad (\alpha \geqq 0)$$

$$=(-1)^{-p}\frac{\Gamma(-\alpha+p)}{\Gamma(-\alpha)}x^{\alpha-p} \qquad (\alpha<0)$$

$$\left(e^{\pm x}\right)^{(p)}=(\pm 1)^{-p}e^{\pm x}$$

$$(\log x)^{(p)}=\frac{\log x-\psi(1-p)-\gamma}{\Gamma(1-p)}x^{-p}$$

$$(\sin x)^{(p)}=\sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(p)}=\cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$(\sinh x)^{(p)}=\frac{e^{x}-(-1)^{-p}e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x)^{(p)}=\frac{e^{x}+(-1)^{-p}e^{-x}}{2}$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)^{(p)}=\frac{\tan^{-1}x}{\Gamma(1-p)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{-p}{-p-2k}x^{-p-2k}$$

$$+\frac{\log\left(1+x^{2}\right)}{2\Gamma(1-p)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\binom{-p}{-p+1-2k}x^{-p+1-2k}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\binom{-p}{-p+1-2r}\{\psi(1-p)-\psi(2r)\}x^{-p+1-2r}$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)^{(p)}=-\frac{\tan^{-1}x}{\Gamma(1-p)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{-p}{-p-2k}x^{-p-2k}$$

$$-\frac{\log\left(1+x^{2}\right)}{2\Gamma(1-p)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\binom{-p}{-p+1-2k}x^{-p+1-2k}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\binom{-p}{-p+1-2r}\{\psi(1-p)-\psi(2r)\}x^{-p+1-2r}$$

(7) 副産物

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{mk+(m-1)}\binom{n}{k}=-\frac{B(1+n,-1/m)}{m(mn+m-1)} \qquad B(\,)\text{はベータ関数}$$

$$\left(x^{q}\right)^{(p)}=\frac{q+1-p}{\Gamma(1-p)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r+1-p}\binom{q}{r}\cdot x^{q-p}$$

$$B(q,-p)=-\frac{q-p}{p}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r+1-p}\binom{q-1}{r} \qquad B(\,)\text{はベータ関数}$$

13 項別超微分

「10 項別高階微分(三角関数、双曲線関数)」、「11 項別高階微分(逆三角関数、逆双曲線関数)」から、次の項別超微分が得られます。

↑, ↓は天井関数と床関数を示し、ベルヌイ数とオイラー数はそれぞれ次のようであるとします。

$$B_0=1,\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\quad E_6=-61,\ E_8=1385,\ E_{10}=-50521,\ \cdots$$

$$(\tan x)^{(p)} = \sum_{k=\lceil\frac{p+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k\,\Gamma(2k-p)} x^{2k-p-1} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$(\tanh x)^{(p)} = \sum_{k=\lceil\frac{p+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k\,\Gamma(2k-p)} x^{2k-p-1} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$(\sec x)^{(p)} = \sum_{k=\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{\Gamma(2k-p+1)} x^{2k-p} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{傍系}$$

$$(\operatorname{sech} x)^{(p)} = \sum_{k=\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}^{\infty} \frac{E_{2k}}{\Gamma(2k-p+1)} x^{2k-p} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{傍系}$$

$$(\cot x)^{(p)} = -\sum_{k=\lceil\frac{p+1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{2k\,\Gamma(2k-p)} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-p-1} \qquad \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

$$(\csc x)^{(p)} = \sum_{k=\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{\Gamma(2k-p+1)} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-p} \qquad \frac{\pi}{2}<x<\pi$$

$$(\operatorname{csch} x)^{(p)} = (-1)^{-p}2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^p}{e^{(2k+1)x}} \qquad x>0$$

$$(\operatorname{sech} x)^{(p)} = (-1)^{-p}2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)^p}{e^{(2k+1)x}} \qquad x>0$$

$$(\tan^{-1} x)^{(p)} = \sum_{k=\lceil\frac{p-1}{2}\rceil}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p} \qquad 0<x<1$$

$$(\cot^{-1} x)^{(p)} = \frac{\pi}{2}\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} - \sum_{k=\lceil\frac{p-1}{2}\rceil}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p} \qquad 0<x<1$$

$$(\sin^{-1} x)^{(p)} = \sum_{k=\lceil\frac{p-1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p} \qquad 0<x<1 \quad \text{傍系}$$

$$(\cos^{-1} x)^{(p)} = \frac{\pi}{2}\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)} - \sum_{k=\lceil\frac{p-1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p} \qquad 0<x<1 \quad \text{傍系}$$

$$(\tanh^{-1} x)^{(p)} = \sum_{k=\lceil\frac{p-1}{2}\rceil}^{\infty} \frac{(2k)!}{\Gamma(2k+2-p)} x^{2k+1-p} \qquad 0<x<1$$

$$\left(\sinh^{-1}x\right)^{(p)}=\sum_{k=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{\Gamma(2k+2-p)}x^{2k+1-p} \qquad 0<x<1 \quad 傍系$$

$$\left(\mathrm{sech}^{-1}x\right)^{(p)}=\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)}\left\{\log\frac{2}{x}+\psi(1-p)+\gamma\right\}-\sum_{k=\frac{p}{2}\uparrow}^{\infty}\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\Gamma(2k-p+1)}x^{2k-p}$$

$$0<x<1 \quad 傍系$$

$$\left(\mathrm{csch}^{-1}x\right)^{(p)}=\frac{x^{-p}}{\Gamma(1-p)}\left\{\log\frac{2}{x}+\psi(1-p)+\gamma\right\}-\sum_{k=\frac{p}{2}\uparrow}^{\infty}(-1)^k\frac{\{(2k-1)!!\}^2}{2k\Gamma(2k-p+1)}x^{2k-p}$$

$$0<x<1 \quad 傍系$$

14 対数積分等の高階積分と超微積分

この章では、二重対数関数及び次の4つ関数について高階積分と超微積分を行います。

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt \ ,\ Ci(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{\cos t}{t}dt \ ,\ Si(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt \ ,\ li(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\log t}dt$$

(1) 対数積分等の高階積分

$$\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}Ei(x)dx^n=\frac{1}{n!}\left\{x^nEi(x)-e^x\sum_{r=0}^{n-1}r!\,x^{n-1-r}\right\}$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x}Ci(x)dx^n=\frac{1}{n!}\left\{Ci(x)x^n-\sin x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r(2r)!\,x^{n-1-2r}\right.$$

$$\left.+\cos x\sum_{r=0}^{(n-2)/2\downarrow}(-1)^r(2r+1)!\,x^{n-2-2r}\right\} \qquad n\geqq 2$$

$$\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}Si(x)dx^n=\frac{1}{n!}\left\{Si(x)x^n+\cos x\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r(2r)!\,x^{n-1-2r}\right.$$

$$\left.+\sin x\sum_{r=0}^{(n-2)/2\downarrow}(-1)^r(2r+1)!\,x^{n-2-2r}\right\}$$

$$-\sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow}(-1)^r\frac{x^{n-1-2r}}{(2r+1)(n-1-2r)!}$$

$$\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}li(x)dx^n=\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_nC_r x^{n-r}Ei\{(r+1)\log x\}$$

$$\int_{0}^{x}\cdots\int_{0}^{x}\log|\log x|dx^n=\frac{1}{n!}\left\{x^n\log|\log x|+\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_nC_r x^{n-r}Ei(r\log x)\right\}$$

(2) 対数積分等の超微積分

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}li(x)dx^p=\frac{1}{\Gamma(1+p)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{p}{r}x^{p-r}Ei\{(r+1)\log x\} \qquad x\geqq 0$$

$$\{li(x)\}^{(p)}=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-p}{r}x^{-p-r}Ei\{(r+1)\log x\} \qquad x\geqq 0$$

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\log|\log x|dx^p=\frac{1}{\Gamma(1+p)}\left\{x^p\log|\log x|+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{p}{r}x^{p-r}Ei(r\log x)\right\}$$

$$\left(\log|\log x|\right)^{(p)}=\frac{1}{x^p\Gamma(1-p)}\left\{\log|\log x|+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{-p}{r}\frac{Ei(r\log x)}{x^r}\right\}\qquad x\geqq 0$$

15 楕円積分の項別高階微積分と項別超微積分

第1種～第3種の楕円積分は $|x|\leqq 1$, $|k|\leqq 1$, $|c|\leqq 1$ として次式で示されます。

$$F(x,k)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad ,\quad E(x,k)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$$

$$\Pi(x,c,k)=\int_0^x\frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

本章ではこれらを2重級数または3重級数に展開しこれらを用いて楕円とレムニスケートの弧長を計算します。次いで項別高階微積分を行い、更に項別超微積分を行います。

(1) 2重(3重)級数展開

$$F(x,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+1}$$

$$E(x,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r}{2r+1}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r+1}$$

$$\Pi(x,c,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r}{2r+1}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r+1}$$

(2) 項別高階微積分

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x F(x,k)dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+n+1}$$

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x E(x,k)dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r+n+1}$$

$$\int_0^x\!\!\cdots\!\int_0^x \Pi(x,c,k)dx^n=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r+n+1)!}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r+n+1}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}F(x,k)=\sum_{r=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r-n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r-n+1}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}E(x,k)=\sum_{r=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r-n+1)!}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r-n+1}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\Pi(x,c,k)=\sum_{r=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r(2r)!}{(2r-n+1)!}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r-n+1}$$

(3) 項別超微積分

$$\int_0^x\!\!\sim\!\int_0^x F(x,k)dx^p=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r+p+2)}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r+p+1}$$

$$\int_0^x\!\!\sim\!\int_0^x E(x,k)dx^p=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r+p+2)}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r+p+1}$$

$$\int_0^x \sim \int_0^x \Pi(x,c,k)\,dx^p = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{(-1)^r\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r+p+2)} c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t} k^{2t} x^{2r+p+1}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}F(x,k) = \sum_{r=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r-p+2)}\binom{-1/2}{r-s}\binom{-1/2}{s}k^{2s}x^{2r-p+1}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}E(x,k) = \sum_{r=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^r\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r-p+2)}\binom{-1/2}{r-s}\binom{1/2}{s}k^{2s}x^{2r-p+1}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}\Pi(x,c,k) = \sum_{r=\frac{p-1}{2}\uparrow}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^r\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r-n+2)}c^{r-s}\binom{-1/2}{s-t}\binom{-1/2}{t}k^{2t}x^{2r-p+1}$$

16 2関数の積の高階積分

2つの関数の積について、次の定理を得ます。

(1) 定理16･1･2

$r=1,2,\cdots,m+n-1$ について $f^{\langle r\rangle}$ は $f(x)$ の任意の r 階原始関数であり $g^{(r)}$ は $g(x)$ の r 階導関数とする。$f_{a_k}^{\langle r\rangle}$, $g_{a_k}^{(r)}$ はそれぞれ $f^{\langle r\rangle}$, $g^{(r)}$ の a_k for $k=1,2,\cdots,n$ における関数値とし、$B(n,m)$はベータ関数する。すると次式が成立する。

$$\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x f^{\langle 0\rangle} g^{(0)}\,dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{\langle n+r\rangle} g^{(r)}$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{-n+r}{s} f_{a_{n-r}}^{\langle n-r+s\rangle} g_{a_{n-r}}^{(s)} \int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=s}^{r-1} {}_tC_s \cdot {}_{m+n-1-r+t}C_{m-1}\, f_{a_{n-r}}^{\langle m+n-r+s\rangle} g_{a_{n-r}}^{(m+s)} \int_{a_n}^x\cdots\int_{a_{n-r+1}}^x dx^r$$

$$+\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_{a_n}^x\cdots\int_{a_1}^x f^{\langle m+k\rangle} g^{(m+k)}\,dx^n$$

特に $a_r=a$ for $r=1,2,\cdots,n$ かつ

$f^{\langle r\rangle}(a)=0$ $(r=1,2,\cdots,m+n-1)$ or $g^{(s)}(a)=0$ $(s=0,1,\cdots,m+n-2)$ のとき、

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^{\langle 0\rangle} g^{(0)}\,dx^n = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-n}{r} f^{\langle n+r\rangle} g^{(r)} + \frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n-1}C_k}{m+k}\int_a^x\cdots\int_a^x f^{\langle m+k\rangle} g^{(m+k)}\,dx^n$$

(2) 2関数の積の高階積分

この定理を用いて、以下の諸式を得ます。

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x\cdots\int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^p(cx+d)^q\,dx^n$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}\frac{(1/a)^{n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p+n+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p+n+r}}{(cx+d)^{r-q}}$$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^x\cdots\int_{-\frac{b}{a}}^x (ax+b)^p(cx+d)^m\,dx^n$$

$$= \sum_{r=0}^{m}\binom{-n}{r}\frac{(1/a)^{n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p+n+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p+n+r}}{(cx+d)^{r-m}}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^{\alpha} \log x\, dx^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} \frac{\log x - \psi(1+n+r) - \gamma}{\Gamma(1+n+r)} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha+n}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x x^{m} \log x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\log x - \psi(1+n+r) - \gamma}{\Gamma(1+n+r)} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m+n}$$

$$\int_{a_n}^x \cdots \int_{a_1}^x x^{m} \sin x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \sin\left\{ x - \frac{(n+r)\pi}{2} \right\}$$

$$\int_{a_n}^x \cdots \int_{a_1}^x x^{m} \cos x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \cos\left\{ x - \frac{(n+r)\pi}{2} \right\}$$

$$\int_{a_n}^x \cdots \int_{a_1}^x x^{m} \sinh x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \frac{e^x - (-1)^{n+r} e^{-x}}{2}$$

$$\int_{a_n}^x \cdots \int_{a_1}^x x^{m} \cosh x\, dx^n = \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r} \frac{e^x + (-1)^{n+r} e^{-x}}{2}$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x \log^2 x\, dx^n = \log x \left(\log x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(1+n+r)} x^n \left(\log x - \sum_{k=1}^{n+r} \frac{1}{k} \right)$$

$$\int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x e^x x^{\alpha} dx^n = \frac{x^{\alpha}}{(-x)^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_r\, \Gamma(n-r+\alpha, -x) x^r}{(n-1)!} + R$$

$$R = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ 2i \sin \alpha\pi \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}C_r\, \Gamma(n-r+\alpha) x^r}{(n-1)!} & x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x e^x x^{m} dx^n = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r}$$

$$\int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x e^x \log x\, dx^n = e^x \left\{ \log|x| + \sum_{r=0}^{n-2} \sum_{s=0}^{n-2-r} \frac{s!\, x^r}{(r+s+1)!} \right\} - Ei(x) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x^r}{r!}$$

$$\int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x e^x \sin x\, dx^n = \left(\sin\frac{\pi}{4} \right)^n e^x \sin\left(x - \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\int_{-\infty}^x \cdots \int_{-\infty}^x e^x \cos x\, dx^n = \left(\sin\frac{\pi}{4} \right)^n e^x \cos\left(x - \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\int_{\infty}^x \cdots \int_{\infty}^x e^{-x} x^{\alpha} dx^n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r {}_{n-1}C_r\, \Gamma(n-r+\alpha, x) x^r$$

$$\int_{\infty}^x \cdots \int_{\infty}^x e^{-x} x^{m} dx^n = \frac{(-1)^n}{e^x} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{-n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r}$$

$$\int_{\infty}^x \cdots \int_{\infty}^x e^{-x} \log x\, dx^n = (-1)^n e^{-x} \left\{ \log|x| + \sum_{r=0}^{n-2} \sum_{s=0}^{n-2-r} \frac{s!\,(-x)^r}{(r+s+1)!} \right\}$$

$$- (-1)^n Ei(-x) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-x)^r}{r!}$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} e^{-x}\sin x\,dx^n = (-1)^n\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n e^{-x}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\int_{\infty}^{x}\cdots\int_{\infty}^{x} e^{-x}\cos x\,dx^n = (-1)^n\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^n e^{-x}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

(3) 副産物

$$\sum_{k=0}^{n/2\downarrow}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_{2k} = \frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n/2\uparrow}\frac{(-1)^k}{2k}{}_nC_{2k-1} = \frac{1}{n+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n-1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} - 1\right\}$$

例

$$\frac{{}_8C_0}{1}-\frac{{}_8C_2}{3}+\frac{{}_8C_4}{5}-\frac{{}_8C_6}{7}+\frac{{}_8C_8}{9} = \frac{16}{9}$$

$$-\frac{{}_8C_1}{2}+\frac{{}_8C_3}{4}-\frac{{}_8C_5}{6}+\frac{{}_8C_7}{8} = \frac{5}{3}$$

17 2関数の積の超積分

2つの関数の積について、次の定理を得ます。

(1) 定理17･1･2

r, p を正数、$f^{<r>}$ は $f(x)$ の任意の r 階原始関数、$g^{<r>}$ は $g(x)$ の r 階導関数、$B(n,m)$ はベータ関数とする。このときある定数 a が存在して

$$f^{<r>}(a)=0 \quad r\in[0,m+p] \qquad or \qquad g^{(s)}(a)=0 \quad s\in[0,m+p-1]$$

であれば、次式が成立する。

$$\int_a^x\!\sim\!\int_a^x fg\,dx^p = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{-p}{r} f^{<p+r>}g^{(r)} + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{p-1}{k}\int_a^x\!\sim\!\int_a^x f^{<m+k>}g^{(m+k)}dx^p$$

(2) 2関数の積の超積分

この定理を用いて、以下の諸式を得ます。

$$\int_{-\frac{b}{a}}^{x}\!\sim\!\int_{-\frac{b}{a}}^{x}(ax+b)^p(cx+d)^q dx^s$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-s}{r}\frac{(1/a)^{s+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p+s+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p+s+r}}{(cx+d)^{r-q}}$$

$$\int_{-\frac{b}{a}}^{x}\!\sim\!\int_{-\frac{b}{a}}^{x}(ax+b)^p(cx+d)^m dx^s$$

$$= \sum_{r=0}^{m}\binom{-s}{r}\frac{(1/a)^{s+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p+s+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p+s+r}}{(cx+d)^{r-m}}$$

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x} x^{\alpha}\log x\,dx^{p} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-p}{r}\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha+p}$$

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x} x^{m}\log x\,dx^{p} = \sum_{r=0}^{m}\binom{-p}{r}\frac{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma}{\Gamma(1+p+r)}\,\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m+p}$$

$$\int_{a_p}^{x}\sim\int_{a_0}^{x} x^{m}\sin x\,dx^{p} = \sum_{r=0}^{m}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\sin\left\{x-\frac{(p+r)\pi}{2}\right\}$$

$$\int_{a_p}^{x}\sim\int_{a_0}^{x} x^{m}\cos x\,dx^{p} = \sum_{r=0}^{m}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\cos\left\{x-\frac{(p+r)\pi}{2}\right\}$$

$$\int_{a_p}^{x}\sim\int_{a_0}^{x} x^{m}\sinh x\,dx^{p} = \sum_{r=0}^{m}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\,\frac{e^{x}-(-1)^{p+r}e^{-x}}{2}$$

$$\int_{a_p}^{x}\sim\int_{a_0}^{x} x^{m}\cosh x\,dx^{p} = \sum_{r=0}^{m}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\,\frac{e^{x}+(-1)^{p+r}e^{-x}}{2}$$

$$\int_{0}^{x}\sim\int_{0}^{x}\log^{2}x\,dx^{p} = \frac{x^{p}\{\log x-\psi(1+p)-\gamma\}\log x}{\Gamma(1+p)}$$

$$+\,x^{p}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\binom{-p}{r}\frac{\{\log x-\psi(1+p+r)-\gamma\}\Gamma(r)}{\Gamma(1+p+r)}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\sim\int_{-\infty}^{x} e^{x}x^{\alpha}dx^{p} = \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(p)}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p-1}{r}\Gamma(p-r+\alpha,\,-x)x^{r}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\sim\int_{-\infty}^{x} e^{x}x^{m}dx^{p} = e^{x}\sum_{r=0}^{m}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\sim\int_{-\infty}^{x} e^{x}\sin x\,dx^{p} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{p}e^{x}\sin\left(x-\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{x}\sim\int_{-\infty}^{x} e^{x}\cos x\,dx^{p} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{p}e^{x}\cos\left(x-\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\int_{\infty}^{x}\sim\int_{\infty}^{x} e^{-x}x^{\alpha}dx^{p} = \frac{(-1)^{p}}{\Gamma(p)}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\binom{p-1}{r}\Gamma(p-r+\alpha\,,x)x^{r}$$

$$\int_{\infty}^{x}\sim\int_{\infty}^{x} e^{-x}x^{m}dx^{p} = \frac{(-1)^{p}}{e^{x}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{r}\binom{-p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}$$

$$\int_{\infty}^{x}\sim\int_{\infty}^{x} e^{-x}\sin x\,dx^{p} = (-1)^{p}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{p}e^{-x}\sin\left(x+\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\int_{\infty}^{x}\sim\int_{\infty}^{x} e^{-x}\cos x\,dx^{p} = (-1)^{p}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{p}e^{-x}\cos\left(x+\frac{p\pi}{4}\right)$$

(3) 副産物

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}\binom{p}{2k} = \frac{1}{p+1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p-1}\sin\frac{(p+1)\pi}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k}\binom{p}{2k-1} = \frac{1}{p+1}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p-1}\cos\frac{(p+1)\pi}{4}-1\right\}$$

18 2関数の積の高階微分

定理16･1･2から次のライプニッツ則を導出します。

定理18･1･1 (ライプニッツ)

関数 $f(x), g(x)$ が共に n 回微分可能なとき、次式が成立する。

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

(2) 2関数の積の高階微分

この定理を用いて以下の諸式を得ます。$p>0$, αは実数、m は非負の整数です。

また、$\alpha = -1,-2,-3,\cdots$ のときは次のように読み替えるものとします。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} \longrightarrow (-1)^{-r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)}$$

$$\left\{(ax+b)^p(cx+d)^q\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-q}}$$

$$\left\{(ax+b)^p(cx+d)^m\right\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{(1/a)^{-n+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p-n+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p-n+r}}{(cx+d)^{r-m}}$$

$$\left(x^\alpha \log x\right)^{(n)} = -\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(n-r)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-n} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n)}x^{\alpha-n}\log x$$

$$\left(x^m \log x\right)^{(n)} = -\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(n-r)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{\alpha-n} \qquad n > m=0,1,2,3,\cdots$$

$$\left(x^\alpha \sin x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}$$

$$\left(x^\alpha \cos x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}$$

$$\left(x^m \sin x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\sin\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}$$

$$\left(x^m \cos x\right)^{\{n\}} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\cos\left\{x+\frac{(n-r)\pi}{2}\right\}$$

$$\left(x^\alpha \sinh x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\frac{e^x-(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2}$$

$$\left(x^\alpha \cosh x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r}\frac{e^x+(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2}$$

$$\left(x^m \sinh x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^x-(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2}$$

$$\left(x^m \cosh x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^x+(-1)^{-(n-r)}e^{-x}}{2}$$

$$\left(\log^2 x\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{2\Gamma(n)\log x - \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\Gamma(n-r)\Gamma(r)\right\}$$

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{(n)} = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r}$$

$$\left(e^x x^m\right)^{(n)} = e^x \sum_{r=0}^{m} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r}$$

$$\left(e^x \log x\right)^{(n)} = e^x \log x + e^x \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(r)}{x^r}$$

$$\left(e^x \sin x\right)^{(n)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^x \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^x \cos x\right)^{(n)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^x \cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^x \sinh x\right)^{(n)} = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{e^x - (-1)^{-r} e^{-x}}{2}$$

$$\left(e^x \cosh x\right)^{(n)} = e^x \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{e^x + (-1)^{-r} e^{-x}}{2}$$

$$\left(e^{-x} x^\alpha\right)^{(n)} = e^{-x} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{-(n-r)} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} x^{\alpha-r}$$

$$\left(e^{-x} x^m\right)^{(n)} = e^{-x} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{-(n-r)} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)} x^{m-r}$$

$$\left(e^{-x} \log x\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{-n}}{e^x} \left\{\log x - \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(r)}{x^r}\right\}$$

$$\left(e^{-x} \sin x\right)^{(n)} = \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^{-x} \sin\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^{-x} \cos x\right)^{(n)} = \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-n} e^{-x} \cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^{-x} \sinh x\right)^{(n)} = e^{-x} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{-n+r} \binom{n}{r} \frac{e^x - (-1)^{-r} e^{-x}}{2}$$

$$\left(e^{-x} \cosh x\right)^{(n)} = e^{-x} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{-n+r} \binom{n}{r} \frac{e^x + (-1)^{-r} e^{-x}}{2}$$

$$\left(\sin^2 x\right)^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(n)} = 2^{n-1} \cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(\sin^3 x\right)^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(\cos^3 x\right)^{(n)} = \frac{3}{4} \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

etc .

(3) 副産物

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} (-1)^r {}_nC_{2r} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4} \quad , \quad \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} (-1)^r {}_nC_{2r+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} {}_nC_{2r} = 2^{n-1} \quad , \quad \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} {}_nC_{2r+1} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{r=0}^{n/2\downarrow} 2^{2r-1}{}_nC_{2r} = \frac{3^n+(-1)^n}{4} \quad , \quad \sum_{r=0}^{(n-1)/2\downarrow} 2^{2r}{}_nC_{2r+1} = \frac{3^n-(-1)^n}{4}$$

19 2関数の積の超微分

定理16･1･2から次のような超微分に関するライプニッツ則を導出します。

定理19･1･1

$B(x,y)$をベータ関数、p を非負の実数とする。そして$r=0,1,2,\cdots$ について$f^{<-p+r>}$は$f(x)$の任意の超原始関数であり$g^{(r)}$は $g(x)$ の r 階導関数とする。すると次式が成立する。

$$\{f(x)g(x)\}^{(p)} = \sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r} f^{(p-r)}(x)g^{(r)}(x) + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\{f^{<m+k>}(x)g^{(m+k)}(x)\}^{(p)}$$

特に$n=0,1,2,\cdots$ のとき

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \qquad \text{(ライプニッツ)}$$

(2) 2関数の積の超微分

この定理を用いて以下の諸式を得ます。$p>0$, α は実数、m は非負の整数です。

また、$\alpha=-1,-2,-3,\cdots$ のときは次のように読み替えるものとします。

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)} \longrightarrow (-1)^{-r}\frac{\Gamma(-\alpha+r)}{\Gamma(-\alpha)}$$

$$\{(ax+b)^p(cx+d)^q\}^{(s)} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{s}{r}\frac{(1/a)^{-s+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+p-s+r)\Gamma(1+q-r)}\frac{(ax+b)^{p-s+r}}{(cx+d)^{r-q}}$$

$$\{(ax+b)^p(cx+d)^m\}^{(s)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{s}{r}\frac{(1/a)^{-s+r}}{(1/c)^r}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+p-s+r)\Gamma(1+m-r)}\frac{(ax+b)^{p-s+r}}{(cx+d)^{r-m}}$$

$$(x^\alpha\log x)^{(p)} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\frac{\log x-\psi(1-p+r)-\gamma}{\Gamma(1-p+r)}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-p}$$

$$(x^m\log x)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\log x-\psi(1-p+r)-\gamma}{\Gamma(1-p+r)}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-p}$$

$$(x^m\sin x)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\sin\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}$$

$$(x^m\cos x)^{(p)} = \sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\cos\left\{x+\frac{(p-r)\pi}{2}\right\}$$

$$(x^m\sinh x)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^x-(-1)^{-p+r}e^{-x}}{2}$$

$$(x^m\cosh x)^{\{p\}} = \sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}\frac{e^x+(-1)^{-p+r}e^{-x}}{2}$$

$$\left(\log^2 x\right)^{(p)} = \frac{x^{-p}\log x\left\{\log x - \psi(1-p) - \gamma\right\}}{\Gamma(1-p)}$$

$$- x^{-p}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{p}{r}\frac{\left\{\log x - \psi(1-p+r) - \gamma\right\}\Gamma(r)}{\Gamma(1-p+r)}$$

$$\left(e^x x^\alpha\right)^{(p)} = e^x\sum_{r=0}^{m-1}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r} + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+k}\binom{-p-1}{k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}\left(e^x x^{\alpha-m-k}\right)^{(p)}$$

$$\left(e^x x^m\right)^{(p)} = e^x\sum_{r=0}^{m}\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}$$

$$\left(e^x \sin x\right)^{(p)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^x \sin\left(x+\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^x \cos x\right)^{(p)} = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^x \cos\left(x+\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^x \sinh x\right)^{(p)} = e^x\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\frac{e^x - (-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$\left(e^x \cosh x\right)^{(p)} = e^x\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r}\frac{e^x + (-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$\left(e^{-x} x^\alpha\right)^{(p)} = \frac{(-1)^{-p}}{e^x}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-r)}x^{\alpha-r} + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{1}{B(-p,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m+k}\binom{-p-1}{k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-m-k)}\left(\frac{x^{\alpha-m-k}}{e^x}\right)^{(p)}$$

$$\left(e^{-x} x^m\right)^{(p)} = \frac{(-1)^{-p}}{e^x}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{p}{r}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+m-r)}x^{m-r}$$

$$\left(e^{-x} \sin x\right)^{(p)} = (-1)^{-p}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^{-x} \sin\left(x-\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^{-x} \cos x\right)^{(p)} = (-1)^{-p}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-p} e^{-x} \cos\left(x-\frac{p\pi}{4}\right)$$

$$\left(e^{-x} \sinh x\right)^{(p)} = e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{-p+r}\binom{p}{r}\frac{e^x - (-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$\left(e^{-x} \cosh x\right)^{(p)} = e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{-p+r}\binom{p}{r}\frac{e^x + (-1)^{-r}e^{-x}}{2}$$

$$\left(\sin^2 x\right)^{(p)} = -2^{p-1}\cos\left(2x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\left(\cos^2 x\right)^{(p)} = 2^{p-1}\cos\left(2x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\left(\sin^3 x\right)^{(p)} = \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) - \frac{3^p}{4}\sin\left(3x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\left(\cos^3 x\right)^{(p)} = \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{p\pi}{2}\right) + \frac{3^p}{4}\cos\left(3x+\frac{p\pi}{2}\right)$$

etc .

(3) 副産物

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k} = 2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{2k+1} = 2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{p\pi}{4}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{2r} = 2^{p-1} \quad , \quad \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{2r+1} = 2^{p-1} \quad , \quad \sum_{r=0}^{\infty}\binom{p}{r} = 2^p \qquad p>-1$$

20 多関数の積の高階微積分

20･1 多関数の積の高階微分

定理18･1･1(ライプニッツ則)を用いて次の定理を証明します。

定理20･1･1

関数 $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$ とするとき、次式が成立する。

$$\left(f_1 f_2 \cdots f_\lambda\right)^{(n)} = \sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_1^{(n-r_1)} f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}$$

定理20･1･2

$f^{(r)}$ を関数 $f(x)$ の r 階導関数とし λ を自然数とするとき、次式が成立する。

$$\left\{f^{\lambda}(x)\right\}^{(n)} = \sum_{r_1=0}^{n}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f^{(n-r_1)} f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})}$$

例

$$\left(x^{\alpha}e^{x}\sin x\right)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{r}\binom{n}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n+r)}x^{\alpha-n+r}e^{x}\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$\left\{\log^3 x\right\}^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{3(n-1)!}{x^n}\log^2 x + (-1)^n\frac{3\log x}{x^n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{n!}{(n-r)r} + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\sum_{r=2}^{n-1}\sum_{s=1}^{r-1}\frac{n!}{(n-r)(r-s)s}$$

cosx* , *sinx の冪の高階微分

$$\left(\cos^m x\right)^{(n)} = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}{}_mC_r\,(m-2r)^n\cos\left\{(m-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$\left(\sin^m x\right)^{(n)} = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}{}_mC_r\,(m-2r)^n\cos\left\{(m-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$\left(\cos^{\alpha} x\right)^{(n)} = \frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(\alpha-2r)^n\cos\left\{(\alpha-2r)x+\frac{n\pi}{2}\right\} \qquad \alpha>0$$

$$\left(\sin^{\alpha} x\right)^{(n)} = \frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}(\alpha-2r)^n\cos\left\{(\alpha-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n\pi}{2}\right\} \qquad \alpha>0$$

20・2 多関数の積の高階積分

定理16・1・2 と 定理20・1・1 から次の定理を得ます。

定理20・2・1

関数 $f_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$、$f_k(x)$ の任意の r 階原始関数を $f_k^{<r>}$、m,n を自然数、$B(m,n)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$f_1^{<r>}(a)=0$ $(r=1,2,\cdots,m+n-1)$ であるか、もしくは、少なくとも1つの $k>1$ について

$f_k^{(s)}(a)=0$ $(s=0,1,\cdots,m+n-2)$ であるならば、次式が成立する。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f_1 f_2\cdots f_\lambda dx^n=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{\langle n+r_1\rangle}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{{}_{n-1}C_{k_1}}{m+k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\int_a^x\cdots\int_a^x f_1^{\langle m+k_1\rangle}f_2^{(m+k_1-k_2)}f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})}dx^n$$

定理20・2・2

関数 $f(x)$ の r 階導関数を $f^{(r)}$、$f(x)$ の任意の r 階原始関数を $f^{<r>}$、m,n を自然数、$B(m,n)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$$f^{<r>}(a)=0\ \ (r=1,2,\cdots,m+n-1)\quad or\quad f^{(s)}(a)=0\ \ (s=0,1,\cdots,m+n-2)$$

であるならば、2以上の自然数 λ について次式が成立する。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x f^\lambda dx^n=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-n}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f^{\langle n+r_1\rangle}f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})}+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{k_1=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{{}_{n-1}C_{k_1}}{m+k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\int_a^x\cdots\int_a^x f^{\langle m+k_1\rangle}f^{(m+k_1-k_2)}f^{(k_2-k_3)}\cdots f^{(k_{\lambda-1})}dx^n$$

例

$$\int_{-\infty}^x\cdots\int_{-\infty}^x x^\alpha e^x\sin x\,dx^n=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{r}\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+r)}x^{\alpha+n+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)+R_m^n$$

$$R_m^n=\frac{(-1)^m}{B(n,m)}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m+r}\frac{{}_{n-1}C_r}{m+r}\binom{m+r}{s}\int_{-\infty}^x\cdots\int_{-\infty}^x\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)}x^{\alpha+m+r}e^x\sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right)dx^n$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\log^3x\,dx^n=\frac{\log x-\psi(1+n)-\gamma}{\Gamma(1+n)}x^n(\log x)^2$$
$$-\ 2x^n\log x\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\binom{-n}{r}\frac{\log x-\psi(1+n+r)-\gamma}{\Gamma(1+n+r)}\Gamma(r)$$
$$+x^n\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s=1}^{r-1}(-1)^r\binom{-n}{r}\binom{r}{s}\frac{\log x-\psi(1+n+r)-\gamma}{\Gamma(1+n+r)}\Gamma(r-s)\Gamma(s)$$

$\cos^m x, \sin^m x$ の高階積分

$$\int_{\frac{(n-1)\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{0\pi}{2}}^{x}\cos^{2m+1}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\cos\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{x}\cdots\int_{\frac{2\pi}{2}}^{x}\int_{\frac{1\pi}{2}}^{x}\sin^{2m+1}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^n}\sin\left\{(2m-2r+1)x-\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}\cos^{2m}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_m}{(2m-2r)^n}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{n\pi}{2}\right\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}dx^n$$

$$\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}\sin^{2m}x\,dx^n=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m}C_m}{(2m-2r)^n}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{n\pi}{2}\right\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\int_{a_n}^{x}\cdots\int_{a_1}^{x}dx^n$$

ここで $a_1,a_2,\cdots,a_n$ は次の超越方程式の解である。

$$\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_m}{(2m-2r)^k}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{k\pi}{2}\right\}=0\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m}C_m}{(2m-2r)^k}\cos\left\{(2m-2r)x-\frac{k\pi}{2}\right\}=0\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\int_0^x\cos^{\alpha}x\,dx=\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{\alpha-2r}\sin\{(\alpha-2r)x\}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x\sin^{\alpha}x\,dx=\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha}{r}\frac{1}{\alpha-2r}\sin\left\{(\alpha-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\int_0^x\cos^{2m}x\,dx=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}x$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x\sin^{2m}x\,dx=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{m-r}\frac{{}_{2m}C_r}{2m-2r}\sin\{(2m-2r)x\}+\frac{{}_{2m}C_m}{2^{2m}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

21　多関数の積の超微積分

21･1　多関数の積の超積分

定理20･2･1から次の定理を得ます。

定理21･1･1

p,r を正数、m を自然数、関数 $f_k(x)$　$(k=0,1,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$ 、$f_k(x)$ の任意の r 階原始関数を $f_k^{\langle r\rangle}$ 、$B(p,m)$ をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して $f_1^{\langle r\rangle}(a)=0$　$r\in[0,m+p]$ であるか、もしくは、少なくとも1つの $k>1$ について $f_k^{(s)}(a)=0$　$s\in[0,m+p-1]$ であるならば、次式が成立する。

$$\int_a^x\sim\int_a^x f_1f_2\cdots f_\lambda\,dx^p=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{-p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}f_1^{\langle p+r_1\rangle}f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$

$$\times \int_a^x \sim \int_a^x f_1^{\langle m+k_1 \rangle} f_2^{(m+k_1-k_2)} f_3^{(k_2-k_3)} \cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})} dx^p$$

定理21・1・2

p , r を正数、m を自然数、関数$f(x)$の r 階導関数を $f^{(r)}$ 、$f(x)$の任意の r 階原始関数を $f^{\langle r \rangle}$ 、$B(p,m)$をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$$f^{\langle r \rangle}(a)=0 \quad r \in [0, m+p] \qquad or \qquad f^{(s)}(a)=0 \quad s \in [0, m+p-1]$$

であるならば、2以上の自然数 λ について次式が成立する。

$$\int_a^x \sim \int_a^x f^\lambda dx^p = \sum_{r_1=0}^{m-1} \sum_{r_2=0}^{r_1} \cdots \sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}} \binom{-p}{r_1} \binom{r_1}{r_2} \cdots \binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f^{\langle p+r_1 \rangle} f^{(r_1-r_2)} \cdots f^{(r_{\lambda-1})} + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(p,m)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{m+k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \cdots \sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}} \frac{1}{m+k_1} \binom{p-1}{k_1} \binom{m+k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \cdots \binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$

$$\times \int_a^x \sim \int_a^x f^{\langle m+k_1 \rangle} f^{(m+k_1-k_2)} f^{(k_1-k_2)} \cdots f^{(k_{\lambda-1})} dx^p$$

例

$$\int_{-\infty}^x \sim \int_{-\infty}^x x^\alpha e^x \sin x \, dx^p = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{r} \binom{-p}{r} \binom{r}{s} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+p+r)} x^{\alpha+p+r} e^x \sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right) + R_m^p$$

$$R_m^p = \frac{(-1)^m}{B(p,m)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m+r} \binom{p-1}{r} \frac{{}_{m+r}C_s}{m+r} \int_{-\infty}^x \sim \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m+r)} x^{\alpha+m+r} e^x \sin\left(x+\frac{s\pi}{2}\right) dx^p$$

$$\int_0^x \sim \int_0^x \log^3 x \, dx^p = \frac{\log x - \psi(1+p) - \gamma}{\Gamma(1+p)} x^p (\log x)^2$$

$$- 2x^p \log x \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{-p}{r} \frac{\log x - \psi(1+p+r) - \gamma}{\Gamma(1+p+r)} \Gamma(r)$$

$$+ x^p \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^r \binom{-p}{r} \binom{r}{s} \frac{\log x - \psi(1+p+r) - \gamma}{\Gamma(1+p+r)} \Gamma(r-s)\Gamma(s)$$

$\cos^m x$, $\sin^m x$ の超積分

$$\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(0)}^x \cos^{2m+1} x \, dx^p = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{m} \frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^p} \cos\left\{(2m-2r+1)x - \frac{p\pi}{2}\right\}$$

$$\int_{a(p)}^x \sim \int_{a(0)}^x \sin^{2m+1} x \, dx^p = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^{m-r} {}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)^p} \sin\left\{(2m-2r+1)x - \frac{p\pi}{2}\right\}$$

$a(s)$ $s \in [0,p]$ は $\cos^{2m+1} x$ または $\sin^{2m+1} x$ の直系超原始関数の零点である。

21・2 多関数の積の超微分

定理21・1・1から次の定理を得ます。

定理21・2・1

p , r を正数、m を自然数、関数 $f_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,\lambda)$ の r 階導関数を $f_k^{(r)}$ 、$f_k(x)$ の任意の r 階原始関数を $f_k^{\langle r \rangle}$ 、$B(p,m)$をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$f_1^{<r>}(a)=0 \quad r\in[0,m-p]$ であるか、もしくは、少なくとも1つの $k>1$ について

$f_k^{(s)}(a)=0 \quad s\in[0,m-p-1]$ であるならば、次式が成立する。

$$\left(f_1 f_2 \cdots f_\lambda\right)^{(p)}=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f_1^{(p-r_1)} f_2^{(r_1-r_2)}\cdots f_\lambda^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{-p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\left\{f_1^{\langle m+k_1\rangle} f_2^{(m+k_1-k_2)} f_3^{(k_2-k_3)}\cdots f_\lambda^{(k_{\lambda-1})}\right\}^{(p)}$$

定理21・2・2

p , r を正数、m を自然数、関数$f(x)$の r 階導関数を $f^{(r)}$ 、$f(x)$の任意の r 階原始関数を$f^{\langle r\rangle}$、$B(p,m)$をベータ関数とする。このとき、ある数 a が存在して

$$f^{<r>}(a)=0 \quad r\in[0,m-p] \quad or \quad f^{(s)}(a)=0 \quad s\in[0,m-p-1]$$

であるならば、2以上の自然数 λ について次式が成立する。

$$\left(f^{\lambda}\right)^{(p)}=\sum_{r_1=0}^{m-1}\sum_{r_2=0}^{r_1}\cdots\sum_{r_{\lambda-1}=0}^{r_{\lambda-2}}\binom{p}{r_1}\binom{r_1}{r_2}\cdots\binom{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} f^{\langle p+r_1\rangle} f^{(r_1-r_2)}\cdots f^{(r_{\lambda-1})}+R_m^p$$

$$R_m^p=\frac{(-1)^m}{B(-p,m)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{m+k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_{\lambda-1}=0}^{k_{\lambda-2}}\frac{1}{m+k_1}\binom{-p-1}{k_1}\binom{m+k_1}{k_2}\binom{k_2}{k_3}\cdots\binom{k_{\lambda-2}}{k_{\lambda-1}}$$
$$\times\left\{f^{\langle m+k_1\rangle} f^{(m+k_1-k_2)} f^{(k_2-k_3)}\cdots f^{(k_{\lambda-1})}\right\}^{(p)}$$

$\cos^m x$, $\sin^m x$ の超微分

$$\left(\cos^m x\right)^{(p)}=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}{}_mC_r\,(m-2r)^p\cos\left\{(m-2r)x+\frac{p\pi}{2}\right\}$$

$$\left(\sin^m x\right)^{(p)}=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{m/2\downarrow}{}_mC_r\,(m-2r)^p\cos\left\{(m-2r)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{p\pi}{2}\right\}$$

22 合成関数の高階微分

合成関数の高階微分については、約150年前 *Faà di Bruno* により次の公式が示されました。

公式22・1・1（**Faà di Bruno**）

$j_1, j_2, \cdots, j_n$ を非負の整数とし、導関数 $g^{(n)}$, f_n 及び**第2種Bell多項式** $B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots)$ を

$$g^{(n)}=g^{(n)}(f), \quad f_n=f^{(n)}(x) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots, f_n)=\sum\frac{n!}{j_1!\,j_2!\,\ldots\,j_n!}\left(\frac{f_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{f_2}{2!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{f_n}{n!}\right)^{j_n}$$
$$\left(j_1+j_2+\cdots+j_n=r \quad \& \quad j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n\right)$$

とするとき、合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する高階導関数は次式で示されます。

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)}=\sum_{r=1}^{n}g^{(r)}B_{n,r}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

次に、$B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ を漏れなく生成するアルゴリズムを提示し、これにより $z = g\{f(x)\}$ の8階までの高階微分を求めます。

このアルゴリズムを持ってしても $B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ を得ることはそう簡単ではありません。ところが入れ子関数 $f(x)$ が1次関数のときには上記公式は次のように著しく簡単になります。

公式22･1･4

導関数 $g^{(n)}$, f_n を $g^{(n)} = g^{(n)}(f)$, $f_n = f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき、$f(x)$ が1次関数ならば 合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する高階導関数は次式で示されます。

$$\{g\{f(x)\}\}^{(n)} = g^{(n)} f_1^n$$

そしてこの場合には容易にこれを超微分化することができます。即ち実数 $p>0$ について次式が成立します。これが「12 **超微分**」以降、「線形式」を既成事実として使ってきた根拠です。

$$\{g\{f(x)\}\}^{(p)} = g^{(p)} f_1^p$$

次に、いくつかの合成関数の高階微分を試み、次の諸式を得ます。

$$\{e^{f(x)}\}^{(n)} = e^{f(x)} \sum_{r=1}^{n} B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$\{e^{-f(x)}\}^{(n)} = e^{-f(x)} \sum_{r=1}^{n} (-1)^r B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$\{g(e^x)\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} S(n,r) g^{(r)} e^{rx} \qquad , \qquad S(n,r) = \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} (r-s)^n$$

$$\{g(e^{-x})\}^{(n)} = (-1)^n \sum_{r=1}^{n} S(n,r) g^{(r)} e^{-rx}$$

$$\{\log f(x)\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} (r-1)!\, B_{n,r}(f_1, f_2, \dots, f_n) f^{-r}$$

$$\{g(\log x)\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} g^{(r)} B_{n,r}\left(\frac{0!}{x}, -\frac{1!}{x^2}, \dots, (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \right)$$

$\{e^{f(x)}\}^{(n)}, \{e^{-f(x)}\}^{(n)}$ において、特に $f(z) = \log\Gamma(z)$ のときは次の公式が得られます。なお、この公式は2016年12月初旬に横浜市在住の宇井正幸氏によって発見されたものです。

公式22･3･1(宇井の公式)

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,r}(f_1, f_2, \dots)$ をBell多項式とするとき、次式が成立する。

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \Gamma(z) \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_{n-1}(z))$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{n,k}(\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_{n-1}(z))$$

23 合成関数の高階積分

公式23･1･1

$f = f(x)$、$g(f)$ の直系高階原始関数を $g^{<n>}$、f の 関数 $h, h^{(k)}$ 及び級数 S_k, M_k, r_k

をそれぞれ

$$h=\frac{dx}{df}=\frac{1}{f^{(1)}} \quad , \quad h^{(k)}=\frac{d^k h}{df^k} \qquad k=1,2,3,\cdots$$

$$S_k=\sum_{r_{k1}=0}^{m_k-1}\binom{-1}{r_{k1}}\sum_{r_{k2}=0}^{r_{k1}}\binom{r_{k1}}{r_{k2}}\sum_{r_{k3}=0}^{r_{k2}}\binom{r_{k2}}{r_{k3}}\cdots\sum_{r_{kk}=0}^{r_{kk-1}}\binom{r_{k\,k-1}}{r_{kk}} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$M_k=(-1)^{m_k}\sum_{r_{k2}=0}^{m_k}\binom{m_k}{r_{k2}}\sum_{r_{k3}=0}^{r_{k2}}\binom{r_{k2}}{r_{k3}}\sum_{r_{k4}=0}^{r_{k3}}\binom{r_{k3}}{r_{k4}}\cdots\sum_{r_{kk}=0}^{r_{kk-1}}\binom{r_{k\,k-1}}{r_{kk}} \qquad k=2,3,\cdots,n$$

$$R_{jk}=\sum_{i=k}^{j}r_{ik} \qquad j,k=1,2,\cdots,n$$

とし、$g\{f(x)\}, gh$ の直系高階原始関数の零点をそれぞれ a , f_a とするとき、合成関数 $g\{f(x)\}$ の x に関する直系高階積分は次式で示されます。

$$\int_a^x\cdots\int_a^x\{g(f(x))\}dx^n=S_1S_2\cdots S_n\,g^{\langle n+R_{n1}\rangle}h^{(R_{n1}-R_{n2})}\cdots h^{(R_{nn-1}-R_{nn})}h^{(R_{nn})}+R_{m_1}^n$$

$$R_{m_1}^n=(-1)^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)\cdots hdf\right)hdf\right)hdf \qquad (n\text{ 重入れ子})$$

$$+S_1M_2\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 1+R_{11}+m_2\rangle}h^{(R_{11}-R_{22}+m_2)}h^{(R_{22})}df\right)\cdots hdf\right)hdf$$

$$+S_1S_2M_3\int_{f_a}^f\cdots\left(\int_{f_a}^f g^{\langle 2+R_{21}+m_3\rangle}h^{(R_{21}-R_{32}+m_3)}h^{(R_{32}-R_{33})}h^{(R_{33})}df\right)\cdots hdf$$

$$\vdots$$

$$+S_1S_2\cdots S_{n-1}M_n\int_{f_a}^f g^{\langle n-1+R_{n-11}+m_n\rangle}h^{(R_{n-11}-R_{n2}+m_n)}h^{(R_{n2}-R_{n3})}\cdots h^{(R_{nn})}df$$

S_k, M_k, r_k を使わずに3階まで書き下せば次のとおりです。

$$\int_a^x\{g(f(x))\}dx=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}g^{\langle 1+r_{11}\rangle}h^{(r_{11})}+R_{m_1}^1$$

$$R_{m_1}^1=(-1)^{m_1}\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df$$

$$\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^2=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22})}h^{(r_{22})}$$
$$+R_{m_1}^2$$

$$R_{m_1}^2=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^f g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df$$
$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^f\left(\int_{f_a}^f g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf$$

$$\int_a^x\int_a^x\int_a^x\{g(f(x))\}dx^3=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\sum_{r_{31}=0}^{m_3-1}\sum_{r_{32}=0}^{r_{31}}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{-1}{r_{31}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$
$$\times g^{\langle 3+r_{11}+r_{21}+r_{31}\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{22}-r_{32})}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}+R_{m_1}^3$$

$$R_{m_1}^3=\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}\sum_{r_{21}=0}^{m_2-1}\sum_{r_{22}=0}^{r_{21}}\binom{-1}{r_{21}}\binom{r_{21}}{r_{22}}(-1)^{m_3}\sum_{r_{32}=0}^{m_3}\sum_{r_{33}=0}^{r_{32}}\binom{m_3}{r_{32}}\binom{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\times\int_{f_a}^{f}g^{\langle 2+r_{11}+r_{21}+m_3\rangle}h^{(r_{11}+r_{21}-r_{22}-r_{32}+m_3)}h^{(r_{22}+r_{32}-r_{33})}h^{(r_{33})}df$$

$$+\sum_{r_{11}=0}^{m_1-1}\binom{-1}{r_{11}}(-1)^{m_2}\sum_{r_{22}=0}^{m_2}\binom{m_2}{r_{22}}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle 1+r_{11}+m_2\rangle}h^{(r_{11}-r_{22}+m_2)}h^{(r_{22})}df\right)hdf$$

$$+(-1)^{m_1}\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}\left(\int_{f_a}^{f}g^{\langle m_1\rangle}h^{(m_1)}df\right)hdf\right)hdf$$

次に、いくつかの合成関数の高階積分を試み次の諸式を得ます。

$$\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}\cdots\int_{\sqrt[\beta]{c}}^{x}(x^\beta-c)^\alpha dx^n=(x^\beta-c)^\alpha\frac{x^n}{\beta^n}S_1S_2\cdots S_n\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+n+R_{n1})}\left(1-\frac{1}{x^\beta}\right)^{n+R_{n1}}$$

$$\times\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{n1}+R_{n2})}\cdots\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn-1}+R_{nn})}\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(1/\beta-R_{nn})}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x(\log x)^\alpha dx^n=x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\alpha+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{\alpha+n+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+(-1)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}{}_nC_k\frac{x^{n-k}}{k^\alpha}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\frac{1}{\log x}dx^n=-x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\psi\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}{\Gamma\left(n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n-1+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left\{(x-1)^{n-1}\log|\log x|-\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_r x^r\log(n-r)\right\}$$

$$\int_0^x\cdots\int_0^x\log|\log x|dx^n=-x^n\sum_{r_1=0}^{\infty}\sum_{r_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}(-1)^{\sum_{k=1}^n r_k}\prod_{k=1}^{n}k^{r_k}\frac{\psi\left(1+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}{\Gamma\left(1+n+\sum_{k=1}^n r_k\right)}(\log x)^{n+\sum_{k=1}^n r_k}$$

$$+\frac{1}{n!}\left\{(\log|\log x|-\gamma)(x-1)^n+\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_nC_r(\gamma+\log r)x^{n-r}\right\}$$

公式23・1・1はかくも煩雑な上にどんな合成関数にも適用できる訳ではありません。第1に入れ子関数 $f(x)$ はその逆関数が既知でなければならず、第2に入れ物関数 $g(f)$ はその高階原始関数が $\lim_{n\to\infty}g^{\langle n\rangle}(f)=c$ とならねばなりません。これらを満たす合成関数はそんなに多くはありません。ところが入れ子関数 $f(x)$ が1次関数のときは上記公式は次のように著しく簡単になります。

公式23・1・2

$f(x)=cx+d$ のとき

$$\int_a^x\cdots\int_a^x\{g(f(x))\}dx^n=\left(\frac{1}{c}\right)^n\int_{f_a}^{f}\cdots\int_{f_a}^{f}g(f)df^n$$

そしてこの場合には容易にこれを超積分化することができます。即ち実数 $p>0$ について次式が成立します。これが「07 **超積分**」以降、「線形式」を既成事実として使ってきた根拠です。

$$\int_a^x\sim\int_a^x\{g(f(x))\}dx^p=\left(\frac{1}{c}\right)^p\int_{f_a}^f\sim\int_{f_a}^f g(f)df^p \qquad f(x)=cx+d$$

24 高階(重回)積分級数に関する杉岡の定理

杉岡幹生氏は「 数学の研究 」において次のことを示されました。

1 $f(x)$の高階積分級数が $e^{\pm x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ の単積分に帰着する

2 $f(x)$の高階積分級数が $e^{\pm x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ の高階積分級数に展開される

この要約では、$\lim_{m\to\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m=0$ の場合の公式を紹介します。また、a における n 階微分係数を $f_a^{(n)}\ \left(=f^{(n)}(x)\mid_{x=a}\right)$ と略記します。

(1) 高階積分級数の和

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r=e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r=e^{-x}\int_a^x f(x)e^{x}dx$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1}=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx+e^{-x}\int_a^x f(x)e^{x}dx\right\}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1}=\cos x\int_a^x f(x)\cos x\,dx+\sin x\int_a^x f(x)\sin x\,dx$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r}=\frac{1}{2}\left\{e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx-e^{-x}\int_a^x f(x)e^{x}dx\right\}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r}=\sin x\int_a^x f(x)\cos x\,dx-\cos x\int_a^x f(x)\sin x\,dx$$

例

$$\int_a^x e^x dx+\int_a^x\int_a^x e^x dx^2+\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3+\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^4+\cdots=e^x\int_a^x e^x e^{-x}dx=e^x(x-a)$$

$$\int_a^x e^x dx-\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3+\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^5-\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^7+-\cdots$$

$$=\cos x\int_a^x e^x\cos x\,dx+\sin x\int_a^x e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}-\frac{e^a}{2}\{\cos(x-a)-\sin(x-a)\}$$

$$\int_0^x\int_0^x x^2dx^2-\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^4+\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^6-\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^8+-\cdots$$

$$=\sin x\int_0^x x^2\cos x\,dx-\cos x\int_0^x x^2\sin x\,dx=x^2-2+2\cos x$$

(2) 積分級数展開

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r=\sum_{r=0}^{\infty}f_a^{(r)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!}=\sum_{r=0}^{\infty}f_a^{(r)}\int_a^x\cdots\int_a^x e^{x-a}dx^r$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{s+r}}{(s+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\int_a^x\cdots\int_a^x e^{-(x-a)}dx^r$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\int_a^x\cdots\int_a^x sinh(x-a)\,dx^r$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\int_a^x\cdots\int_a^x sin(x-a)\,dx^r$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\int_a^x\cdots\int_a^x cosh(x-a)\,dx^{2r}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} f_a^{(r)}\int_a^x\cdots\int_a^x cos(x-a)\,dx^r$$

例

$$log\,x + \int_1^x log\,x\,dx + \int_1^x\!\!\int_1^x log\,x\,dx^2 + \int_1^x\!\!\int_1^x\!\!\int_1^x log\,x\,dx^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$= 0!\int_1^x e^{x-1}dx - 1!\int_1^x\!\!\int_1^x e^{x-1}dx^2 + 2!\int_1^x\!\!\int_1^x\!\!\int_1^x e^{x-1}dx^3 - 3!\int_1^x\cdots\int_1^x e^{x-1}dx^4 + - \cdots$$

$$\int_0^x sec\,x\,dx - \int_0^x\!\!\int_0^x\!\!\int_0^x sec\,x\,dx^3 + \int_0^x\cdots\int_0^x sec\,x\,dx^5 - \int_0^x\cdots\int_0^x sec\,x\,dx^7 + - \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}|E_{2r}|\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+1+2r}}{(2s+1+2r)!} \qquad E_{2r}:\ Euler\ Number$$

$$= sin\,x + \int_0^x\!\!\int_0^x sin\,x\,dx^2 + 5\int_0^x\cdots\int_0^x sin\,x\,dx^4 + 61\int_0^x\cdots\int_0^x sin\,x\,dx^6 + \cdots$$

$$tan^{-1}x + \int_1^x\!\!\int_1^x tan^{-1}x\,dx^2 + \int_1^x\cdots\int_1^x tan^{-1}x\,dx^4 + \int_1^x\cdots\int_1^x tan^{-1}x\,dx^6 + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2s}}{(2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r-1)!}{2^{r/2}}sin\left(\frac{3r\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

$$= \frac{\pi}{4}cosh(x-1) + \frac{1}{2}\int_1^x cosh(x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int_1^x\!\!\int_1^x cosh(x-1)\,dx^2 + \cdots$$

(3) 係数付高階積分級数

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = e^x\int_a^x f(x)e^{-x}dx + e^x\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^{-x}dx^2$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} r\int_a^x\cdots\int_a^x f(x)\,dx^r = e^{-x}\int_a^x f(x)e^x dx - e^{-x}\int_a^x\!\!\int_a^x f(x)e^x dx^2$$

例

$$1\int_a^x dx + 2\int_a^x\!\!\int_a^x dx^2 + 3\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x dx^3 + 4\int_a^x\cdots\int_a^x dx^4 + \cdots = e^x\int_a^x e^{-x}dx + e^x\int_a^x\!\!\int_a^x e^{-x}dx^2$$

$$= e^{x-a}(x-a)$$

$$1\int_0^x \log x\,dx - 2\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^2 + 3\int_0^x\int_0^x\int_0^x \log x\,dx^3 - 4\int_0^x\cdots\int_0^x \log x\,dx^4 + - \cdots$$
$$= e^{-x}\int_0^x \log x\, e^x dx - e^{-x}\int_a^x\int_a^x \log x\, e^x dx^2$$
$$= e^{-x} x\{Ei(x) - \gamma\} + e^{-x} - 1$$

25　等比係数付高階積分級数

本章では「24 高階(重回)積分級数に関する杉岡の定理 」を一般化しました。

この要約では、$\lim_{m\to\infty} c^m \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^m = 0\ \ (c > 0)$ の場合の公式を紹介します。

(1) 高階積分級数の和

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^r \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx$$
$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} c^r \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = ce^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1} \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = \frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx\right\}$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} c^{2r-1} \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r-1} = c\cos cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx + c\sin cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r} \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r} = \frac{c}{2}\left\{e^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx - e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx\right\}$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} c^{2r} \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^{2r} = c\sin cx\int_a^x f(x)\cos cx\,dx - c\cos cx\int_a^x f(x)\sin cx\,dx$$

例

$$c^1\int_a^x e^x dx + c^2\int_a^x\int_a^x e^x dx^2 + c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3 + c^4\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^4 + \cdots$$
$$= ce^{cx}\int_a^x e^x e^{-cx}dx = \frac{ce^{cx}\{e^{(1-c)x} - e^{(1-c)a}\}}{1-c}$$
$$c^1\int_a^x e^x dx - c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x e^x dx^3 + c^5\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^5 - c^7\int_a^x\cdots\int_a^x e^x dx^7 + - \cdots$$
$$= c\cos cx\int_a^x e^x\cos cx\,dx + c\sin cx\int_a^x e^x\sin cx\,dx$$
$$= \frac{ce^x}{1+c^2} - \frac{ce^a}{1+c^2}[\cos\{c(x-a)\} - c\sin\{c(x-a)\}]$$
$$c^2\int_0^x\int_0^x x^2dx^2 - c^4\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^4 + c^6\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^6 - c^8\int_0^x\cdots\int_0^x x^2dx^8 + - \cdots$$
$$= c\sin cx\int_0^x x^2\cos cx\,dx - c\cos cx\int_0^x x^2\sin cx\,dx = \frac{c^2x^2 - 2 + 2\cos cx}{c^2}$$

(2) 係数付高階積分級数

$$\sum_{r=1}^{\infty} rc^r \int_a^x\cdots\int_a^x f(x)dx^r = ce^{cx}\int_a^x f(x)e^{-cx}dx + c^2e^{cx}\int_a^x\int_a^x f(x)e^{-cx}dx^2$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} r c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = c e^{-cx}\int_a^x f(x)e^{cx}dx - c^2 e^{-cx}\int_a^x\int_a^x f(x)e^{cx}dx^2$$

例

$$1c^1\int_a^x dx + 2c^2\int_a^x\int_a^x dx^2 + 3c^3\int_a^x\int_a^x\int_a^x dx^3 + 4c^4\int_a^x \cdots \int_a^x dx^4 + \cdots$$
$$= c e^{cx}\int_a^x e^{-cx}dx + c e^{cx}\int_a^x\int_a^x e^{-cx}dx^2 = c e^{c(x-a)}(x-a)$$

(3) 二重級数による計算

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c^r \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^r = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^s (x-a)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} c^{2r-1} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s+1} (x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1} c^{2r-1} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^{2s+1} (x-a)^{2s+1+r}}{(2s+1+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} c^{2r} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s} (x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c^{2r} \int_a^x \cdots \int_a^x f(x)\,dx^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}(a)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^{2s} (x-a)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

例

$$\log x + c^1\int_1^x \log x\,dx + c^2\int_1^x\int_1^x \log x\,dx^2 + c^3\int_1^x\int_1^x\int_1^x \log x\,dx^3 + \cdots$$
$$= \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^s (x-1)^{s+r}}{(s+r)!}$$

$$c^1\int_0^x \sec x\,dx - c^3\int_0^x\int_0^x\int_0^x \sec x\,dx^3 + c^5\int_0^x \cdots \int_0^x \sec x\,dx^5 - c^7\int_0^x \cdots \int_0^x \sec x\,dx^7 + - \cdots$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}|E_{2r}|\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{c^{2s+1} x^{2s+1+2r}}{(2s+1+2r)!} \qquad E_{2r}:\ \text{Euler Number}$$

$$\tan^{-1}x + c^2\int_1^x\int_1^x \tan^{-1}x\,dx^2 + c^4\int_1^x \cdots \int_1^x \tan^{-1}x\,dx^4 + c^6\int_1^x \cdots \int_1^x \tan^{-1}x\,dx^6 + \cdots$$
$$= \frac{\pi}{4}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-1)^{2s}}{(2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r-1)!}{2^{r/2}}\sin\left(\frac{3r\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c^{2s}(x-1)^{2s+r}}{(2s+r)!}$$

26 ゼータ関数等の高階微積分と超微積分

本章において、n は自然数、p は複素数、$\Gamma(p)$ をガンマ関数、$\psi(p)$ をディ･ガンマ関数、H_n は調和数、γ_r は次式で定義されるスチルチェス定数とします。

$$\gamma_r = \lim_{n\to\infty}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\log k)^r}{k} - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1} \right\}$$

すると以下のような高階微積分および超微積分が得られます。これらはいづれも直系です。

26・1 リーマン・ゼータ関数の高階微積分と超微積分

$$\zeta^{<n>}(z) = \frac{(z-1)^{n-1}}{(n-1)!}\{\log(z-1) - H_{n-1}\} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\frac{(z-1)^{r+n}}{(r+n)!}$$

$$\zeta^{<p>}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(p) - \gamma_0}{\Gamma(p)}(z-1)^{p-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\frac{(z-1)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}$$

$$\zeta^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{-n}n!}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\frac{(z-1)^{r-n}}{\Gamma(1+r-n)}$$

$$\zeta^{(p)}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(-p) - \gamma_0}{\Gamma(-p)}(z-1)^{-p-1} + \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\frac{(z-1)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)}$$

26・2 ディリクレ・ラムダ関数の高階微積分と超微積分

$$\lambda^{<n>}(z) = \frac{(z-1)^{n-1}}{2(n-1)!}\{\log(z-1) - H_{n-1}\}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^{r+n}}{(r+n)!}$$

$$\lambda^{<p>}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(p) - \gamma_0}{2\Gamma(p)}(z-1)^{p-1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^{r+p}}{\Gamma(1+r+p)}$$

$$\lambda^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{-n}n!}{2(z-1)^{n+1}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^{r-n}}{\Gamma(1+r-n)}$$

$$\lambda^{(p)}(z) = \frac{\log(z-1) - \psi(-p) - \gamma_0}{2\Gamma(-p)}(z-1)^{-p-1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\gamma_r + \frac{\log^{r+1}2}{r+1} - \sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\gamma_s(\log 2)^{r-s}\right\}\frac{(z-1)^{r-p}}{\Gamma(1+r-p)}$$

26・3 ディリクレ・イータ関数の高階微積分と超微積分

公式 26・3・1h (高階積分)

$$\eta^{<n>}(z) = \frac{z^n}{n!} + (-1)^n\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^{-n}r}{r^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\eta^{<n>}(z) = \frac{z^n}{n!} + (-1)^n\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^{-n}r}{r^z}$$

公式 26・3・1s (超積分)

$$\eta^{<p>}(z) = \frac{z^p}{\Gamma(1+p)} + e^{p\pi i}\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^{-p} r}{r^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\eta^{<p>}(z) = \frac{z^p}{\Gamma(1+p)} + e^{p\pi i}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^{-p} r}{r^z}$$

公式 26·3·2h（高階微分）

$$\eta^{(n)}(z) = \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-n)} + (-1)^{-n}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^n r}{r^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\eta^{(n)}(z) = \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-n)} + (-1)^{-n}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^n r}{r^z}$$

公式 26·3·2s（超微分）

$$\eta^{(p)}(z) = \frac{z^{-p}}{\Gamma(1-p)} + e^{-p\pi i}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^p r}{r^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\eta^{(p)}(z) = \frac{z^{-p}}{\Gamma(1-p)} + e^{-p\pi i}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^p r}{r^z}$$

26·4 ディリクレ・ベータ関数の高階微積分と超微積分

公式 26·4·1h（高階積分）

$$\beta^{<n>}(z) = \frac{z^n}{n!} + (-1)^n\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^{-n}(2r-1)}{(2r-1)^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\beta^{<n>}(z) = \frac{z^n}{n!} + (-1)^{-n}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^{-n}(2r-1)}{(2r-1)^z}$$

公式 26·4·1s（超積分）

$$\beta^{<p>}(z) = \frac{z^p}{\Gamma(1+p)} + e^{p\pi i}\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^{-p}(2r-1)}{(2r-1)^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\beta^{<p>}(z) = \frac{z^p}{\Gamma(1+p)} + e^{p\pi i}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^{-p}(2r-1)}{(2r-1)^z}$$

公式 26·4·2h（高階微分）

$$\beta^{(n)}(z) = \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-n)} + (-1)^{-n}\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^n(2r-1)}{(2r-1)^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\beta^{(n)}(z) = \frac{z^{-n}}{\Gamma(1-n)} + (-1)^{-n}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^n(2r-1)}{(2r-1)^z}$$

公式 26·4·2s（超微分）

$$\beta^{(p)}(z) = \frac{z^{-p}}{\Gamma(1-p)} + e^{-p\pi i}\sum_{r=2}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\log^p(2r-1)}{(2r-1)^z} \qquad Re(z)>0$$

$$\beta^{(p)}(z) = \frac{z^{-p}}{\Gamma(1-p)} + e^{-p\pi i}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{r=2}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{2^{k+1}}\binom{k}{r}\frac{\log^{p}(2r-1)}{(2r-1)^{z}}$$

27 リーマン・ゼータの超微分の零点

27・1 では、リーマン・ゼータ関数の1階導関数 $\zeta^{(1)}(z)$ の零点をいくつか調べます。

$\zeta'(z)$ の非自明な零点

2.46316186945432 + 23.29832049276286 i
1.28649682226905 + 31.70825008311591 i
2.30757006372263 + 38.48998317307893 i
1.38276360571167 + 42.29096455459673 i
0.96468562270569 + 48.84715990506848 i

$\zeta'(z)$ の自明な零点

-2.717262829204574
-4.936762108594946
-7.074597145007147
-9.170493162785828
-11.24121232537534

27・2 $\zeta^{(1/2)}(z)$ の零点　は省略。

27・3 では、超微分に伴う $\zeta(z)$ の非自明な零点の遷移を調べ、等高線図およびそのアニメーションを示します。

(1) $\zeta(z)$ の最初の2つの零点 $1/2+i\,14.1347\cdots$ 及び $1/2+i\,21.0220\cdots$ は p の増加に伴って右下に移動し、$\zeta^{(1)}(z)$ に至って突然消滅する。即ち、

$1/2 + i\,14.1347\cdots \Longrightarrow$ *disappear*　　アニメーションはここをクリック Anim2732.gif

$1/2 + i\,21.0220\cdots \Longrightarrow$ *disappear*

(2) $\zeta(z)$ の3番目の零点 $1/2+i\,25.0108\cdots$ は p の増加に伴って右下に移動し、$\zeta^{(1)}(z)$ の最初の零点 $2.4631\cdots+i\,23.2983\cdots$ となる。即ち、

$1/2 + i\,25.0108\cdots \Longrightarrow 2.4631\cdots+i\,23.2983\cdots$　アニメーション: Anim2734.gif

27・4 では、超微分に伴う $\zeta(z)$ の自明な零点の遷移を調べ、等高線図およびそのアニメーションを示します。

(1) $\zeta(z)$ の零点 -2 の半分は特異点 1 から $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 -2.71726… に転生し、他の半分は $p=1$ の瞬間に消滅する。即ち、

$-2 \Longrightarrow -2.71726\cdots$　　アニメーションはここをクリック Anim2741.gif

(2) $\zeta(z)$ の零点 -6 は $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 -4.9367… に移動し、同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の他の零点 -7.0745… に転生する。$\zeta(z)$ の零点 -4 は $p>0$ の瞬間に消滅する。即ち、

$-4 \Longrightarrow$ *disappear*

-6 $\Longrightarrow$ -4.9367…
-7.0745…　アニメーションはここをクリック Anim2742.gif

(3) $\zeta(z)$ の零点 -10 は $\zeta^{(1)}(z)$ の零点 -9.17049… に移動し、同時に $\zeta^{(1)}(z)$ の他の零点 -11.24121… に転生する。$\zeta(z)$ の零点 -8 は $p>0$ の瞬間に消滅する。即ち、

-8 $\Longrightarrow$ *disappear*

-10 $\Longrightarrow$ -9.17049…
-11.24121…

28 リーマン・ゼータの超積分の零点

28・1 では、リーマン・ゼータ関数の1階積分 $\zeta^{<1>}(z)$ の零点をいくつか調べます。それらは

-2.30074531502972 + 16.08542457590717 i

-2.25748998985921 + 22.00901540490299 i

-1.9080 + 26.4561 i　estimated

-2.0862 + 30.8579 i　estimated

1.669008212478207

-5.207610164448825 + 6.722221913809304 i

-10.491624715391694 + 4.611112879246793 i

-14.14832472367627 + 2.63517233968627 i

-17.14106466110841 + 0.77114740836467 i

28・2 では、超積分に伴う $\zeta(z)$ の非自明な零点の遷移を調べ、等高線図およびそのアニメーションを示します。

$\zeta(z)$ の非自明な零点は p の増加に伴って複素平面を左上方に移動し $p=1$ では次のようになる。

-2.3007… + i 16.0854… $\Longleftarrow$ 1/2 + i 14.1347…
-2.2574… + i 22.0090… $\Longleftarrow$ 1/2 + i 21.0220…
-1.9080… + i 26.4561… $\Longleftarrow$ 1/2 + i 25.0108…
-2.0862… + i 30.8578… $\Longleftarrow$ 1/2 + i 30.4248…

アニメーションは、ここをクリック Anim2821.gif

28・3 では、超積分に伴う $\zeta(z)$ の自明な零点の遷移を調べ、等高線図およびそのアニメーションを示します。

(1) $\zeta(z)$ の零点 -2 は $p>0$ の瞬間に特異点 1 の右近傍に転生し、p の増加に伴い x 軸上を右に移動する。即ち、

-2 $\Longrightarrow$ 1.669008…

アニメーションは、ここをクリック Anim2831.gif

(2) $\zeta(z)$ の自明な零点 -4 , -6 , -8 , -10 … は $p>0$ の瞬間に一旦消滅するが、これらの内 零点 -4 , -8 , -12 , -16 は p の増加に伴い原点に近い方から順次蘇生し、複素平面上を左上に移動し $p=1$ では次のようになる。なお、-18 以下の零点は $0<p\leq 1$ では蘇生できない。

-4 $\Longrightarrow$ -5.2076… + i 6.7222…

-8	$\Longrightarrow$	$-10.4916\cdots + i\,4.6111\cdots$
-12	$\Longrightarrow$	$-14.1483\cdots + i\,2.6351\cdots$
-16	$\Longrightarrow$	$-17.1410\cdots + i\,0.7711\cdots$
-18～	$\Longrightarrow$	*disappear*

アニメーションは、ここをクリック Anim2832.gif

29 複素関数の高階微分

本章では、複素関数の実部虚部別テイラー級数を用いて、次の公式を証明します。

公式 29・3・1 (コーシー・リーマンの高階偏微分方程式)

関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、次式が成立する。

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}u(x,y)=(-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}v(x,y)=(-1)^{n}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

公式 29・3・2 (ラプラスの高階偏微分方程式)

関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、次式が成立する。

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,y)=(-1)^{n}\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}v(x,y)=(-1)^{n}\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

公式 29・3・3 (y による高階微分)

関数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ が開領域 D の全域で正則であるとき、自然数 n について次式が成立する。

$$f^{(2n-1)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}v(x,y)+i\,(-1)^{n}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial y^{2n-1}}u(x,y)$$

$$f^{(2n)}(z)=(-1)^{n}\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}u(x,y)+i\,(-1)^{n}\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}v(x,y)$$

30 線形合成関数の高階定積分と超定積分

本章では、合成関数 $g\{f(x)\}$ において $f(x)$ が1次関数の場合の定積分、高階定積分および超定積分を研究し、以下の定理を得ます。

30・1 線形合成関数の定積分

定理 30・1・1

c は正数、a,b,d は実数とする。関数 $g(x)$ の原始関数 $g^{<1>}(x)$ が区間 $[ac+d\,,\,bc+d]$ において有界かつ正則であるならば、次が成立する。

$$\int_a^b g(cx+d)dx = \frac{1}{c}\int_{ac+d}^{bc+d} g(x)dx$$

系 30･1･2

c は正数、d は実数とする。関数 $g(x)$ の原始関数 $g^{<1>}(x)$ が区間 $(\pm\infty, d]$ において有界かつ正則であるならば、次が成立する。

$$\int_{\pm\infty}^{0} g(cx+d)dx = \frac{1}{c}\int_{\pm\infty}^{d} g(x)dx$$

但し、±は積分が収束する方を採用。

30･2 線形合成関数の高階定積分

定理 30･2･1

c は正数、a, b, d は実数 そして n は自然数とする。関数 $g(x)$ の高階原始関数 $g^{<n>}(x)$ が区間 $[ac+d, bc+d]$ において有界かつ正則であるならば、次が成立する。

$$\int_a^b \int_a^x \cdots \int_a^x g(cx+d)dx^n = \left(\frac{1}{c}\right)^n \int_{ac+d}^{bc+d} \int_{ac+d}^{x} \cdots \int_{ac+d}^{x} g(x)dx^n$$

定理 30･2･1’（線形合成関数の高階定積分）

c は正数、a, b, d は実数 そして n は自然数とする。関数 $g(x)$ の原始関数 $g^{<n>}(x)$ が区間 $[ac+d, bc+d]$ において有界かつ正則であるならば、次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^b (b-x)^{n-1} g(cx+d)dx = \left(\frac{1}{c}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{ac+d}^{bc+d} (bc+d-x)^{n-1} g(x)dx$$

系 30･2･2’

c は正数、d は実数 そして n は自然数とする。。関数 $g(x)$ の高階原始関数 $g^{<n>}(x)$ が区間 $(\pm\infty, d]$ において有界かつ正則であるならば、自然数 n について次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\pm\infty}^{0} (0-x)^{n-1} g(cx+d)dx = \left(\frac{1}{c}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{\pm\infty}^{d} (d-x)^{n-1} g(x)dx$$

但し、±は積分が収束する方を採用。

30･3 線形合成関数の超定積分

定理 30･3･1

c, p は正数、a, b, d は実数とする。関数 $g(x)$ の超原始関数 $g^{<p>}(x)$ が区間 $[ac+d, bc+d]$ において有界かつ正則であるならば、次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^b (b-x)^{p-1} g(cx+d)dx = \left(\frac{1}{c}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{ac+d}^{bc+d} (bc+d-x)^{p-1} g(x)dx$$

系 30･3･2

c, p は正数、d は実数とする。関数 $g(x)$ の超原始関数 $g^{<n>}(x)$ が区間 $(\pm\infty, d]$ において有界かつ正則であるならば、次が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{\pm\infty}^{0}(0-x)^{p-1}g(cx+d)dx = \left(\frac{1}{c}\right)^{p}\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{\pm\infty}^{d}(d-x)^{p-1}g(x)dx$$

但し、±は積分が収束する方を採用。

2011.03.31
2012.10.28 リニューアル
2017.01.06 リニューアル
2018.04.03 第25章追加
2018.06.11 第26章追加
2021.02.01 第27章、第28章、第29章 追加
2024.07.04 第30章追加

河野 和
広島市

宇宙人の数学