リーマンゼータ関数要約

1　ゼータ母関数

双曲線関数と三角関数はフーリエ展開及びテイラー展開でき、これらはゼータ母関数となりる。即ち、これらのゼータ母関数を項別高階積分すると自然数のリーマン・ゼータ関数が得らる。

但し、これらは下位のゼータで表される自己同型な式であり、従ってこれらはやや陰伏的である。しかしながら本章ではここまでで止める。これらから下位のゼータを消し去って自己同型でない陽表的なゼータの公式を得る作業は 第2章 以下で行う。

リーマン・ゼータ、ディリクレ・イータ、ディリクレ・ラムダをそれぞれ

$$\zeta(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x}\ ,\ \eta(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r^x}\ ,\ \lambda(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r-1)^x}$$

とし、ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

$$B_0=1\ ,\ B_2=1/6\ ,\ B_4=-1/30\ ,\ B_6=1/42\ ,\ B_8=-1/30\ ,\cdots$$

$$E_0=1\ ,\ E_2=-1\ ,\ E_4=5\ ,\ E_6=-61\ ,\ E_8=1385\ ,\ \cdots$$

とし、調和数を $H_s=\sum_{t=1}^{s}1/t=\psi(1+s)+\gamma$ とする。

すると、coth系, tanh系, csch系, cot系, tan系, csc系 のゼータ母関数より次の多項式を得る。

$$\zeta(n)=\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\log x-H_{n-1}\right)+\frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-rx}}{r^n}$$
$$-(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r(2r+n-1)!}-\sum_{s=1}^{n-2}\frac{(-1)^s x^s}{s!}\zeta(n-s)$$

$$\eta(n)=-\frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}-\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{e^{-rx}}{r^n}+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r(2r+n-1)!}-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s x^s}{s!}\eta(n-s)$$

$$\lambda(n)=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{n-1}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{-(2r-1)x}}{(2r-1)^n}$$
$$+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{2r+n-1}}{2r(2r+n-1)!}-\sum_{s=1}^{n-2}\frac{(-1)^s x^s}{s!}\lambda(n-s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rx}{r^{2n-1}}-\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!}\left(\log x-H_{2n-2}\right)+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2r}\right|x^{2r+2n-2}}{2r(2r+2n-2)!}=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\zeta(2n-1-2s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin rx}{r^{2n}}-\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(\log x-H_{2n-1}\right)+(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left|B_{2r}\right|x^{2r+2n-1}}{2r(2r+2n-1)!}=-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s-1}}{(2s-1)!}\zeta(2n+1-2s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\cos rx}{r^{2n-1}}-(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r+2n-2}}{2r(2r+2n-2)!}=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\eta(2n-1-2s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r^{2n}}-(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-1\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r+2n-1}}{2r(2r+2n-1)!}=-\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^s x^{2s-1}}{(2s-1)!}\eta(2n+1-2s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n-1}}-\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{2(2n-2)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{2n-2}\right)-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r+2n-2}}{2r(2r+2n-2)!}$$
$$=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!}\lambda(2n-1-2s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}}-\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2(2n-1)!}\left(\log\frac{x}{2}-H_{2n-1}\right)-\frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2r}-2\right)\left|B_{2r}\right|x^{2r+2n-1}}{2r(2r+2n-1)!}$$
$$=-\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(-1)^s x^{2s-1}}{(2s-1)!}\lambda(2n+1-2s)$$

また、tanh系、cot系、tan系の母関数のフーリエ級数を項別に高階微分すると次の諸式が得らる。

$$\zeta(-n) = \frac{1}{2^{n+1}\left(1-2^{n+1}\right)} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} {}_nD_r \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\zeta(1-2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}\left(1-2^{2n}\right)} T_{2n-1} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$= (-1)^{2n-1} \frac{B_{2n}}{2n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

ここで ${}_nD_r$, T_{n-1} はそれぞれ次式で定義される Eulerian number 及びタンジェント数である。

$${}_nD_r = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (r-k)^n \quad , \quad T_{n-1} = 2^n\left(2^n-1\right)\frac{\left|B_n\right|}{n}$$

副産物

$$-log\,0 = \zeta(1) = \zeta(1) - \frac{\pi i}{2}$$

2 自然数ゼータの公式

本章では前章の自己同型な公式から低次のゼータを取り除いて自己同型でない陽表的な自然数ゼータの公式を得る。

ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, $B_8=-1/30$, …

$E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, …

とし、調和数を $H_s = \sum_{t=1}^{s} 1/t = \psi(1+s)+\gamma$ とする。

$0<x\leqq 2\pi$ について

$$\zeta(n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{x}{2n}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$$\zeta(n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{(n-1)x}{2n}-\log x\right\}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{xr}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$0<x\leqq \pi$ について

$$\zeta(n) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{x^n}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(xr)^s}{s!}\frac{(-1)^r}{r^n e^{xr}}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}-\log\frac{x}{2}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{\{x(2r-1)\}^s}{s!}\frac{e^{-x(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}x^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

特に

$$\zeta(n)=\frac{n+1}{2n!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{r^s}{s!}\frac{1}{r^n e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^{n-1}}{n!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(2r)^s}{s!}\frac{1}{r^n e^{2r}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{B_{2r}2^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$$\zeta(n) = \frac{n^2+1}{2n!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{r^s}{s!}\frac{1}{r^n e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{1}{2n!}-\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{r^s}{s!}\frac{(-1)^r}{r^n e^r}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-1\right)B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(2r-1)^s}{s!}\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^n}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-n}{2r-1}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)!}\left(\frac{1}{n-1}+\log 2\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(2r-1)^s}{s!}\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(n) = \frac{2^n}{2^n-1}\left\{\frac{2^{n-2}}{(n-1)!\,(n-1)}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(4r-2)^s}{s!}\frac{e^{-(4r-2)}}{(2r-1)^n}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{1-n}{2r}\frac{\left(2^{2r}-2\right)B_{2r}2^{n-1+2r}}{2r(n-1+2r)!}\right\}$$

例

$$\zeta(5)=\frac{6}{2\cdot 5!\,4}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^4}{4!}\right)\frac{1}{r^5e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-5}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r(4+2r)!}$$

$$\zeta(5)=\frac{2^4}{5!\,4}+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{2r}{1!}+\frac{(2r)^2}{2!}+\frac{(2r)^3}{3!}+\frac{(2r)^4}{4!}\right\}\frac{1}{r^5e^{2r}}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-5}{2r-1}\frac{B_{2r}2^{4+2r}}{2r(4+2r)!}$$

$$\zeta(5)=\frac{5^2+1}{2\cdot 5!\,4}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}\right)\frac{1}{r^5e^r}-\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-4}{2r}\frac{B_{2r}}{2r(4+2r)!}$$

$$\zeta(5)=\frac{2^4}{2^4-1}\left\{\frac{1}{2\cdot 5!}-\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{r^1}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^4}{4!}\right)\frac{(-1)^r}{r^5e^r}+\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-5}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}}{2r(4+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\left\{\frac{1}{8}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{2r-1}{1!}+\frac{(2r-1)^2}{2!}\right)\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-3}{2r-1}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\log 2\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{2r-1}{1!}\right)\frac{e^{-(2r-1)}}{(2r-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-2}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

$$\zeta(3)=\frac{8}{7}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{4r-2}{1!}\right)\frac{e^{-(4r-2)}}{(2r-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\binom{-2}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}2^{2+2r}}{2r(2+2r)!}\right\}$$

3　奇数ゼータの公式

本章で自己同型でない陽表的な奇数ゼータの公式を得る。

ベルヌイ数、オイラー数、タンジェント数をそれぞれ

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, $B_8=-1/30$, $\cdots$

$E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, $\cdots$

$T_1=1$, $T_3=2$, $T_5=16$, $T_7=272$, $T_9=7936$, $\cdots$

とし、調和数を $H_s = \sum_{t=1}^{s} 1/t = \psi(1+s)+\gamma$ とします。

$0<x<2\pi$ について

$$\zeta(2n+1) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+2}} + (-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\zeta(2n+1) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n+1}} - (-1)^n x^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

$0<x\leqq\pi$ について

$$\zeta(2n+1) = \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\left\{\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s B_{2s}(2^{2s}-2)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n+2}} - (-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{(2^{2r}-1)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\zeta(2n+1) = -\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n+1}} - (-1)^n x^{2n}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{(2^{2r}-1)|B_{2r}|x^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{|E_{2s}|\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n+1}} - \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{x^{2r}}{2r}\right\}$$

特に

$$\zeta(2n+1) = (-1)^n\pi^{2n}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}H_{2n+1-2s}}{(2s)!(2n+1-2s)!} + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2s}-2)B_{2s}}{(2s)!(2n+1+2r-2s)!}\right\}T_{2r-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n}}{2^{2n+1}-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}H_{2n-2s}}{(2s)!(2n-2s)!} - \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{E_{2s}(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{(2s)!(2n+2r-2s)!}\frac{1}{2r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}\right\}$$

例

$$\zeta(5) = \pi^4\left\{\frac{269}{21600} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{(2r+5)!} + \frac{1}{6(2r+3)!} - \frac{7}{360(2r+1)!}\right)\frac{|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r}\right\}$$

$$\zeta(5) = -\frac{16\pi^4}{15}\sum_{r=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{(2r+5)!} + \frac{1}{6(2r+3)!} - \frac{7}{360(2r+1)!}\right\}\frac{(2^{2r}-1)|B_{2r}|\pi^{2r}}{2r}$$

$$\zeta(5) = \frac{\pi^4}{31}\left\{\frac{83}{288} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4+2r)!} - \frac{1}{2(2+2r)!} + \frac{5}{24(2r)!}\right)\frac{(2^{2r}-2)|B_{2r}|}{2r}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r}\right\}$$

4 偶数ゼータの公式

本章で自己同型でない陽表的な偶数ゼータの公式を得る。

ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ次のようであるとする。

$B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, $B_8=-1/30$, …

$E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, …

$0<x<2\pi$ について

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\sin rx}{r^{2n+1}} - \frac{|B_{2n}|\,x^{2n}}{2(2n)!}\left\{\left(2^{2n}-2\right) - \frac{\pi\left(2^{2n+1}-2\right)}{x}\right\}$$

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos rx}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\,x^{2n}}{2(2n)!} + \frac{\pi}{2}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)|B_{2n}|\,x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$0<x\leqq\pi$ について

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)(rx)^{2s-1}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\sin rx}{r^{2n}} + \frac{|B_{2n}|(2x)^{2n}}{2(2n)!}$$

$$\zeta(2n) = -\frac{2^{2n}}{2^{2n}-2}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,(rx)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r\cos rx}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\,x^{2n}}{2(2n)!}\right\}$$

$$\zeta(2n) = -\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)\{(2r-1)x\}^{2s-1}}{(2s)!}\frac{\sin\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}} + \frac{\pi}{2}\frac{2^{2n}|B_{2n}|\,x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,\{(2r-1)x\}^{2s}}{(2s)!}\frac{\cos\{(2r-1)x\}}{(2r-1)^{2n}} + \frac{\pi}{4}\frac{2^{4n}|B_{2n}|\,x^{2n-1}}{(2n)!}$$

特に

$$\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|\,(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

$$\zeta(2n) = -\frac{1}{2^{2n}-2}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{|E_{2s}|\,(\pi r)^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r}{r^{2n}} - \frac{|E_{2n}|\,\pi^{2n}}{2(2n)!}\right\}$$

副産物

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\left(2^{2s}-2\right)B_{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!} = -\frac{\left(2^{2n+1}-2\right)B_{2n}}{(2n)!\,0!}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}\frac{E_{2s}}{(2s)!\,(2n-1-2s)!} = \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n)!}$$

5 複素数ゼータの公式

本章では、「2 自然数ゼータの公式」を加工して複素数ゼータを得る。

ベルヌイ数を $B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, … とし、ガンマ関数と不完全ガンマ関数を

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \quad , \quad \Gamma(p,x)=\int_x^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$$

とし、p を $p\neq 1,0,-1,-2,\cdots$ なる複素数とする。

複素数 $x=u+vi$ s.t. $0<|x|\leqq 2\pi$, $u\geqq 0$ について

$$\zeta(p) = \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{x}{2p}\right) + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p,xr)}{\Gamma(p)r^p} - \sum_{r=1}^\infty \binom{-p}{2r-1}\frac{B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

$$\zeta(p) = \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)}\left\{\frac{1}{p-1}+\frac{(p-1)x}{2p}-\log x\right\} + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p-1,xr)}{\Gamma(p-1)r^p} - \sum_{r=1}^\infty \binom{1-p}{2r}\frac{B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

複素数 $x=u+vi$ s.t. $0<|x|\leqq \pi$, $u\geqq 0$ について

$$\zeta(p) = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\left\{\frac{x^p}{2\Gamma(p+1)} - \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p,xr)}{\Gamma(p)}\frac{(-1)^r}{r^p} + \sum_{r=1}^\infty \binom{-p}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

$$\zeta(p) = \frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{x^{p-1}}{2(p-1)\Gamma(p)} + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma\{p,x(2r-1)\}}{\Gamma(p)(2r-1)^p} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^\infty \binom{-p}{2r-1}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

$$\zeta(p) = \frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{x^{p-1}}{2\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}-\log\frac{x}{2}\right) + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma\{p-1,x(2r-1)\}}{\Gamma(p-1)(2r-1)^p} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^\infty \binom{1-p}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}x^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

特に

$$\zeta(p) = \frac{p+1}{2(p-1)\Gamma(p+1)} + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p,r)}{\Gamma(p)r^p} - \sum_{r=1}^\infty \binom{-p}{2r-1}\frac{B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

$$\zeta(p) = \frac{p^2+1}{2(p-1)\Gamma(p+1)} + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p-1,r)}{\Gamma(p-1)r^p} - \sum_{r=1}^\infty \binom{1-p}{2r}\frac{B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}$$

$$\zeta(p) = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}\left\{\frac{1}{2\Gamma(p+1)} - \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p,r)}{\Gamma(p)}\frac{(-1)^r}{r^p} + \sum_{r=1}^\infty \binom{-p}{2r-1}\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

$$\zeta(p) = \frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{1}{2(p-1)\Gamma(p)} + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p,2r-1)}{\Gamma(p)(2r-1)^p} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^\infty \binom{-p}{2r-1}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

$$\zeta(p) = \frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{1}{2\Gamma(p)}\left(\frac{1}{p-1}+\log 2\right) + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p-1,2r-1)}{\Gamma(p-1)(2r-1)^p} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^\infty \binom{1-p}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

$$\zeta(p) = \frac{2^p}{2^p-1}\left\{\frac{2^{p-2}}{(p-1)\Gamma(p)} + \sum_{r=1}^\infty \frac{\Gamma(p-1,4r-2)}{\Gamma(p-1)(2r-1)^p} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^\infty \binom{1-p}{2r}\frac{(2^{2r}-2)B_{2r}2^{p-1+2r}}{2r\Gamma(p+2r)}\right\}$$

6 ゼータ関数のグローバル定義と諸係数の一般化

オイラーからリーマンまで、ゼータ関数は定義域の拡張に伴い、次のようにツギハギ的に定義されてきた。

$$\zeta(p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^p} & Re(p) > 1 \\ \displaystyle\frac{1}{1-2^{1-p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^p} & 0 \leqq Re(p) \leqq 1 \\ & p \neq 1 \\ \displaystyle\frac{2\Gamma(1-p)}{(2\pi)^{1-p}} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{1}{1-2^p} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{1-p}} & Re(p) \leqq 0 \\ & p \neq 0 \end{cases}$$

これでは不便である。そこで我々は次のような数列に着目する。

$$ {}_nB_r = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^n \qquad r=1,2,3,\cdots,n$$

この数列を用いれば、ゼータ関数は複素平面上で次のように定義できる。

定義6・2・1

$$\zeta(p) = \frac{1}{1-2^{1-p}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^{-p} \qquad p \neq 1$$

更にこの数列を用いれば、次のような諸係数も一般化できる。

一般ベルヌイ数

$$B_p = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & p = 1 \\ \dfrac{p}{2^p-1} \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^{p-1} & p \neq 1 \end{cases}$$

一般タンジェント数

$$T_p = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} 2^{p-r} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^p & p \neq 0 \end{cases}$$

第2種一般スターリング数

$$S_2(p,r) = \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} s^p \qquad r=1,2,3,\cdots$$

7 完備化されたリーマン・ゼータ

7･1 では、複素関数についての偶関数・奇関数を考察する。概ね実関数の場合と同様の結果が得られるが、複素関数に固有の結果は次のとおりである。

定理 7･1･3

$f(z)$ が領域 D 内に定義された複素関数とする。

(1) $f(z)$ が偶関数のとき、その実数部も虚数部も共に偶関数である。

(2) $f(z)$ が奇関数のとき、その実数部も虚数部も共に奇関数である。

定理 7･1･4

$f(z)$ が領域 D 内に定義された複素関数とする。このとき、
もし $f(z)$ が偶関数もしくは奇関数であれば、$|f(z)|^2$ は偶関数である。

7･2 では複素共役性について研究する。特に関数 $f(z)$ が素共役性を持つ偶関数もしくは奇関数である場合、次の重要な諸定理が得られる。

定理7･2･3

$f(x,y)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ は領域 D 内に定義された複素共役性を持つ関数とするとき、

(1) $f(x,y)$ が偶関数ならば

$$u(x,y)=\ u(x,-y)=\ u(-x,y)=u(-x,-y)$$
$$v(x,y)=-v(x,-y)=-v(-x,y)=v(-x,-y)$$

(2) $f(x,y)$ が奇関数ならば

$$u(x,y)=\ u(x,-y)=-u(-x,y)=-u(-x,-y)$$
$$v(x,y)=-v(x,-y)=\ v(-x,y)=-v(-x,-y)$$

系 7･2･3

$f(x,y)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ は領域 D 内に定義された複素共役性を持つ関数とする。
すると、任意の実数 $x,y\in D$ について次が成立する。

(1) $f(x,y)$ が偶関数のとき、$v(x,0)=0\quad,\quad v(0,y)=0$

(2) $f(x,y)$ が奇関数のとき、$u(0,y)=0\quad,\quad v(x,0)=0$

定理 7･2･4

領域 D 内の複素共役性を持つ関数 $f(z)$ が零点 $z_1=x_1+iy_1\ \left(x_1\neq 0\right)$ を持つとき、

(1) $f(z)$ が偶関数ならば、$-x_1-iy_1\ ,\ x_1-iy_1\ ,\ -x_1+iy_1$ も $f(z)$ の零点である。

(2) $f(z)$ が奇関数ならば、$-x_1-iy_1\ ,\ x_1-iy_1\ ,\ -x_1+iy_1$ も $f(z)$ の零点である。

7･3 では関数等式から対称関数等式を導く。

公式 7･3･1 (Riemann)

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)\qquad z\neq 0,1$$

$$\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)=\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}-z\right)\qquad z\neq\pm 1/2$$

7･4 では、完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z),\ \Xi(z)$ をそれぞれ次のように定義する。
なお、これらは Landau の定義とは少し異なっている。

$$\xi(z)=-z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

$$\Xi(z)=-\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、公式 7･3･1 より次式が成立する。

$$\xi(z) = \xi(1-z)$$

$$\Xi(z) = \Xi(-z)$$

後者の式から、$\Xi(z)$ は偶関数であることが判る。。従って、$\Xi(z)$ の実数部 $u(x,y)$ と虚数部 $v(x,y)$ について 定理7･2･3 (1) 及び 系7･2･3 (1) がそのまま成立する。そして 定理 7･2･4 より、次のとても重要な定理が得られる。

定理 7･4･1

リーマン･ゼータ関数 $\zeta(z)$ が 実数部が 1/2 でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成る。

$$1/2+\alpha_1 \pm i\beta_1 \quad , \quad 1/2-\alpha_1 \pm i\beta_1 \qquad (0 < \alpha_1 < 1/2)$$

8　完備化されたリーマン・ゼータの因数分解

8・1 では、次のようなアダマール積が示される。

公式 8・1・1 （ξ(z) のアダマール積表示）

完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

$\zeta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm iy_k \quad k=1,2,3,\cdots$ 、γ をオイラー・マスケロニの定数とするとき、$\xi(z)$ は次のようなアダマール積で表される。

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

$$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

そして、次の特殊値が得られる。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}} = e^{1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}} = 1.02336448\cdots$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\} = \frac{\pi}{3}$$

8・2 では、実数部が 1/2 である非自明な零点と実数部が 1/2 でない非自明零点が混在する場合、前節の諸式がどのように表されるかを考察する。そして次の定理等を得る。

定理 8・2・2

γ をオイラー・マスケロ二の定数、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、これらのうち、実数部が 1/2 のものを $1/2 \pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が 1/2 でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s \ (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} + \sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots$$

公式 8・2・3（特殊値）

リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right) = 1$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right) = \frac{\pi}{3}$$

定理 8・2・4

γ をオイラー・マスケロ二の定数、リーマン・ゼータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が 1/2 でない非自明零点は存在しない。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2} = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots$$

ちなみに、y_r を 1,000,000 個を使ってこれを計算したところ、左辺は右辺の 99.98% を占めた。

8･3 では、$\xi(z)$ が完全に因数分解されることを示す。

定理 8･3･1 （$\xi(z)$ の因数分解 ）
リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n=x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、$\xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\xi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)$$

8･4 では、先ず $\Xi(z)$ の因数分解を導く。

定理 8･4･1 （$\Xi(z)$ の因数分解 ）
リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n=x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして
完備化されたゼータ関数が次のようであるとする。

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、$\Xi(z)$ は次のように因数分解される。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

但し、$\Xi(0)=\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$

そして、この定理と前節の 定理 7･4･1 を用いて、次の定理を得る。

定理 8･4･4
リーマン･ゼータ関数を $\zeta(z)$ 、その非自明零点を $z_n=x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、
もし次式が成立するならば、実数部が 1/2 でない非自明零点は存在しない。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.99424155\cdots$$

ちなみに、y_r を 500,000 個を使ってこれを計算したところ、両辺は有効 5 桁が等しかった。

9 完備化されたリーマン・ゼータのマクローリン級数

9･1 では、完備化されたリーマン・ゼータ $\xi(z)$ がマクローリン級数に展開される。

定理 9･1･3 ($\xi(z)$ のマクローリン級数)

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、全複素平面上で次式が成立する。

$$\xi(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{(-1)^{s-t}g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

この級数の最初の数項は次のようになる。

$$\begin{aligned}\xi(z) = 1 &+ \left(\frac{\log^1\pi}{2^1 1!} - \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\gamma_0}{0!}\right)z^1 \\ &+ \left(\frac{\log^2\pi}{2^2 2!} + \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\gamma_1}{1!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}\right)z^2 \\ &+ \left(\frac{\log^3\pi}{2^3 3!} - \frac{g_3(3/2)}{2^3 3!} - \frac{\gamma_2}{2!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!} - \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!} - \frac{g_2(3/2)}{2^2 2!}\frac{\gamma_0}{0!}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(3/2)}{2^2 2!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_1}{1!} + \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(3/2)}{2^1 1!}\frac{\gamma_0}{0!}\right)z^3 \\ &+ \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 1. - 0.0230957\,z + 0.0233439\,z^2 - 0.000497984\,z^3 + 0.000253182\,z^4 \\ &\quad -5.05025\times10^{-6}\,z^5 + 1.72099\times10^{-6}\,z^6 - 3.23784\times10^{-8}\,z^7 + 8.31597\times10^{-9}\,z^8 \\ &\quad \vdots\end{aligned}$$

9･2 では、完備化されたリーマン・ゼータ $\Xi(z)$ がマクローリン級数に展開される。

定理 9･2･3 ($\Xi(z)$ のマクローリン級数)

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\Xi(z)$ が次のようであるとする。

$$\Xi(z) = -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、全複素平面上で次式が成立する。

$$\Xi(z) = \Xi(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}c_t z^r$$

$$\Xi(0) = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right), \psi_1\left(\frac{5}{4}\right), \dots, \psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$c_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)}\displaystyle\sum_{s=r}^{\infty}(-1)^r\frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!}\binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

この級数の最初の数項は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Xi(z) = \Xi(0)\Bigg\{ 1 &+ \left(-\frac{\log^1\pi}{2^1 1!} + \frac{g_1(5/4)}{2^1 1!} + c_1 \right) z^1 \\
&+ \left(\frac{\log^2\pi}{2^2 2!} + \frac{g_2(5/4)}{2^2 2!} + c_2 - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!} + \frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}c_1 - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}c_1 \right) z^2 \\
&+ \Bigg(-\frac{\log^3\pi}{2^3 3!} + \frac{g_3(5/4)}{2^3 3!} + c_3 + \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!} + \frac{\log^2\pi}{2^2 2!}c_1 + \frac{g_2(5/4)}{2^2 2!}c_1 \\
&\qquad - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_2(5/4)}{2^2 2!} - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}c_2 + \frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}c_2 - \frac{\log^1\pi}{2^1 1!}\frac{g_1(5/4)}{2^1 1!}c_1 \Bigg) z^3 \\
&+ \cdots \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 0.994242\{ 1. &+ 4.44089\times 10^{-16} z + 0.023105 z^2 + 1.38778\times 10^{-16} z^3 \\
&+ 0.000248334 z^4 + 2.08167\times 10^{-17} z^5 + 1.67435\times 10^{-6} z^6 \\
&+ 7.37257\times 10^{-18} z^7 + 8.0307\times 10^{-9} z^8 + 1.0842\times 10^{-18} z^9 \\
&+ 2.94014\times 10^{-11} z^{10} \}
\end{aligned}
$$

奇数次の係数はほぼ0になっている。

10 完備化されたリーマン・ゼータの零点と係数

10･1 では、完備化されたリーマン・ゼータ $\xi(z)$ の零点とマクローリン級数の係数との関係が2つの定理で示される。

定理 10･1･1

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r$$

すると、これらの係数 $A_r\ \ r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r = \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\,\frac{(-1)^{s-t}g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!}h_t$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \cdots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

定理 10･1･2

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r$$

すると、

(1) $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_k = x_k \pm i y_k\ ,\ y_k \neq 0\ \ k=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}$$

$$\begin{aligned} B_4 = &\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \\ &+ \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} B_{2n-1} = &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)} \\ &\vdots \\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_n}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)} \end{aligned}$$

$$B_{2n}=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)}$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_n}^2+y_{r_n}^2\right)}$$

(2) A_n を 定理 10･1･1 の係数とするとき、$B_n=A_n \quad n=1,2,3,\cdots$ である。

そして、もしリーマン仮説が真ならば、これと同値な次の命題が成立する。

命題 10･1･3

$z_k=1/2\pm iy_k$, $y_k\neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) はリーマン･ゼータ $\zeta(z)$ の非自明な零点で $A_r \quad r=1,2,3,\cdots$ は定理 10･1･1 で得られる定数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}=-A_1=0.0230957089\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)}=A_2+A_1=0.0002481555\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)}=-A_3-2\left(A_2+A_1\right)=0.0000016727\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=r+1}^{\infty}\sum_{t=s+1}^{\infty}\sum_{u=t+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)\left(1/4+y_s^2\right)\left(1/4+y_t^2\right)\left(1/4+y_u^2\right)}$$
$$=A_4+3A_3+5\left(A_2+A_1\right)=8.021073428\times10^{-9}$$

命題 10･1･3’

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^2=A_1^2-2\left(A_1+A_2\right)=0.00003710063\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^3=-A_1^3+3\left(A_1-2\right)\left(A_1+A_2\right)-3A_3=0.00000014367786\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/4+y_r^2}\right)^4=A_1^4-4A_1^3+4A_1^2\left(\frac{5}{2}-A_2\right)+4A_1\left(3A_2+A_3-5\right)$$
$$+2A_1^2-20A_2-12A_3-4A_4=6.59827915\times10^{-10}$$

10･2 では、完備化されたリーマン･ゼータ $\Xi(z)$ の零点とマクローリン級数の係数との関係が2つの定理で示される。

定理 10･2･1

完備化されたリーマン･ゼータ関数 $\Xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\Xi(z)=-\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$
$$=\Xi(0)\left(1+A_1z^1+A_2z^2+A_3z^3+A_4z^4+\cdots\right)$$

すると、これらの係数 $A_r \quad r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r=\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}(-1)^{r-s}\frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!}\frac{g_{s-t}(5/4)}{2^{s-t}(s-t)!}h_t$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ は Bell 多項式、γ_s はスチルチェス定数であり、

$$g_r\left(\frac{5}{4}\right)=\begin{cases}1 & r=0\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{5}{4}\right),\psi_1\left(\frac{5}{4}\right),\ldots,\psi_{r-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \dfrac{2}{\zeta(1/2)} \displaystyle\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^r \frac{\gamma_{s-1}}{(s-1)!} \binom{s}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{s-r} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

定理 10・2・2

完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\Xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\begin{aligned} \Xi(z) &= -\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) \\ &= \Xi(0)\left(1+B_1z^1+B_2z^2+B_3z^3+B_4z^4+\cdots\right) \end{aligned}$$

すると、

(1) $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_k=x_k\pm iy_k$, $y_k\ne 0$ $k=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$\Xi(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = -\frac{1}{4\pi^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9942415563\cdots$$

$$B_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2\left(x_{r_1}-1/2\right)}{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2}$$

$$B_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}-1/2\right)\left(x_{r_2}-1/2\right)}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{\left(x_{r_2}-1/2\right)^2+y_{r_2}^2\right\}} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}}$$

$$\begin{aligned} B_3 = &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3\left(x_{r_1}-1/2\right)\left(x_{r_2}-1/2\right)\left(x_{r_3}-1/2\right)}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{\left(x_{r_2}-1/2\right)^2+y_{r_2}^2\right\}\left\{\left(x_{r_3}-1/2\right)^2+y_{r_3}^2\right\}} \\ &-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)+\left(x_{r_2}-1/2\right)\right\}}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{\left(x_{r_2}-1/2\right)^2+y_{r_2}^2\right\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 = &\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4\left(x_{r_1}-1/2\right)\left(x_{r_2}-1/2\right)\cdots\left(x_{r_4}-1/2\right)}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{\left(x_{r_2}-1/2\right)^2+y_{r_2}^2\right\}\cdots\left\{\left(x_{r_4}-1/2\right)^2+y_{r_4}^2\right\}} \\ &+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)\left(x_{r_2}-1/2\right)+\cdots+\left(x_{r_2}-1/2\right)\left(x_{r_3}-1/2\right)\right\}}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{\left(x_{r_2}-1/2\right)^2+y_{r_2}^2\right\}\left\{\left(x_{r_3}-1/2\right)^2+y_{r_3}^2\right\}} \\ &+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left\{\left(x_{r_1}-1/2\right)^2+y_{r_1}^2\right\}\left\{\left(x_{r_2}-1/2\right)^2+y_{r_2}^2\right\}} \end{aligned}$$

$\vdots$

(2) A_n を 定理 10・2・1 の係数とするとき、$B_n=A_n$ $n=1,2,3,\cdots$ である。

そして、もしリーマン仮説が真ならば、これと同値な次の命題が成立する。

命題 10・2・3

$z_k=1/2\pm iy_k$, $y_k\ne 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) はリーマン・ゼータ $\zeta(z)$ の非自明な零点で
A_r $r=1,2,3,\cdots$ は定理 10・2・1 で得られる定数とするとき、次式が成立する。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2} = A_2 = 0.0231049931\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2y_{r_2}^2} = A_4 = 0.0002483340\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2y_{r_2}^2y_{r_3}^2} = A_6 = 0.00000167435\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2y_{r_2}^2y_{r_3}^2y_{r_4}^2} = A_8 = 8.030697\times 10^{-9}$$

$\vdots$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{y_{r_1}^2 y_{r_2}^2\cdots y_{r_{2n}}^2}=A_{2n}$$

命題 10･2･3'

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^4}=A_2^2-2A_4=0.00003717259\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^6}=A_2^3-3A_2A_4+3A_6=0.00000014417393\cdots$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{y_r^8}=A_2^4+2A_4^2-4A_2^2A_4+4A_2A_6-4A_8=6.6303\times 10^{-10}$$

11 リーマン・ゼータの臨界線上の零点

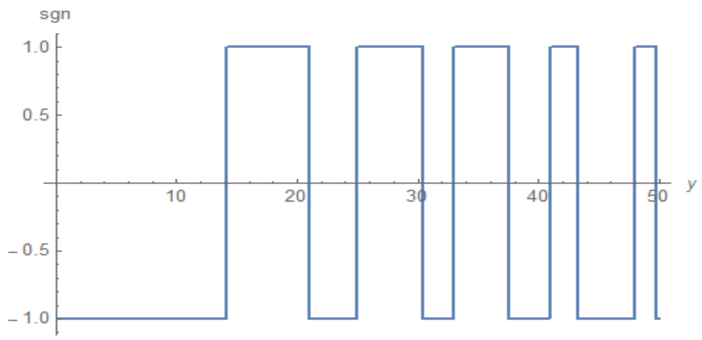
11･1では、完備化されたリーマン・ゼータ $\Xi(z)$ に $z=0+iy$ を代入して

$$\Xi_h(y) = -\left(\frac{1}{2}+iy\right)\left(\frac{1}{2}-iy\right)\pi^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

とし、これを用いて臨界線上の零点の計算を企てる。しかしこの関数は絶対値が小さ過ぎ、$y=917$ 程度までの零点しか求めることが出来ない。

そこで $\Xi_h(y)$ を正規化して次のような符号関数を定義する。

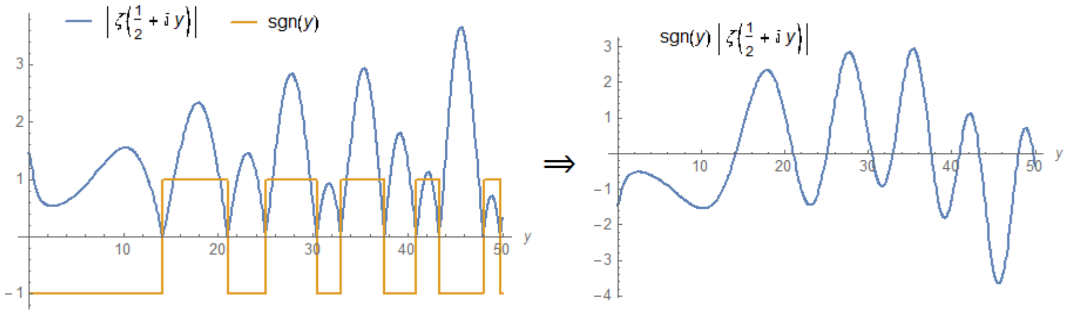
$$sgn(y) = -\frac{\Xi_h(y)}{|\Xi_h(y)|} = \pi^{-\frac{iy}{2}}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|}$$



この符号関数 $sgn(y)$ を用いれば大きな y における臨界線上の零点でも求めることが出来る。
しかしながらこの符号関数 $sgn(y)$ には、レーマ現象を見逃し易いと言う欠点がある。

そこで 11･2 では、この符号関数 $sgn(y)$ をリーマン・ゼータ関数 $\zeta(1/2+iy)$ の絶対値に乗じて滑らかな関数 $Z(y)$ を得る。

$$Z(y) = sgn(y)\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right| = \pi^{-\frac{iy}{2}}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\right|}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$



この関数 $Z(y)$ を用いれば曲線と y 軸との交点によって $\zeta(z)$ の臨界線上の零点を探すことができ、レーマ現象を見逃す危険が少なくなる。

11･3 では、先ず *Lemma* が用意される。

Lemma

$f(z)$ を領域 D 上に定義された複素関数とするとき、次式が成立する。

$$e^{i\,Im\log f(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

11･2 のガンマ関数にこの *Lemma* を適用すると、

$$Z(y) = \pi^{-\frac{iy}{2}} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}\right|} \zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) = \pi^{-\frac{iy}{2}} e^{i\, Im\, log\, \Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\}} \zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

これより、

$$Z(y) = e^{i\theta(y)}\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$ 但し、$$\theta(y) = Im\ log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right\} - \frac{y}{2}log\pi$$

これは リーマン・ジーゲルの Z 関数の定義式 である。

12 リーマン・ゼータの零点と連立無限次方程式

12・1 では、リーマン・ゼータ $\zeta(1/2\pm z)$ が実部虚部別にローラン展開される。

公式 12・1・3

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(1/2+z)$ $(z=x+iy)$、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=1/2$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right) = -\frac{1}{1/2-z} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(1/2-z)^s}{s\,!} = u_+(z)+i\,v_+(z)$$

$$u_+(x,y) = -\frac{1/2-x}{(1/2-x)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{(1/2-x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v_+(x,y) = -\frac{y}{(1/2-x)^2+y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{(1/2-x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

但し、$0^0=1$

公式 12・1・4

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(1/2+z)$ $(z=x+iy)$、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$z=1/2$ を除く複素平面上で次式が成立する。

$$\zeta\left(\frac{1}{2}-z\right) = -\frac{1}{1/2+z} + \sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s\frac{(1/2+z)^s}{s\,!} = u_-(z)+i\,v_-(z)$$

$$u_-(x,y) = -\frac{1/2+x}{(1/2+x)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s}\frac{(1/2+x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v_-(x,y) = \frac{y}{(1/2+x)^2+y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_{2r+s+1}\frac{(1/2+x)^s}{s\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

但し、$0^0=1$

12・2 では、これらが加減されて偶関数と奇関数に組み替えられる。

公式 12・2・1 (偶関数)

$$\zeta_e(z) = -\frac{1/2}{1/4-z^2} + \sum_{s=0}^{\infty}f^{(2s)}(0)\frac{z^{2s}}{(2s)\,!}$$

$$u_e(x,y) = -\frac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v_e(x,y) = -\frac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

公式 12・2・2 (奇関数)

$$\zeta_o(z) = -\frac{z}{1/4-z^2} - \sum_{s=0}^{\infty}f^{(2s+1)}(0)\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)\,!}$$

$$u_o(x,y) = -\frac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)\,!}$$

$$v_o(x,y) = -\frac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)\,!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)\,!}$$

但し、両公式において

$$f^{(s)}(0) = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{ = \sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}\right\}, \qquad 0^0=1$$

12・3 では、リーマン・ゼータ $\zeta(1/2+z)$ が零点を持つための必要十分条件が示される。

定理 12・3・1

リーマン・ゼータ関数を $\zeta(1/2\pm z)$ $(z=x+iy)$ 、スチルチェス定数を γ_s $s=0,1,2,\cdots$ とするとき、$\zeta(1/2\pm z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式が解を持つことである。

$$
\begin{cases}
u_e = -\dfrac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\
v_e = -\dfrac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \\
u_o = -\dfrac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\
v_o = -\dfrac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0
\end{cases}
$$

但し、 $f^{(s)}(0)=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{=\sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}\right\}, \quad 0^0=1$

12・4 では、リーマン仮説と同値な2つの仮説が提示される。

仮説 12・4・1

γ_s $s=0,1,2,\cdots$ をスチルチェス定数、x,y を実数とするとき、次の連立方程式は $x\neq 0$ なる解を持たない。

$$
\begin{cases}
v_o = -\dfrac{y\left(1/4+x^2+y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0 \\
u_o = -\dfrac{x\left(1/4-x^2-y^2\right)}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} - \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+1)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0
\end{cases}
$$

仮説 12・4・2

γ_s $s=0,1,2,\cdots$ をスチルチェス定数、x,y を実数とするとき、次の連立方程式は $x\neq 0$ なる解を持たない。

$$
\begin{cases}
u_e = -\dfrac{1/4-x^2+y^2}{2\left\{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2\right\}} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s)}(0)\frac{x^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^r y^{2r}}{(2r)!} = 0 \\
v_e = -\dfrac{xy}{\left(1/4-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f^{(2r+2s+2)}(0)\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^r y^{2r+1}}{(2r+1)!} = 0
\end{cases}
$$

但し、両仮説において

$$f^{(s)}(0)=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\gamma_{s+t}}{t!}\left(\frac{1}{2}\right)^t \quad \left\{=\sum_{t=s}^{\infty}\frac{\gamma_t}{(t-s)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-s}\right\}, \quad 0^0=1$$

y が大きいところでは分数関数の部分は無視することができる。すると、これらの y に関する偏導関数を考慮すれば、上記2つの仮説は成立する可能性は高いと思われる。

13 リーマン仮説が成立しない確率

13･1 ξ(z) のマクローリン級数

定理 13･1･1

完備化されたリーマン･ゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r \tag{1.0}$$

すると､これらの係数 $A_r\ \ r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r = \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\log^{r-s}\pi}{2^{r-s}(r-s)!} \frac{(-1)^{s-t} g_{s-t}(3/2)}{2^{s-t}(s-t)!} h_t \tag{1.a}$$

但し､$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数､$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式､γ_s はスチルチェス定数であり､

$$g_r\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0\left(\frac{3}{2}\right), \psi_1\left(\frac{3}{2}\right), \cdots, \psi_{r-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$h_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ -\dfrac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!} & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

例 (記号)

```
Clear[A, g, h, γ, ψ]
```

$$A_{r\_} := \sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s} \frac{\mathrm{Log}[\pi]^{r-s}}{2^{r-s}\ (r-s)!} \frac{(-1)^{s-t}\ g_{s-t}[3/2]}{2^{s-t}\ (s-t)!} h_t$$

$$g_{r\_}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathrm{If}\left[r == 0, 1, \sum_{k=1}^{r} \mathrm{BellY}\left[r, k, \mathrm{Tbl}\psi\left[r, \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$h_{r\_} := \mathrm{If}\left[r == 0, 1, -\frac{\gamma_{r-1}}{(r-1)!}\right]$$

```
Tblψ[r_, z_] := Table[ψk[z], {k, 0, r - 1}]
```

A_0 　 1

A_1 　 $\dfrac{\mathrm{Log}[\pi]}{2} - \gamma_0 - \dfrac{1}{2}\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right]$

A_2 　 $\dfrac{\mathrm{Log}[\pi]^2}{8} - \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}[\pi]\,\gamma_0 - \gamma_1 - \dfrac{1}{4}\mathrm{Log}[\pi]\,\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right] + \dfrac{1}{2}\gamma_0\,\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right] + \dfrac{1}{8}\left(\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\dfrac{3}{2}\right]\right)$

A_3 　 $\dfrac{\mathrm{Log}[\pi]^3}{48} - \dfrac{1}{8}\mathrm{Log}[\pi]^2\,\gamma_0 - \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}[\pi]\,\gamma_1 - \dfrac{\gamma_2}{2} - \dfrac{1}{16}\mathrm{Log}[\pi]^2\,\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right] +$
$\dfrac{1}{4}\mathrm{Log}[\pi]\,\gamma_0\,\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right] + \dfrac{1}{2}\gamma_1\,\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right] + \dfrac{1}{16}\mathrm{Log}[\pi]\left(\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\dfrac{3}{2}\right]\right) -$
$\dfrac{1}{8}\gamma_0\left(\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right]^2 + \psi_1\left[\dfrac{3}{2}\right]\right) + \dfrac{1}{48}\left(-\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right]^3 - 3\,\psi_0\left[\dfrac{3}{2}\right]\psi_1\left[\dfrac{3}{2}\right] - \psi_2\left[\dfrac{3}{2}\right]\right)$

例 (数値)

```
SetPrecision[{A1, A2, A3, A4, A5}, 14]
```

$\{-0.0230957089661,\ 0.0233438645342,$
$-0.0004979838499,\ 0.0002531817303,\ -5.0502548\times 10^{-6}\}$

13·2 ξ(z) におけるヴィエタの公式

定理 13·2·1（共役複素根を持つ無限次方程式）

複素平面上の関数 $f(z)$ が零点 $z_k = x_k \pm i y_k$, $y_k \neq 0$ ($k=1,2,3,\cdots$) を持ち、次のように完全に因数分解されるとする。

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

すると $f(z)$ は次のように冪級数に展開される。

$$f(z) = 1+a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots \tag{2.1}$$

但し、

$$a_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_1C_1 = 1$$

$$a_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} + \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_2C_2 = 1\ ,\ {}_1C_0 = 1$$

$$a_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} - \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_3C_3 = 1,\ {}_2C_1 = 2$$

$$a_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_4 = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_2 = 3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_2C_0 = 1$$

$$a_5 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty}\frac{2^5 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}x_{r_5}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)\left(x_{r_5}^2+y_{r_5}^2\right)} \qquad {}_5C_5 = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^3\left(x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}+x_{r_1}x_{r_2}x_{r_4}+x_{r_1}x_{r_3}x_{r_4}+x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_3 = 4$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_1 = 3$$

$\vdots$

$$a_{2n} = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n} x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n} = 1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-2} = 2n-1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-4}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-4}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)} \qquad {}_{2n-2}C_{2n-4}$$

$\vdots$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-n}=r_{2n-n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-n}}^2+y_{r_{2n-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n-n}C_{2n-2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1}=r_{2n}+1}^{\infty}\frac{2^{2n+1} x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n+1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1}}^2+y_{r_{2n+1}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1}C_{2n+1} = 1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n-1}=2n$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-3}$$

$\vdots$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1-n}=r_{2n-n}+1}^{\infty}\frac{2^{1}\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_{2n+1-n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1-n}}^2+y_{r_{2n+1-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1-n}C_{2n+1-2n}=n+1$$

なお、右端の二項係数は各半多重級数の分子の項数である。

定理 13･2･2

完備化されたリーマンゼータ関数 $\xi(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\xi(z)=-z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\sum_{r=0}^{\infty}B_r z^r \tag{2.2}$$

すると、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の非自明な零点 $z_{r_t}=x_{r_t}\pm iy_{r_t}$, $y_{r_t}\neq 0$ $t=1,2,3,\cdots$ に対して次式が成立する。

$$B_1=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^1 x_{r_1}}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_1C_1=1$$

$$B_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^2 x_{r_1}x_{r_2}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)}+\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{2^0}{x_{r_1}^2+y_{r_1}^2} \qquad {}_2C_2=1\ ,\ {}_1C_0=1$$

$$B_3=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^3 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)}-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_3C_3=1,\ {}_2C_1=2$$

$$B_4=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^4 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_4=1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^2\left(x_{r_1}x_{r_2}+x_{r_1}x_{r_3}+x_{r_2}x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_2=3$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)} \qquad {}_2C_0=1$$

$$B_5=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty}\frac{2^5 x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}x_{r_5}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)\left(x_{r_5}^2+y_{r_5}^2\right)} \qquad {}_5C_5=1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{2^3\left(x_{r_1}x_{r_2}x_{r_3}+x_{r_1}x_{r_2}x_{r_4}+x_{r_1}x_{r_3}x_{r_4}+x_{r_2}x_{r_3}x_{r_4}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)\left(x_{r_4}^2+y_{r_4}^2\right)} \qquad {}_4C_3=4$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+x_{r_3}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\left(x_{r_3}^2+y_{r_3}^2\right)} \qquad {}_3C_1=3$$

$\vdots$

$$B_{2n}=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n}=1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-2}=2n-1$$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-2}=r_{2n-3}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-4}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-4}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-2}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-2}}^2+y_{r_{2n-2}}^2\right)} \qquad {}_{2n-2}C_{2n-4}$$

$\vdots$

$$+\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-n}=r_{2n-n-1}+1}^{\infty}\frac{2^0}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-n}}^2+y_{r_{2n-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n-n}C_{2n-2n}=1$$

$$B_{2n+1}=-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1}=r_{2n}+1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n+1}}}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1}}^2+y_{r_{2n+1}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1}C_{2n+1}=1$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n}=r_{2n-1}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-1}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n}}+\cdots+x_{r_2}x_{r_3}\cdots x_{r_{2n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n}}^2+y_{r_{2n}}^2\right)} \qquad {}_{2n}C_{2n-1}=2n$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n-1}=r_{2n-2}+1}^{\infty}\frac{2^{2n-3}\left(x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-3}}+x_{r_1}x_{r_2}\cdots x_{r_{2n-2}}+\cdots+x_{r_3}x_{r_4}\cdots x_{r_{2n-1}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n-1}}^2+y_{r_{2n-1}}^2\right)} \qquad {}_{2n-1}C_{2n-3}$$

$$\vdots$$

$$-\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_{2n+1-n}=r_{2n-n}+1}^{\infty}\frac{2^1\left(x_{r_1}+x_{r_2}+\cdots+x_{r_{2n+1-n}}\right)}{\left(x_{r_1}^2+y_{r_1}^2\right)\left(x_{r_2}^2+y_{r_2}^2\right)\cdots\left(x_{r_{2n+1-n}}^2+y_{r_{2n+1-n}}^2\right)} \qquad {}_{2n+1-n}C_{2n+1-2n}=n+1$$

なお、右端の二項係数は各半多重級数の分子の項数である。

13･3 リーマン仮説と同値な命題 その1

命題 13･3･2

n は自然数、A_n は 定理 13･1･1 で得られた定数、そして y_{r_t} はリーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の臨界線上の零点とする。すると次式が成立する。

$$H_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{n}\binom{n-1+k}{n-1}(n-k)A_{n-k} \tag{3.2}$$

但し、

$$H_1=\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}$$

$$H_2=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}$$

$$H_3=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}$$

$$\vdots$$

$$H_n=\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_n}^2\right)}$$

例

(3.2) の最初の数個を書き下せば、

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_{r_1}^2}=-A_1=0.0230957089\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)}=A_1+A_2=0.000248155568\cdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)}=-2\left(A_1+A_2\right)-A_3=1.672713713\times10^{-6}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\left(1/4+y_{r_4}^2\right)}=5\left(A_1+A_2\right)+3A_3+A_4$$
$$=8.021073428\times10^{-9}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_5=r_4+1}^{\infty}\frac{1}{\left(1/4+y_{r_1}^2\right)\left(1/4+y_{r_2}^2\right)\left(1/4+y_{r_3}^2\right)\cdots\left(1/4+y_{r_5}^2\right)}=-14\left(A_1+A_2\right)-9A_3-4A_4-A_5$$
$$=2.936055872\times10^{-11}$$

13･4 リーマン仮説と同値な命題 その2

命題 13･4･2

n を 2 以上の自然数、A_n を 定理 13･1･1 で得られた定数とするとき、次式が成立する。

$$G_n = G_1^n - 2G_1^{n-1}H_2 - \sum_{s=0}^{n-3} G_1^s \left(\sum_{t=2}^{n-s-1} (-1)^t G_{n-s-t} H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s} \right) \tag{4.2}$$

但し、

$$G_n = \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/4 + y_{r_1}^2} \right)^n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n} \binom{n-1+k}{n-1} (n-k) A_{n-k} \qquad n=2,3,4,\cdots$$

$$G_1 = -A_1 \qquad (=H_1)$$

$n \le 2$ のとき (4.2) の第 3 項は無いものとする。

例

この命題を *Mathematica* を用いて再帰式として計算すれば (4.2) の最初の幾つかは次のようになる。

Clear[G, H, A]

$$\mathbf{G_{n\_} := G_1{}^n - \sum_{s=0}^{n-3} G_1{}^s \left(\sum_{t=2}^{n-1-s} (-1)^t G_{n-s-t} H_t + (-1)^{n-s} (n-s) H_{n-s} \right) - 2\, G_1{}^{n-2} H_2}$$

$$\mathbf{H_{n\_} := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{Binomial}[n-1+k,\, n-1]\,(n-k)\, A_{n-k}}$$

$$\mathbf{G_1 := -A_1}$$

Expand[G_2] $-2 A_1 + A_1^2 - 2 A_2$

Expand[G_3] $-6 A_1 + 3 A_1^2 - A_1^3 - 6 A_2 + 3 A_1 A_2 - 3 A_3$

Expand[G_4] $-20 A_1 + 10 A_1^2 - 4 A_1^3 + A_1^4 - 20 A_2 + 12 A_1 A_2 - 4 A_1^2 A_2 + 2 A_2^2 - 12 A_3 + 4 A_1 A_3 - 4 A_4$

Expand[G_5] $-70 A_1 + 35 A_1^2 - 15 A_1^3 + 5 A_1^4 - A_1^5 - 70 A_2 + 45 A_1 A_2 - 20 A_1^2 A_2 + 5 A_1^3 A_2 +$
$10 A_2^2 - 5 A_1 A_2^2 - 45 A_3 + 20 A_1 A_3 - 5 A_1^2 A_3 + 5 A_2 A_3 - 20 A_4 + 5 A_1 A_4 - 5 A_5$

Expand[G_6] $-252 A_1 + 126 A_1^2 - 56 A_1^3 + 21 A_1^4 - 6 A_1^5 + A_1^6 - 252 A_2 + 168 A_1 A_2 - 84 A_1^2 A_2 + 30 A_1^3 A_2 -$
$6 A_1^4 A_2 + 42 A_2^2 - 30 A_1 A_2^2 + 9 A_1^2 A_2^2 - 2 A_2^3 - 168 A_3 + 84 A_1 A_3 - 30 A_1^2 A_3 + 6 A_1^3 A_3 +$
$30 A_2 A_3 - 12 A_1 A_2 A_3 + 3 A_3^2 - 84 A_4 + 30 A_1 A_4 - 6 A_1^2 A_4 + 6 A_2 A_4 - 30 A_5 + 6 A_1 A_5 - 6 A_6$

Expand[G_{16}] $-155\,117\,520 A_1 + 77\,558\,760 A_1^2 - 37\,442\,160 A_1^3 + 17\,383\,860 A_1^4 - 7\,726\,160 A_1^5 + 3\,268\,760 A_1^6 -$
$1\,307\,504 A_1^7 + 490\,314 A_1^8 - 170\,544 A_1^9 + 54\,264 A_1^{10} - 15\,504 A_1^{11} + 3876 A_1^{12} - 816 A_1^{13} + 136 A_1^{14} -$
$16 A_1^{15} + A_1^{16} - 155\,117\,520 A_2 + 112\,326\,480 A_1 A_2 - 69\,535\,440 A_1^2 A_2 + 38\,630\,800 A_1^3 A_2 -$
$19\,612\,560 A_1^4 A_2 + 9\,152\,528 A_1^5 A_2 - 3\,922\,512 A_1^6 A_2 + 1\,534\,896 A_1^7 A_2 - 542\,640 A_1^8 A_2 +$
$170\,544 A_1^9 A_2 - 46\,512 A_1^{10} A_2 + 10\,608 A_1^{11} A_2 - 1904 A_1^{12} A_2 + 240 A_1^{13} A_2 - 16 A_1^{14} A_2 + 34\,767\,720 A_2^2 -$

⋮

The middle parts were omitted

⋮

$3808 A_1 A_2 A_{11} + 720 A_1^2 A_2 A_{11} - 64 A_1^3 A_2 A_{11} - 240 A_2^2 A_{11} + 48 A_1 A_2^2 A_{11} + 1904 A_3 A_{11} - 480 A_1 A_3 A_{11} +$
$48 A_1^2 A_3 A_{11} - 32 A_2 A_3 A_{11} + 240 A_4 A_{11} - 32 A_1 A_4 A_{11} + 16 A_5 A_{11} - 46\,512 A_{12} + 10\,608 A_1 A_{12} -$
$1904 A_1^2 A_{12} + 240 A_1^3 A_{12} - 16 A_1^4 A_{12} + 1904 A_2 A_{12} - 480 A_1 A_2 A_{12} + 48 A_1^2 A_2 A_{12} - 16 A_2^2 A_{12} +$
$240 A_3 A_{12} - 32 A_1 A_3 A_{12} + 16 A_4 A_{12} - 10\,608 A_{13} + 1904 A_1 A_{13} - 240 A_1^2 A_{13} + 16 A_1^3 A_{13} + 240 A_2 A_{13} -$
$32 A_1 A_2 A_{13} + 16 A_3 A_{13} - 1904 A_{14} + 240 A_1 A_{14} - 16 A_1^2 A_{14} + 16 A_2 A_{14} - 240 A_{15} + 16 A_1 A_{15} - 16 A_{16}$

13･5 リーマン仮説が成立しない確率

定理13･1･1 と 命題 13･4･2 に従い、*Mathematica* を用いて この確率を計算する。道具立ては次のとおり。

$$\mathtt{Tbl}\psi[\mathtt{r\_},\ \mathtt{z\_}] := \mathtt{Table}[\mathtt{PolyGamma}[\mathtt{k},\ \mathtt{z}],\ \{\mathtt{k},\ 0,\ \mathtt{r}-1\}]$$

$$\gamma_{\mathtt{s\_}} := \mathtt{StieltjesGamma}[\mathtt{s}]$$

$$\mathtt{g}_{\mathtt{r\_}}\left[\frac{3}{2}\right] := \mathtt{If}\left[\mathtt{r} == 0,\ 1,\ \sum_{\mathtt{k}=1}^{\mathtt{r}} \mathtt{BellY}\left[\mathtt{r},\ \mathtt{k},\ \mathtt{Tbl}\psi\left[\mathtt{r},\ \frac{3}{2}\right]\right]\right]$$

$$\mathtt{h}_{\mathtt{r\_}} := \mathtt{If}\left[\mathtt{r} == 0,\ 1,\ -\frac{\gamma_{\mathtt{r}-1}}{(\mathtt{r}-1)\,!}\right]$$

$$\mathtt{A}_{\mathtt{r\_}} := \sum_{\mathtt{s}=0}^{\mathtt{r}} \sum_{\mathtt{t}=0}^{\mathtt{s}} \frac{\mathtt{Log}[\pi]^{\mathtt{r}-\mathtt{s}}}{2^{\mathtt{r}-\mathtt{s}}\ (\mathtt{r}-\mathtt{s})\,!}\ \frac{(-1)^{\mathtt{s}-\mathtt{t}}\ \mathtt{g}_{\mathtt{s}-\mathtt{t}}[3/2]}{2^{\mathtt{s}-\mathtt{t}}\ (\mathtt{s}-\mathtt{t})\,!}\ \mathtt{h}_{\mathtt{t}}$$

$$\mathtt{y}_{\mathtt{r\_}} := \mathtt{Im}[\mathtt{ZetaZero}[\mathtt{r}]]$$

最初の5行は 定理 13･1･1 に従って理論値 A_r を求めるツールである。最後の y_r は臨界線上の零点である。これらにより A_r と y_r の値が瞬時に得られる。 以下、命題 13･4･2 の等式に従って各次毎に計算が行われる。

16 次

最後はジャンプしてこの計算を行う。臨界上の零点は前2例に同じく 30,000 個を取る。

$$\mathtt{f16}[\mathtt{m\_}] := \sum_{\mathtt{r}=1}^{\mathtt{m}} \left(\frac{1}{1/4+\mathtt{y_r}^2}\right)^{16}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{g16} :=\ & -155\,117\,520\,A_1 + 77\,558\,760\,A_1^2 - 37\,442\,160\,A_1^3 + 17\,383\,860\,A_1^4 - 7\,726\,160\,A_1^5 + 3\,268\,760\,A_1^6 - \\ & 1\,307\,504\,A_1^7 + 490\,314\,A_1^8 - 170\,544\,A_1^9 + 54\,264\,A_1^{10} - 15\,504\,A_1^{11} + 3876\,A_1^{12} - 816\,A_1^{13} + 136\,A_1^{14} - \\ & 16\,A_1^{15} + A_1^{16} - 155\,117\,520\,A_2 + 112\,326\,480\,A_1\,A_2 - 69\,535\,440\,A_1^2\,A_2 + 38\,630\,800\,A_1^3\,A_2 -\end{aligned}$$

⋮

The middle parts were omitted

⋮

$$\begin{aligned}& 1904\,A_1^2\,A_{12} + 240\,A_1^3\,A_{12} - 16\,A_1^4\,A_{12} + 1904\,A_2\,A_{12} - 480\,A_1\,A_2\,A_{12} + 48\,A_1^2\,A_2\,A_{12} - 16\,A_2^2\,A_{12} + \\ & 240\,A_3\,A_{12} - 32\,A_1\,A_3\,A_{12} + 16\,A_4\,A_{12} - 10\,608\,A_{13} + 1904\,A_1\,A_{13} - 240\,A_1^2\,A_{13} + 16\,A_1^3\,A_{13} + 240\,A_2\,A_{13} - \\ & 32\,A_1\,A_2\,A_{13} + 16\,A_3\,A_{13} - 1904\,A_{14} + 240\,A_1\,A_{14} - 16\,A_1^2\,A_{14} + 16\,A_2\,A_{14} - 240\,A_{15} + 16\,A_1\,A_{15} - 16\,A_{16}\end{aligned}$$

```
SetPrecision[f16[30000], 105]
```

$1.52095375313428790416691125096776570270017381985973087702928876918849076318838048230\backslash$
$44671528194807135528 \times 10^{-37}$

```
SetPrecision[g16, 150]
```

$1.52095375313428790416691125096776570270017381985973087702928876918849076318838048230\backslash$
$44671528194807135606 \times 10^{-37}$

```
1.52095375313428790416691125096776570270017381985973087702928876918849076318838048230\
  446715281948071355277615215142781`103.64525271013926*^-37 /
 1.52095375313428790416691125096776570270017381985973087702928876918849076318838048230\
  04467152819480713560634755589948988`103.84156841793063*^-37
```

0.99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
999999999999999999483

```
1 - %
```

5.2×10^{-102}

即ち、臨界上の零点 30,000 個の 16 乗和は理論値の101 ナイン(101N) を占めている。従って リーマン仮説が成立しない確率は 10^{-101} 未満である。

リーマン予想の図的証明

この証明は、1つの章に収めるのが困難なので、独立の稿とする。

第1章 では、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ 及びディリクレイータ関数 $\eta(z)$ の定義、そして、両者の関係式を示す。 即ち、

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z)>1 \qquad (1.\zeta)$$

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1}e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+-\cdots \qquad Re(z)>0 \qquad (1.\eta)$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}}\eta(z) \qquad z\neq 1$$

第2章 では、同値な3つの補題が提示し証明される。

補題 2･1

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$0<x<1$ において $\eta(z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log r} = 0 & (2.1_+) \\ \eta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-(1-z)\log r} = 0 & (2.1_-) \end{cases}$$

補題 2･1’

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \eta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}e^{-z\log r} = 0 & (2.1'_+) \\ \eta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}e^{z\log r} = 0 & (2.1'_-) \end{cases}$$

補題 2･2

実数の集合を R とし、ディリクレ･イータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \eta_c(z) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(z\log r) = 0 & (2.2c) \\ \eta_s(z) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(z\log r) = 0 & (2.2s) \end{cases}$$

そして、補題 2･2 を実部虚部別に表示して次の定理を得る。

定理 2･3

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} u_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \\ u_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}}\cosh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \end{cases}$$

第3章 では、$v_c(x,y)$ の y に関する振幅が考察されます。そして次の法則を得る。

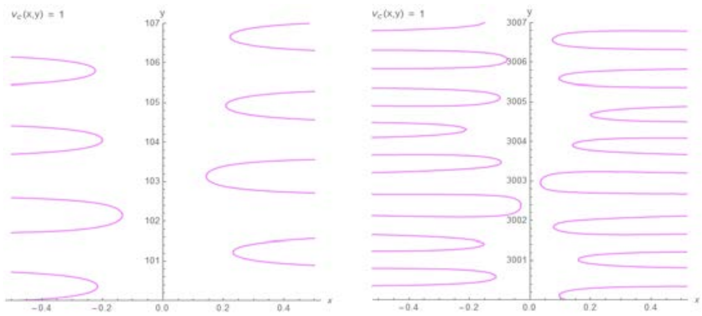
法則 3・4・5

x,y を実数、関数 $v_c(x,y)$ を次のようであるとする。

$$v_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} sinh(x\log r)\ sin(y\log r) \tag{2.4c}$$

すると、x が与えられたとき、$v_c(x,y)$ の振幅は概して y の絶対値に比例する。

この法則により、x が与えられたとき $v_c(x,y)$ の等高線の先端は y が大きいほど概して y 軸に近づくことが説明できる。例えば、$v_c(x,y)$ の高さ 1 の等高線図を $y=100\sim107$ と $y=3000\sim3007$ について描くとそれぞれ次のようになる。左図が $y=100\sim107$ で 右図が $y=3000\sim3007$ である。



第4章 では、$u_s(x,y)$ の y に関する振幅が考察されます。そして次の法則を得る。

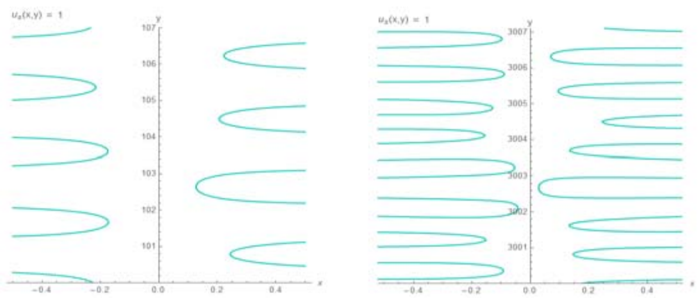
法則 4・4・5

x,y を実数、関数 $u_s(x,y)$ を次のようであるとする。

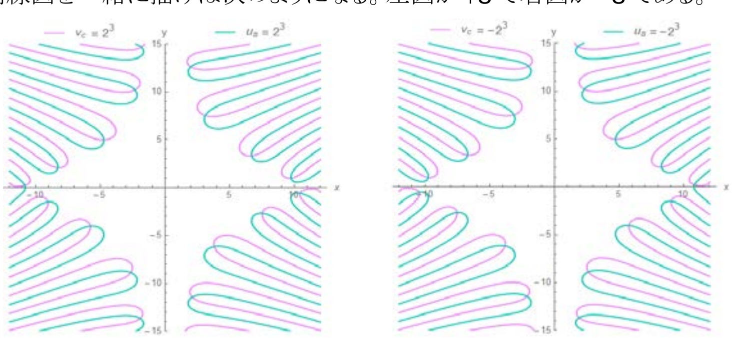
$$u_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} sinh(x\log r)\ cos(y\log r) \tag{2.4s}$$

すると、x が与えられたとき、$u_s(x,y)$ の振幅は概して y の絶対値に比例する。

この法則により、x が与えられたとき $u_s(x,y)$ の等高線の先端は y が大きいほど概して y 軸に近づくことが説明できる。例えば、$u_s(x,y)$ の高さ 1 の等高線図を $y=100\sim107$ と $y=3000\sim3007$ について描くとそれぞれ次のようになる。左図が $y=100\sim107$ で 右図が $y=3000\sim3007$ である。



第5章では、$v_c(x,y)=u_s(x,y)=\pm h\ \ (h\ge 0)$ の等高線が注目されます。例えば、$v_c(x,y), u_s(x,y)$ の高さ ± 8 の等高線図を一緒に描けば次のようになる。左図が $+8$ で右図が -8 である。



$v_c(x,y), u_s(x,y)$ は x に関して奇関数であるので、左図と右図は y 軸に関して鏡像関係になる。また $v_c(x,y)$ は y に関して奇関数であるので、左図と右図は x 軸に関しても鏡像関係になる。両図は平面上での移動や回転では決して重なることが出来ない。

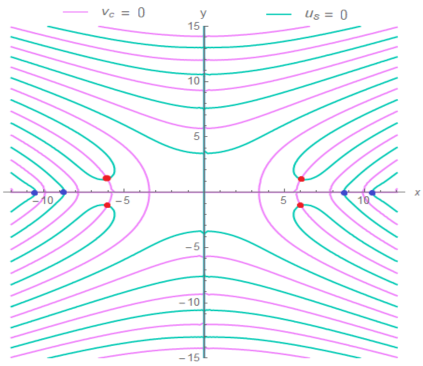
然るに、高さ ± 0 においては左図と右図は移動も回転も無しに重ならなければならない。そのためには、高さが上下から ± 0 に近づくにつれて両図の等高線が変形しなければならない。そして高さ ± 0 において 両図は y 軸に関しても x 軸に関しても線対称にならねばならない。

このことは高さ非ゼロでは y 軸に関して互生であった等高線が高さ ± 0 では対生になるべきことを強要する。このことは x 軸に関しても同様である。

かくして、高さ ± 0 において $\supset\ \subset$ の右端左端は y 軸に吸収され、$\cup\ \cap$ の下端上端は x 軸に吸収されなければならない。実際、$v_c(x,y), u_s(x,y)$ の高さを上下から 0 に近づければ等高線は最終的に次図のようになる。

$v_c = u_s = \pm 1$ から $v_c = u_s = \pm 0$ までのアニメーションは ここをクリック AnimZ5219.gif

↘ ↙



理論どおり、y 軸および x 軸に関して非線対称な等高線の部分は両軸に吸収された。結果、無数の自明な解(青点)と4個の非自明な解(赤点)が残った。自明な解は x 軸上にあり、非自明な解は臨界領域 $-1/2 < x < 1/2$ の外に存在する。

この図は $|y| \le 15$ で描かれているが、法則 3•4•5 と 法則 4•4•5 によれば、$|y|$ が大きいところでは $\supset\ \subset$ の右端左端はより速く y 軸に吸収されることになる。

かくして、連立方程式 $v_c(x,y) = u_s(x,y) = 0$ は 臨界領域 $-1/2 < x < 1/2$ 内では 臨界線 $x = 0$ 上を除いて解を持たない。

第6章では、以上を整理・要約して、リーマン予想の証明を行う。

命題 6•1 (リーマン予想)

$\zeta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される関数とする。

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z) > 1 \qquad (1.\zeta)$$

この関数は、臨界線 $Re(z) = 1/2$ 上以外では非自明な零点を持たない。

証明

リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の零点を求める問題は、結局、定理 2•3 に帰着する。そして、定理 2•3 によれば、ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ が臨界領域内に零点を持つことと $u_c = v_c = u_s = v_s = 0$ が臨界領域内に解を持つことは同値である。然るに、第5章で見たように、$v_c = u_s = 0$ は臨界線上を除く臨界領域内で解を持たない。当然、$u_c = v_c = u_s = v_s = 0$ も臨界線上を除く臨界領域内で解を持たない。

よって 定理 2•3 により、デイリクレイータ関数 $\eta(z)$ は臨界線上を除く臨界領域内で零点を持たず、従って リーマン・ゼータ関数 $\zeta(z)$ も臨界線上を除く臨界領域内で零点を持たない。　　Q.E.D.

リーマン予想の解析的証明

第1章 では、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ 及びディリクレイータ関数 $\eta(z)$ の定義、そして、両者の関係式を示す。 即ち、

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z)>1 \qquad (1.\zeta)$$

$$\eta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+-\cdots \qquad Re(z)>0 \qquad (1.\eta)$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}}\eta(z) \qquad z\neq 1$$

第2章 では、同値な3つの補題を経て、最終的に次の定理が得られる。

定理 2・3

実数の集合を R とし、ディリクレイータ関数を $\eta(z)$ $(z=x+iy\ ,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において $\eta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} u_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \\ u_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \\ v_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \cosh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \end{cases}$$

第3章 では、$v_c(x,y)$ と $u_s(x,y)$ の級数の初項 $(r=1)$ がいづれも 0 であることが注目される。
そして、これらの初項は $r=1$ から $r=2$ に変更され、次の補題が提示し証明される。

補題 3・1

y は実数、x は $-1/2<x<1/2$ なる実数とするとき、次の連立方程式は $x\neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} v_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\sin(y\log r) = 0 \qquad (3.1c) \\ u_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}} \sinh(x\log r)\cos(y\log r) = 0 \qquad (3.1s) \end{cases}$$

証明(概要)

1. (3.1s) の級数 y に関して 0 から y まで項別積分すれば 次のようになる。

$$\int u_s(x,y)\,dy = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}\ \log r} \sinh(x\log r)\sin(y\log r) \qquad (3.1sy)$$

$v_c(x,y)$ と $\int u_s(x,y)\,dy$ の山・谷の y 座標はほぼ一致する。(∵ $\sin(y\log r)$ が共通)
$\int u_s(x,y)\,dy$ の山・谷の y 座標と $u_s(x,y)$ の零点は一致する。(∵ 関数と導関数の関係)
かくて $-1/2<x<1/2\ ,\ x\neq 0$ について $v_c(x,y)$ の山・谷の y 座標と $u_s(x,y)$ の零点はほぼ一致する。

2. (3.1c) の級数 y に関して 0 から y まで項別積分すれば 次のようになる。

$$\int v_c(x,y)\,dy = -\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{r}\ \log r} \sinh(x\log r)\cos(y\log r) \qquad (3.1cy)$$

$u_s(x,y)$ と $\int v_c(x,y)\,dy$ の山・谷の y 座標はほぼ一致する。(∵ $\cos(y\log r)$ が共通)
$-\int v_c(x,y)\,dy$ の山・谷の y 座標と $v_c(x,y)$ の零点は一致する。(∵ 関数と導関数の関係)
かくて $-1/2<x<1/2\ ,\ x\neq 0$ について $u_s(x,y)$ の山・谷の y 座標と $v_c(x,y)$ の零点はほぼ一致する。

3. 1 及び 2 の結果、$v_c(x,y)$ と $u_s(x,y)$ は $-1/2<x<1/2\ ,\ x\neq 0$ において共通零点を持たない。

第4章では、以上を整理・要約して、リーマン予想の証明を行う。

命題 4・1 (リーマン予想)

$\zeta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される関数とする。

$$\zeta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \qquad Re(z)>1 \qquad (1.\zeta)$$

この関数は、臨界線 $Re(z)=1/2$ 上以外では非自明な零点を持たない。

証明(概要)

補題 3・1 と 定理 2・3 により、$\eta(1/2+z)$ は $-1/2<x<1/2$ において $x=0$ 以外の零点を持たない。

即ち、ディリクレイータ関数 $\eta(z)$ は $0<x<1$ において $x=1/2$ 以外の零点を持たない。

従って、リーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ も $0<x<1$ において $x=1/2$ 以外の零点を持たない。

2012.12.05

⋮

2025.02.07

宇宙人の数学

河野 和
広島市