ディリクレベータ関数要約

1 ディリクレ・ベータ母関数

$sech\,x$, $sec\,x$ 及び $csc\,x$ はフーリエ展開及びテイラー展開でき、これらはベータ母関数となります。即ち、これらのゼータ母関数を項別高階積分すると自然数のディリクレ・ベータ関数が得られます。

但し、これらは下位のベータで表される自己同型な式であり、従ってこれらはやや陰伏的です。しかしながら本章ではここまでで止めます。これらから下位のベータを消し去って自己同型でない陽表的なゼータの公式を得る作業は次章「**2 ディリクレ・ベータの公式**」で行います。

本章では sech系, sec系, csc系 のベータ母関数より次の多項式を得ます。

なお、ディリクレ・ベータ、ディリクレ・ラムダをそれぞれ

$$\beta(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^x} \quad , \quad \lambda(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^x}$$

とし、ベルヌイ数とオイラー数をそれぞれ

$$B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30, \cdots$$

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$$

とし、調和数を $H_s = \sum_{t=1}^{s} 1/t = \psi(1+s)+\gamma$ とします。

$$\beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} - \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E_{2r} x^{2r+n}}{(2r+n)!} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(-1)^s x^s}{s!} \beta(n-s)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1}} - \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}|\, x^{2n+1+2r}}{(2n+1+2r)!} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} \beta(2n-2s)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}} - \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{|E_{2r}|\, x^{2n+2r}}{(2n+2r)!} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \beta(2n-2s)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1}} = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \beta(2n+1-2s)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} \beta(2n-1-2s)$$

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^n}{2(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} \left(log\frac{\pi}{4} - H_{2n-1}\right)$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2^{2r}-2)\,|B_{2r}|}{2r(2r+2n-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1+2r}$$
$$- \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(-1)^s}{(2s-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s-1} \lambda(2n+1-2s)$$

また、sech系 と sec系の母関数のフーリエ級数を項別に高階微分すると次の諸式が得られます。

$$\beta(-n) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}_nK_r \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\beta(-2n) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{r=0}^{2n} (-1)^r\, {}_{2n}K_r \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$= \frac{E_{2n}}{2n} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

ここで ${}_nK_r$ は次式で定義される Eulerian number の 類です。

$$ {}_nK_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{n+1}{k} (2r+1-2k)^n \qquad n=1,2,3,\cdots $$

2 ディリクレ・ベータの公式

本章では前章の自己同型な公式から低次のベータを取り除いて自己同型でない陽表的な公式を得ます。

ベルヌイ数、オイラー数はそれぞれ

$$ B_0=1,\ B_2=1/6,\ B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\cdots $$

$$ E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots $$

とし、また、ガンマ関数と不完全ガンマ関数は次のようであるとします。

$$ \Gamma(p)=\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \quad , \quad \Gamma(p,x)=\int_x^\infty t^{p-1}e^{-t}dt $$

2･1 自然数ベータ

$0<x\leqq\pi/2$ について

$$ \beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s x^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)x}}{(2r+1)^n} + \frac{x^n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{2r}\frac{E_{2r}x^{2r}}{(n+2r)!} $$

特に

$$ \beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s}{s!\,2^s} \frac{(-1)^r e^{-(r+1/2)}}{(2r+1)^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{2r}\frac{E_{2r}}{(n+2r)!\,2^{2r}} $$

$$ \beta(n) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2r+1)^s}{s!} \frac{(-1)^r e^{-(2r+1)}}{(2r+1)^n} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{2r}\frac{E_{2r}}{(n+2r)!} $$

例

$$ \beta(4)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{1+\frac{2r+1}{1!}+\frac{(2r+1)^2}{2!}+\frac{(2r+1)^3}{3!}\right\}\frac{(-1)^r e^{-2r-1}}{(2r+1)^4}+\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-4}{2r}\frac{E_{2r}}{(4+2r)!} $$

$$ \beta(4)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{1+\frac{2r+1}{1!\,2^1}+\frac{(2r+1)^2}{2!\,2^2}+\frac{(2r+1)^3}{3!\,2^3}\right\}\frac{(-1)^r e^{-r-\frac{1}{2}}}{(2r+1)^4}+\frac{1}{2^5}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-4}{2r}\frac{E_{2r}}{(4+2r)!\,2^{2r}} $$

2･2 偶数ベータ

$0<x\leqq\pi/2$ について

$$ \beta(2n) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|\,\{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}} - \frac{(-1)^n}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sum_{s=0}^{n-1}\binom{2n+2r}{2s}E_{2s}\right\}\frac{|E_{2r}|\,x^{2n+2r}}{(2n+2r)!} $$

$$ \beta(2n) = -\frac{1}{x}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)\{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n+1}} $$

$$+(-1)^n \frac{x^{2n}}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)}{(2s)!\,(2n+1+2r-2s)!} \right\} \frac{|E_{2r}|\,x^{2r}}{2r}$$

特に

$$\beta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \binom{2n+2r}{2s} E_{2s} \right\} \frac{|E_{2r}|}{(2n+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2r}$$

例

$$\beta(4) = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \binom{4+2r}{0} E_0 + \binom{4+2r}{2} E_2 \right\} \frac{|E_{2r}|}{(4+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4+2r}$$

$$\beta(6) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \binom{6+2r}{0} E_0 + \binom{6+2r}{2} E_2 + \binom{6+2r}{4} E_4 \right\} \frac{|E_{2r}|}{(6+2r)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{6+2r}$$

2･3　奇数ベータ

$0 < x \leqq \pi/2$ について

$$\beta(2n-1) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{|E_{2s}|\,\{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \cos\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n-1}}$$

$$\beta(2n-1) = -\frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s B_{2s}\left(2^{2s}-2\right)\{(2r+1)x\}^{2s}}{(2s)!} \frac{(-1)^r \sin\{(2r+1)x\}}{(2r+1)^{2n}}$$

特に

$$\beta(2n-1) = \frac{\pi}{4} \frac{|E_{2n-2}|}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}$$

2･4　複素数ベータ

p を $p \neq 1, 0, -1, -2, \cdots$ なる複素数とするとき、次式が得られます。

複素数 **$x = u + vi$　s.t.　$0 < |x| \leqq \pi/2$, $u \geqq 0$** について

$$\beta(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\{p, (2r+1)x\}}{\Gamma(p)} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^p} + \frac{x^p}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-p}{2r} \frac{E_{2r}\,x^{2r}}{\Gamma(p+1+2r)}$$

特に

$$\beta(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p, 2r+1)}{\Gamma(p)} \frac{(-1)^r}{(2r+1)^p} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-p}{2r} \frac{E_{2r}}{\Gamma(p+1+2r)}$$

3 ディリクレベータのグローバル定義

ディリクレ･ベータ関数は全複素平面上では次のようにツギハギ定義されています。

$$\beta(p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^p} & Re(p) \geqq 0 \\ \displaystyle\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-p} \cos\frac{p\pi}{2}\,\Gamma(1-p) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{1-p}} & Re(p) < 0 \end{cases}$$

これでは不便です。そこで我々は次のような数列に着目します。

$$ {}_nB_r = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} {}_rC_s \left(s - \frac{1}{2} \right)^n \qquad r=0,1,2,\cdots,n $$

この数列を用いれば、ディリクレ・ベータ関数は複素平面上で次のように定義できます。

定義 3・2・1（ディリクレ・ベータ関数）

$$ \beta(p) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} (2s-1)^{-p} $$

更にこの数列を用いれば、オイラー数も複素平面上で定義できます。

定義 3・3・1（一般オイラー数）

$$ E_p = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} \binom{r}{s} (2s-1)^{p} $$

4 完備化されたディリクレ・ベータ

4・1 では関数等式から対称関数等式を導きます。

公式 4・1・1

$$ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{1+z} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2} \right) \beta(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{2-z} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1-z}{2} \right) \beta(1-z) $$

$$ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{3}{2}+z} \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{z}{2} \right) \beta\left(\frac{1}{2} + z \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{3}{2}-z} \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{z}{2} \right) \beta\left(\frac{1}{2} - z \right) $$

4・2 では、完備化されたディリクレ・ベータ関数 $\omega(z), \Omega(z)$ をそれぞれ次のように定義します。

$$ \omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{1+z} \Gamma\left(\frac{1+z}{2} \right) \beta(z) $$

$$ \Omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{3}{2}+z} \Gamma\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + z \right) \right\} \beta\left(\frac{1}{2} + z \right) $$

すると、公式 4・1・1 より次式が成立します。

$$ \omega(z) = \omega(1-z) $$
$$ \Omega(z) = \Omega(-z) \qquad (2.2) $$

後者の式から、$\Omega(z)$ は偶関数であることが判ります。それ故、$\Omega(z)$ は完備化されたリーマン・ゼータ関数 $\Xi(z)$ と同じ性質を持ちます。（「 7 完備化されたリーマン・ゼータ 」参照。）
そして $\Xi(z)$ と同様に次の定理が成立します。

定理 4・2・1

ディリクレ・ベータ関数 $\beta(z)$ が 実数部が 1/2 でない非自明な零点を持つならば、その1組は次の4個から成る。

$$ 1/2 + \alpha_1 \pm i\delta_1 \quad , \quad 1/2 - \alpha_1 \pm i\delta_1 \qquad (0 < \alpha_1 < 1/2) $$

5 完備化されたディリクレ・ベータの因数分解

5・1 では、次のようなアダマール積が導出されます。

公式 5・1・1

完備化されたディリクレ・ベータ関数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

$\beta(z)$ の非自明零点を $z_k = x_k \pm i y_k \quad k=1,2,3,\cdots$ 、γ をオイラー・マスケロニの定数とするとき、$\omega(z)$ は次のようなアダマール積で表される。

$$\omega(z) = e^{\left(\frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}}$$

$$\omega(z) = e^{\left(\frac{3\log\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \log 2 - 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}}$$

そして、次の特殊値が得られます。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)e^{\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}} = e^{4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}} = 1.08088915\cdots$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(x_n+iy_n)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(x_n-iy_n)^2}\right\} = \omega(-1) = 1.16624361\cdots$$

5・2 では、実数部が 1/2 である非自明な零点と実数部が 1/2 でない非自明零点が混在する場合、前節の諸式がどのように表されるかを考察します。そして次の定理等を得ます。

定理 5・2・2

γ をオイラー・マスケロ二の定数、ディリクレ・ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ これらのうち実数部が 1/2 であるものを $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ 、実数部が 1/2 でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\delta_s \ (0<\alpha_s<1/2) \quad s=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\delta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\delta_s^2}\right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2} = 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2} = 0.07778398\cdots$$

公式 5・2・3（特殊値）

ディリクレ・ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、次式が成立する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1-\frac{1}{x_n-iy_n}\right) = 1$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_n+iy_n}\right)\left(1+\frac{1}{x_n-iy_n}\right) = \omega(-1) = 1.1662436\cdots$$

定理 5･2･4

γ をオイラー･マスケロ二の定数、ディリクレ･ベータ関数の非自明な零点を $x_n+iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が 1/2 でない非自明零点は存在しない。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_n^2} = 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2} = 0.07778398\cdots$$

ちなみに、y_r を 10000 個を使ってこれを計算したところ、両辺は小数点以下3桁まで一致しました。

5･3 では、$\omega(z)$ が完全に因数分解されることを示します。

定理 5･3･1 （$\omega(z)$ の因数分解 ）

ディリクレ･ベータ関数を $\beta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたベータ関数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

すると、$\omega(z)$ は次のように因数分解される。

$$\omega(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n z}{x_n^2+y_n^2}+\frac{z^2}{x_n^2+y_n^2}\right)$$

5･4 では、先ず $\Omega(z)$ の因数分解を導きます。

定理 5･4･1 （$\Omega(z)$ の因数分解 ）

ディリクレ･ベータ関数を $\beta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ 、そして完備化されたベータ関数が次のようであるとする。

$$\Omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+z}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+z\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+z\right)$$

すると、$\Omega(z)$ は次のように因数分解される。

$$\Omega(z) = \Omega(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-\frac{2(x_n-1/2)z}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}+\frac{z^2}{(x_n-1/2)^2+y_n^2}\right\}$$

但し、$\Omega(0)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-1/2)^2+y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.98071361\cdots$

そして、この定理と前節の 定理 4･2･1 を用いて、次の定理を得ます。

定理 5･4･4

ディリクレ･ベータ関数を $\beta(z)$ 、その非自明零点を $z_n = x_n \pm iy_n \quad n=1,2,3,\cdots$ とするとき、もし次式が成立するならば、実数部が 1/2 でない非自明零点は存在しない。

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{1/4+y_r^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 0.98071361\cdots$$

ちなみに、y_r を 10000 個を使ってこれを計算したところ、両辺は小数点以下4桁まで一致しました。

6 ディリクレ・ベータの臨界線上の零点

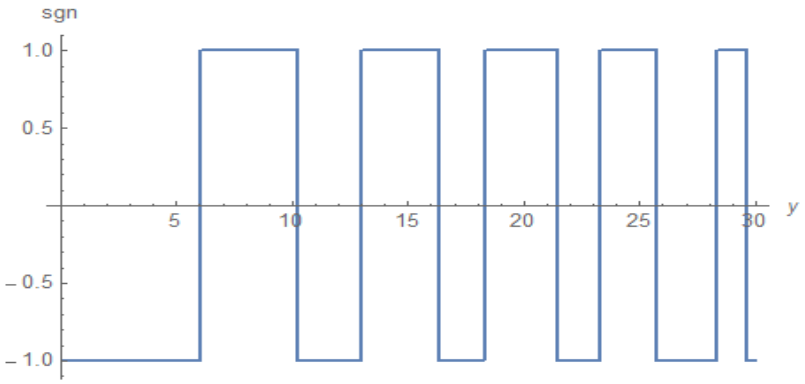
6・1では、完備化されたディリクレ・ベータ $\Omega(z)$ に $z=0+iy$ を代入して

$$\Omega_h(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}+iy} \Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

とし、これを用いて臨界線上の零点の計算を企てます。しかしこの関数は絶対値が小さ過ぎ、$y=917$ 程度までの零点しか求めることが出来ません。

そこで $\Omega_h(y)$ を正規化して次のような符号関数を定義します。

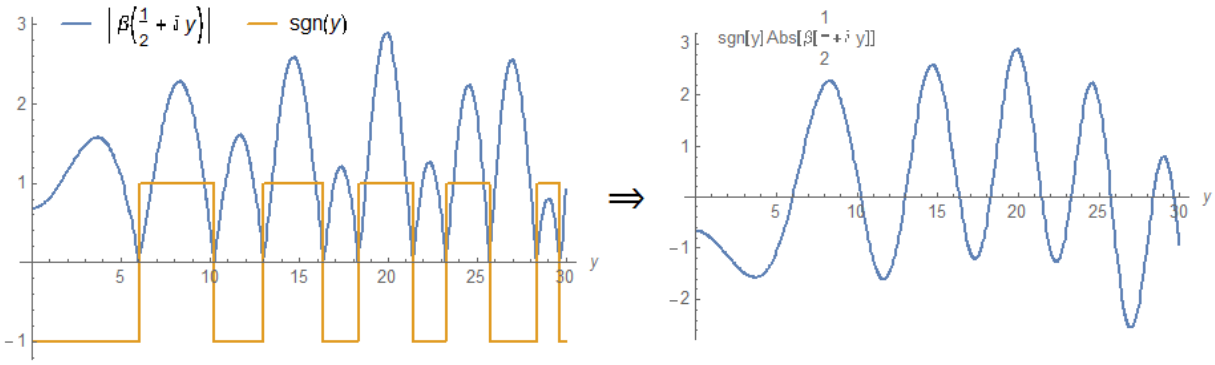
$$sgn(y) = -\frac{\Omega_h(y)}{|\Omega_h(y)|} = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|}$$



この符号関数 $sgn(y)$ を用いれば大きな y における臨界線上の零点でも求めることが出来ます。

6・2 では、この符号関数 $sgn(y)$ をディリクレベータ・ベータ関数 $\beta(1/2+iy)$ の絶対値に乗じて滑らかな関数 $B(y)$ を得ます。

$$B(y) = sgn(y)\left|\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right| = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\right|}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$



この関数 $B(y)$ を用いれば曲線と y 軸との交点によって $\beta(z)$ の臨界線上の零点を探すことができます。

6・3 では、先ず *Lemma* が用意されます。

Lemma

$f(z)$を領域 D 上に定義された複素関数とするとき、次式が成立する。

$$e^{i\,Im\log f(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

6･2 のガンマ関数にこの $Lemma$ を適用すると、

$$B(y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy}\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}}{\left|\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}\right|}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{iy} e^{i\,Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

$$= -e^{i\left[Im\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\}-\frac{y}{2}\log\frac{\pi}{4}\right]}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right)$$

これより、リーマン･ジーゲル型の B 関数

$$B(y) = -e^{i\theta(y)}\beta\left(\frac{1}{2}+iy\right) \qquad 但し、\theta(y) = Im\,\log\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+iy\right)\right\} - \frac{y}{2}\log\frac{\pi}{4}$$

が得られます。

7 ディリクレ･ベータの絶対値

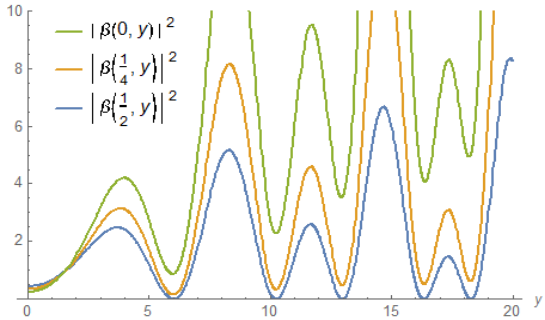
7･1 では、ディリクレ･ベータ関数が概観されます。特異点を持たないこと及び臨界線上に非自明な零点が存在することが図示されます。

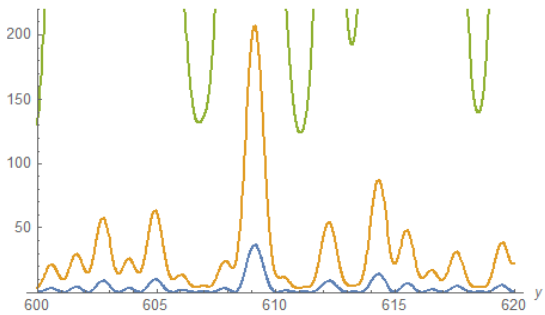
7･2 では、ディリクレ･ベータ関数の絶対値の2乗 $|\beta(x,y)|^2$ の諸性質が調べられます。そして特に区間 $0 \le x \le 1/2$ が着目され、リーマン仮説と同値な次の仮説が提示されます。

仮説 7･2･1

$\beta(x,y)$ を複素平面上のディリクレ･ベータ関数とするとき、その絶対値の2乗 $|\beta(x,y)|^2$ は領域 $0 < x < 1/2$, $y \ge 2$ においては x に関して単調減少関数である。

x=0 , 1/4 , 1/2 における切断図は次のように描かれます。





7･3 では、ディリクレ･ベータ関数の絶対値の2乗が2重級数で表示されます。

公式 7･3･2

$\beta(x,y)$ をディリクレ･ベータ関数とするとき、

$$|\beta(x,y)|^2 = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}\cos\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

そして、これを用いて、仮説 7･2･1 は次のように表されます。

仮説 7･3･3

$\beta(x,y)$ を複素平面上のディリクレ･ベータ関数とするとき、次の不等式が成り立つ。

$$|\beta(x,y)|^2=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}\cos\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)>0 \quad for \quad \begin{matrix}0<x<1/2\\ y\geq 2\end{matrix}$$

7･4 では、ディリクレ･ベータ関数の絶対値の2乗の零点に置ける諸性質が定理として述べられます。

定理 7･4･0

$\beta(x,y)$ をディリクレ･ベータ関数とするとき、$\beta(a,b)=0$ ならば

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a}\cos\left(b\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)=0$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a}\sin\left(b\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)=0$$

面白いことに、β の零点 (a,b) ににおいてはこれらの各行和が全て0でなければなりません。

定理 7･4･1

$\beta(x,y)$ をディリクレ･ベータ関数とするとき、$\beta(a,b)=0$ ならば、

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a}\cos\left(b\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)=0 \qquad for\ \ r=1,2,3,\cdots$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a}\sin\left(b\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)=0 \qquad for\ \ r=1,2,3,\cdots$$

これより、重要な次の系を得ます。

系 7･4･1”

$\beta(x,y)$ をディリクレ･ベータ関数とするとき、$\beta(a,b)=0$ ならば、任意の実数 θ について次式が成立する。

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s-1)^a}\cos\{b\log(2s-1)+\theta\}=0$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s-1)^a}\sin\{b\log(2s-1)+\theta\}=0$$

7･5 では、絶対値の2乗の偏導関数が計算されます。

公式 7･5･1

ディリクレ･ベータ関数の絶対値の2乗を

$$f(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}\cos\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right) \qquad \left(=|\beta(x,y)|^2\right)$$

とするとき、これの1階偏導関数はそれぞれ次式で表される。

$$f_x=-2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}\cos\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

$$f_y=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}\sin\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right)$$

そして絶対値の2乗が0であるための必要条件が示されます。

定理 7･5･2（停留条件）

$\beta(x,y)$ をディリクレ･ベータ関数とするとき、$\beta(a,b)=0$ ならば次式が成立する。

$$f_x(a,b) = -2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a}\cos\left(b\log\frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0$$

$$f_y(a,b) = 2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^a}\sin\left(b\log\frac{2s-1}{2r-1}\right) = 0$$

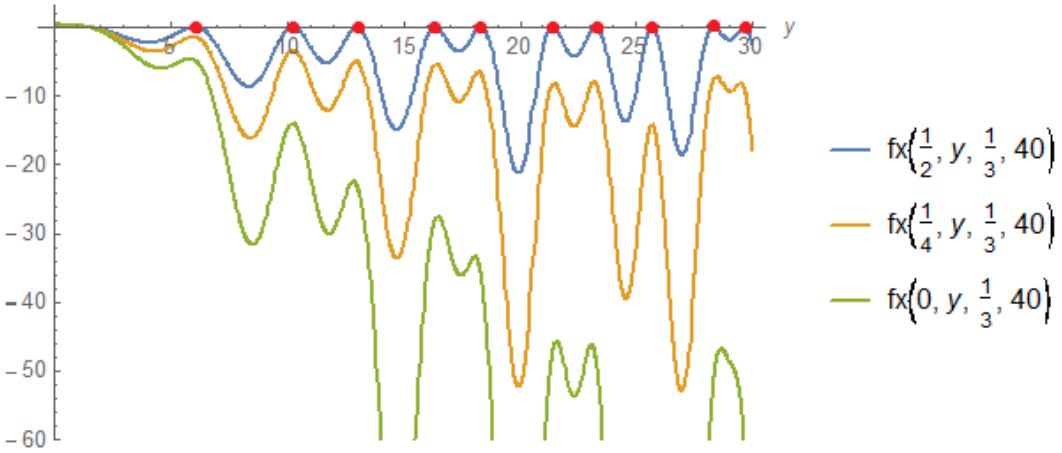
最後に、公式 7･5･1 を用いてリーマン仮説と同値な仮説が提示されます。

仮説 7･5･5

$\beta(x,y)$ を複素平面上のディリクレ･ベータ関数とするとき、次の不等式が成立する。

$$f_x = -2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}\frac{\log(2r-1)}{\{(2r-1)(2s-1)\}^x}\cos\left(y\log\frac{2s-1}{2r-1}\right) < 0 \quad for \quad \begin{matrix} 0 < x < 1/2 \\ y \geq 2 \end{matrix}$$

これば次のように図示されます。青は $f_x(1/2,y)$、橙は $f_x(1/4,y)$、緑は $f_x(0,y)$ であり、赤い点は臨界線 $(x=1/2)$ 上の零点です。青以外の曲線は y - 軸と接していません。



ディリクレベータ関数のリーマン予想の図的証明

この証明は、1つの章に収めるのが困難なので、独立の稿とします。

第1章 は序論で、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の定義やこれまでに知られていることが述べられます。

ディリクレベータ関数

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log(2r-1)} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + - \cdots \qquad Re(z) > 1 \qquad (1.\beta)$$

この関数は $Re(z) < 1$ に解析接続され、自明な零点 $z = -(2n-1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と非自明な零点 $z = 1/2 \pm b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を持つ。そして、非自明な零点はこれ以外には存在しないであろうと言うのがディリクレベータ関数のリーマン仮説である。

なお、非自明な零点は 臨界領域 $0 < Re(z) < 1$ 内にのみ存在することが知られている。また、その中心線 $Re(z) = 1/2$ は臨界線 と呼ばれている。

第2章 では、同値な3つの補題が提示し証明されます。

補題 2･1

実数の集合をRとし、ディリクレベータ関数を $\beta(z)$ $(z=x+iy,\ x,y\in R)$ とするとき、$0<x<1$において$\beta(z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-z\log(2r-1)} = 0 & (2.1_+) \\ \beta(1-z) = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}e^{-(1-z)\log(2r-1)} = 0 & (2.1_-) \end{cases}$$

補題 2･1'

実数の集合をRとし、ディリクレベータ関数を $\beta(z)$ $(z=x+iy,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において$\beta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \beta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}e^{-z\log(2r-1)} = 0 & (2.1'_+) \\ \beta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}e^{z\log(2r-1)} = 0 & (2.1'_-) \end{cases}$$

補題 2･2

実数の集合をRとし、ディリクレベータ関数を $\beta(z)$ $(z=x+iy,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において$\beta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} \beta\left(\frac{1}{2}+z\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}e^{-z\log(2r-1)} = 0 & (2.1'_+) \\ \beta\left(\frac{1}{2}-z\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}e^{z\log(2r-1)} = 0 & (2.1'_-) \end{cases}$$

そして、補題 2･2 を実部虚部別に表示して次の定理を得ます。

定理 2･3

実数の集合をRとし、ディリクレ･ベータ関数を $\beta(z)$ $(z=x+iy,\ x,y\in R)$ とするとき、$-1/2<x<1/2$ において$\beta(1/2+z)=0$ であるための必要十分条件は 次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} u_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}\cosh\{x\log(2r-1)\}\cos\{y\log(2r-1)\} = 0 \\ v_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}\sinh\{x\log(2r-1)\}\sin\{y\log(2r-1)\} = 0 \\ u_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}\sinh\{x\log(2r-1)\}\cos\{y\log(2r-1)\} = 0 \\ v_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}}\cosh\{x\log(2r-1)\}\sin\{y\log(2r-1)\} = 0 \end{cases}$$

第3章 では、$v_c(x,y)$ の y に関する振幅が考察されます。そして次の法則を得ます。

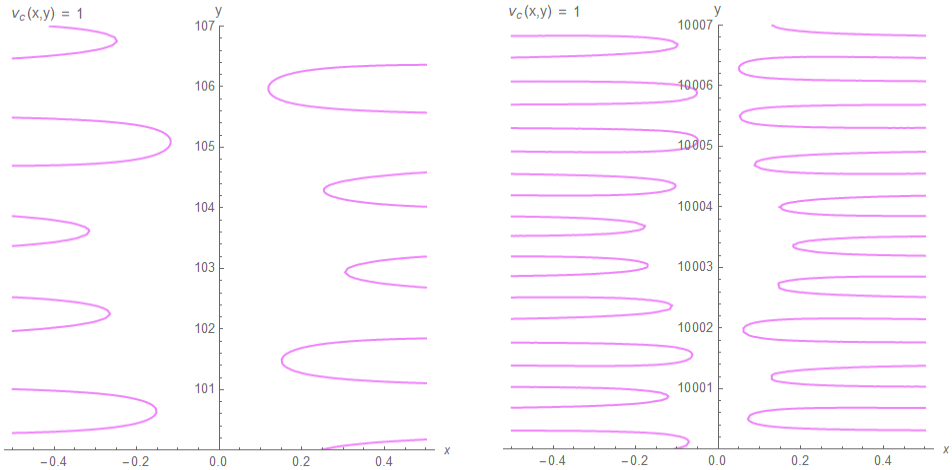
法則 3･4･5

x, y を実数、関数 $v_c(x,y)$ を次のようであるとする。

$$v_c(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} sinh\{x\,log(2r-1)\}sin\{y\,log(2r-1)\} \qquad (2.4c)$$

すると、x が与えられたとき、$v_c(x,y)$ の振幅は概して y の絶対値に比例する。

この法則により、x が与えられたとき $v_c(x,y)$ の等高線の先端は y が大きいほど概して y 軸に近づくことが説明できます。例えば、$v_c(x,y)$ の高さ 1 の等高線図を $y=100 \sim 107$ と $y=10000 \sim 10007$ について描くとそれぞれ次のようになります。左図が $y=100 \sim 107$ で 右図が $y=10000 \sim 10007$ です。



第4章 では、$u_s(x,y)$ の y に関する振幅が考察されます。そして次の法則を得ます。

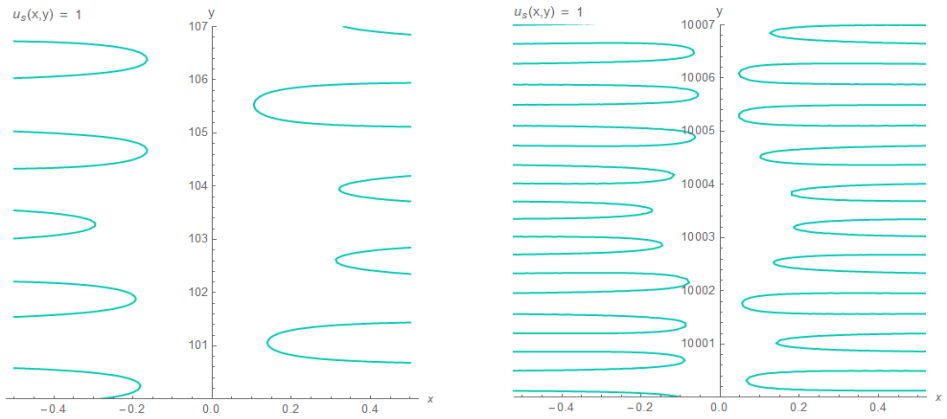
法則 4･4･5

x, y を実数、関数 $u_s(x,y)$ を次のようであるとする。

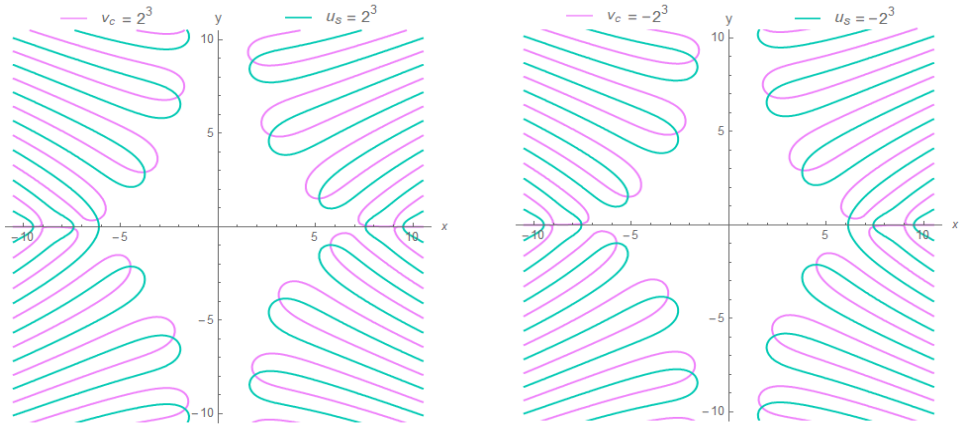
$$u_s(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} sinh\{x\,log(2r-1)\}cos\{y\,log(2r-1)\} \qquad (2.4s)$$

すると、x が与えられたとき、$u_s(x,y)$ の振幅は概して y の絶対値に比例する。

この法則により、x が与えられたとき $u_s(x,y)$ の等高線の先端は y が大きいほど概して y 軸に近づくことが説明できます。例えば、$u_s(x,y)$ の高さ 1 の等高線図を $y=100 \sim 107$ と $y=10000 \sim 10007$ について描くとそれぞれ次のようになります。左図が $y=100 \sim 107$ で 右図が $y=10000 \sim 10007$ です。



第5章では、$v_c(x,y) = u_s(x,y) = \pm h \ (h \geq 0)$ の等高線が注目されます。例えば、$v_c(x,y), u_s(x,y)$ の高さ±8 の等高線図を一緒に描けば次のようになります。左図が +8 で右図が −8 です。

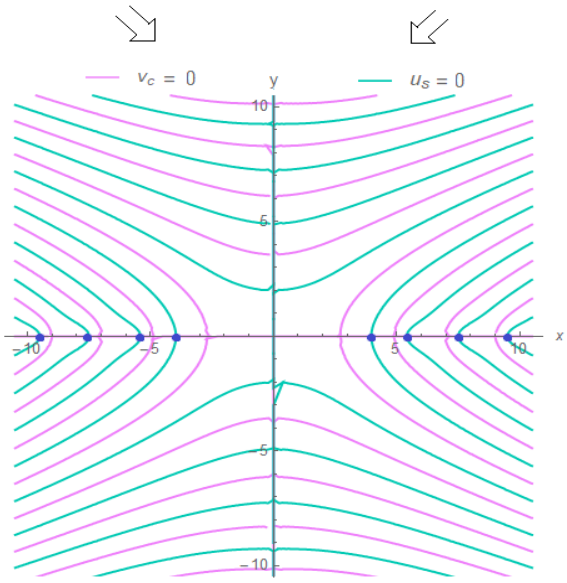


$v_c(x,y), u_s(x,y)$ は x に関して奇関数であるので、左図と右図は y 軸に関して鏡像関係になります。また、$v_c(x,y)$ は y に関して奇関数であるので、左図と右図は x 軸に関しても鏡像関係になります。両図は平面上での移動や回転では決して重なることが出来ません。

然るに、高さ±0 においては左図と右図は移動も回転も無しに重ならなければなりません。そのためには、高さが上下から±0 に近づくにつれて両図の等高線が変形しなければなりません。そして高さ±0 において両図は y 軸に関しても x 軸に関しても線対称にならねばなりません。

このことは高さ非ゼロでは y 軸に関して互生であった等高線が高さ±0 では対生になるべきことを強要します。このことは x 軸に関しても同様です。

かくして、高さ±0 において ⊃ ⊂ の右端左端は y 軸に吸収され、∪ ∩ の下端上端は x 軸に吸収されなければなりません。実際、$v_c(x,y), u_s(x,y)$ の高さを上下から 0 に近づければ等高線は最終的に次図のようになります。



以上のアニメーションは ここをクリック AnimB5218.gif

理論どおり、y 軸および x 軸に関して非線対称な等高線の部分は両軸に吸収されました。結果、無数の自明な解（青点）だけが残りました。非自明な解は全て y 軸（臨界線）に吸収されました。

この図は $|y| \leq 10.5$ で描かれていますが、法則 3・4・5 と 法則 4・4・5 によれば、$|y|$ が大きいところでは ⊃ ⊂ の右端左端はより速く y 軸に吸収されることになります。

かくして、連立方程式 $v_c(x,y) = u_s(x,y) = 0$ は 臨界領域 $-1/2 < x < 1/2$ 内では 臨界線 $x=0$ 上を除いて解を持ちません。

第6章では、以上を整理・要約して、ディリクレベータ関数についてのリーマン予想の証明を行います。。

命題 6・1（リーマン予想）

$\beta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される関数とする。

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log r} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + - \cdots \qquad Re(z) > 1 \qquad (1.\beta)$$

この関数は、臨界線 $Re(z) = 1/2$ 上以外では非自明な零点を持たない。

証明

定理 2・3 により、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ が臨界領域内に零点を持つことと $u_c = v_c = u_s = v_s = 0$ が臨界領域内に解を持つことは同値です。然るに、第5章で見たように、$v_c = u_s = 0$ は臨界線上を除く臨界領域内で解を持ちません。当然、$u_c = v_c = u_s = v_s = 0$ も臨界線上を除く臨界領域内で解を持ちません。よって 定理 2・3 により、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ は臨界線上を除く臨界領域内で零点を持ちません。

Q.E.D.

ディリクレベータ関数のリーマン予想の解析的証明

第1章 は序論で、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の定義やこれまでに知られていることが述べられます。

ディリクレベータ関数

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される。

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\log(2r-1)} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + - \cdots \qquad Re(z) > 1 \qquad (1.\beta)$$

この関数は $Re(z) < 1$ に解析接続され、自明な零点 $z = -(2n-1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ と非自明な零点 $z = 1/2 \pm b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を持つ。

第2章 では、同値な3つの補題を経て、最終的に次の定理が得られます。

定理 2・3

実数の集合を R とし、ディリクレ・ベータ関数を $\beta(z)$ $(z = x+iy,\ x,y \in R)$ とするとき、$-1/2 < x < 1/2$ において $\beta(1/2+z) = 0$ であるための必要十分条件は次の連立方程式がこの定義域上で解を持つことである。

$$\begin{cases} u_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} \cosh\{x\log(2r-1)\}\cos\{y\log(2r-1)\} = 0 \\ v_c(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} \sinh\{x\log(2r-1)\}\sin\{y\log(2r-1)\} = 0 \\ u_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} \sinh\{x\log(2r-1)\}\cos\{y\log(2r-1)\} = 0 \\ v_s(x,y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} \cosh\{x\log(2r-1)\}\sin\{y\log(2r-1)\} = 0 \end{cases}$$

第3章 では、$v_c(x,y)$ と $u_s(x,y)$ の級数の初項 ($r=1$) がいづれも 0 であることが注目されます。
そして、これらの初項は $r=1$ から $r=2$ に変更され、次の補題が提示し証明されます。

補題 3・1

y は実数、x は $-1/2 < x < 1/2$ なる実数とするとき、次の連立方程式は $x \neq 0$ なる解を持たない。

$$\begin{cases} v_c(x,y) = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} sinh\{x\,log(2r-1)\}sin\{y\,log(2r-1)\} = 0 & (3.1c) \\ u_s(x,y) = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}} sinh\{x\,log(2r-1)\}cos\{y\,log(2r-1)\} = 0 & (3.1s) \end{cases}$$

証明(概要)

1. (3.1s) の級数 y に関して 0 から y まで項別積分すれば 次のようになる。

$$\int u_s(x,y)dy = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}\,log(2r-1)} sinh\{x\,log(2r-1)\}sin\{y\,log(2r-1)\} \qquad (3.1sy)$$

$v_c(x,y)$ と $\int u_s(x,y)dy$ の山・谷の y 座標はほぼ一致する。($\because$ $sin\{y\,log(2r-1)\}$ が共通)
$\int u_s(x,y)dy$ の山・谷の y 座標と $u_s(x,y)$ の零点は一致する。($\because$ 関数と導関数の関係)
かくて $-1/2 < x < 1/2$, $x \neq 0$ について $v_c(x,y)$ の山・谷の y 座標と $u_s(x,y)$ の零点はほぼ一致する。

2. (3.1c) の級数 y に関して 0 から y まで項別積分すれば 次のようになる。

$$\int v_c(x,y)dy = -\sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{\sqrt{2r-1}\,log(2r-1)} sinh\{x\,log(2r-1)\}cos\{y\,log(2r-1)\} \qquad (3.1cy)$$

$u_s(x,y)$ と $-\int v_c(x,y)dy$ の山・谷の y 座標はほぼ一致する。($\because$ $cos\{y\,log(2r-1)\}$ が共通)
$-\int v_c(x,y)dy$ の山・谷の y 座標と $v_c(x,y)$ の零点は一致する。($\because$ 関数と導関数の関係)
かくて $-1/2 < x < 1/2$, $x \neq 0$ について $u_s(x,y)$ の山・谷の y 座標と $v_c(x,y)$ の零点はほぼ一致する。

3. 1 及び 2 の結果、$v_c(x,y)$ と $u_s(x,y)$ は $-1/2 < x < 1/2$, $x \neq 0$ において共通零点を持たない。

第4章では、以上を整理・要約して、ディリクレベータ関数のリーマン予想の証明を行います。

定理 4・1 (リーマン予想)

$\beta(z)$ は次のディリクレ級数で定義される関数とする。

$$\beta(z) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-z\,log\,r} = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + - \cdots \qquad Re(z) > 1 \qquad (1.\beta)$$

この関数は、臨界線 $Re(z)=1/2$ 上以外では非自明な零点を持たない。

証明(概要)

補題 3・1 と 定理 2・3 により、$\beta(1/2+z)$ は $-1/2 < x < 1/2$ において $x=0$ 以外の零点を持たない。
即ち、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ は $0 < x < 1$ において $x=1/2$ 以外の零点を持たない。

2012.12.05
⋮
2024.02.29

宇宙人の数学