ヴィエタの公式によるリーマン予想の証明

河野 和
広島市、日本

2025.12.18

要 旨

(1) リーマン xi 関数 $\xi(z)$ と $\xi(1-z)$ はそれぞれ次のようにアダマール積 に因数分解される。

$$\xi(z) = \Pi(1-z/\rho) \quad , \quad \xi(1-z) = \Pi(1-(1-z)/\rho)$$

(2) 全複素平面上で関数等式 $\xi(z) = \xi(1-z)$ が成立する。

(3) 全複素平面上で $\Pi(1-z/\rho) = \Pi(1-(1-z)/\rho)$ が成立するのは、全ての $Re(\rho)$ が $1/2$ のとき 且つそのときに限る。

(4) かくして $\Pi(1-z/\rho)=\xi(z)=\xi(1-z)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$ となり、リーマン予想は成立する。

1. 本稿で扱う関数

本稿ではリーマンゼータ関数及びリーマン xi 関数を扱う。それらはそれぞれ次式で定義される。

(0.0) $$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots$$

(0.1) $$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

以下においてこれらを単に「ゼータ関数」及び「xi 関数」と呼ぶことにする。

なお、これらの零点は臨界領域($0 < Re(z) < 1$)においては同値であることが知られている。

2. $\zeta(z)$ や $\xi(z)$ の零点の記法

ゼータ関数 $\zeta(z)$ や xi 関数 $\xi(z)$ の零点 ρ は 通常 次のように記述されている。

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho} \quad , \quad \prod_{\rho}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)$$ 但し、ρ は全ての零点に亘る。

しかし、この記法は概念的且つ曖昧であり、実際の計算に用いることが出来ない。

(1) 複素数表記

1914年、ハーディとリトルウッドは 臨界線上の零点が無限個存在することを証明した。このことは、臨界領域内の零点が無限個存在することを意味している。それ故、本稿では次記法を用いる。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k} \quad , \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(2) 実部・虚部別表記

しかし、(1) の記法でも 零点 ρ_k の実部や虚部を詳細に調べるのは困難である。そこで xi 関数が共役複素根を持つことに着目し、$\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ を次のように置き換える。

$$\rho_{2r-1} = x_r - iy_r \ , \ \rho_{2r} = x_r + iy_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r > 0)$$

これを用いれば、(1) の記述例は次のように書き換えることが出来る。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r - iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right) \quad , \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r - iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)$$

3. リーマン予想の証明

定理 3・1（アダマール積）

xi 関数 $\xi(z)$ 及び $\xi(1-z)$ はその零点 $\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解される。

(0.1) $$\xi(z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(0.2) $$\xi(1-z) = -z(1-z)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

証明

1893年、アダマールは次のような定理を示した。

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi/e)^z}{2(z-1)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n}\right)e^{-\frac{z}{2n}}$$

ガンマ関数に関するワイエルシュトラウスの表示式は

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n}\right)e^{-\frac{z}{2n}} = \frac{e^{-\gamma z/2}}{\Gamma(1+z/2)}$$

これを上式の右辺に代入すれば、

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi/e)^z}{2(z-1)}\frac{e^{-\gamma z/2}}{\Gamma(1+z/2)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

$$= \frac{e^{z\log 2\pi}e^{-z}}{z-1}\frac{e^{-\gamma z/2}}{2\Gamma(1+z/2)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

$$= \frac{1}{(z-1)z\Gamma(z/2)}e^{\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

これより

$$-z(1-z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = e^{\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

両辺に $\pi^{-z/2} = e^{-(z\log\pi)/2}$ を乗じれば

$$-z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = e^{\left(\log 2\pi-\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)e^{\frac{z}{\rho_k}}$$

i.e.

(9.1) $$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\cdot e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}}$$

ここで

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k} = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{z}{x_r-iy_r}+\frac{z}{x_r+iy_r}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}$$

と表せば (9.1) は

(9.1') $$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}}$$

更にx_n+iy_n $n=1,2,3,\cdots$ のうち、実部が$1/2$であるものを$1/2\pm iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ 、実部が$1/2$でないものを$1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s$ $(0<\alpha_s<1/2)$ $s=1,2,3,\cdots$ とすれば、(9.1') は次のようになる

(9.1″) $$\xi(z) = e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$

$$\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\cdot e^{\sum_{s=1}\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

$$\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\cdot e^{\sum_{s=1}\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

(9.1') と (9.1″) の両辺に$z=1$を代入すれば、

(9.2') $$\xi(1)=1 = e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r-1}{x_r^2+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x}{x_r^2+y_r^2}}$$

(9.2″) $$\xi(1)=1 = e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\times\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$\times e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}}$$

これらより

(9.3) $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r-1}{x_r^2+y_r^2}\right) = \prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

(9.4) $$e^{\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}} = e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}}$$

ここで都合の良いことに、

$$\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$= 1 + \frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2} - \frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2} - \frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$= 1 + \frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2} - \frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$= 1$$

となるから (9.3), (9.4) は次のようになる。

(9.3') $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1 \qquad \left\{\text{i.e. } \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)=1\right\}$$

(9.4') $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

(9.3') を (9.2') に代入すれば、

$$\xi(1)=1=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x}{x_r^2+y_r^2}}=e^{\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}}e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}}$$

これより

(9.5) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}=1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}=0.0230957\cdots$$

従って

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}}=e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

これを (9.1) の右辺に代入すれば

$$\xi(z)=e^{\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\cdot e^{\left(1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}\right)z}$$

i.e.

(0.1) $$\xi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

両辺は全複素平面上において正則であるから、z を $1-z$ に置換して

(0.2) $$\xi(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

Q.E.D.

Note .

$\xi(z)=1+A_1z^1+A_2z^2+A_3z^4+\cdots$ と展開したとき、ヴィエタの公式 により次が成立する。

(9.5) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}=-A_1=-\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}-1-\frac{\gamma}{2}\right)=-(-0.0230957\cdots)$$

定理 3・2 (関数等式)

xi 関数が次のようであるとする。

(0.1) $$\xi(z)=-z(1-z)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

すると、全複素平面上において次式が成立する。

(0.3) $$\xi(z)=\xi(1-z)$$

証明

リーマンによれば、複素平面上の2点を除いて次が成立する。

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z) \qquad Re(z)\neq 0,1$$

$$z(1-z)=(1-z)\{1-(1-z)\}$$

これらを (0.1) の右辺に代入すれば、

$$\xi(z)=-(1-z)\{1-(1-z)\}\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)=\xi(1-z)$$

$\xi(z)$ は全複素平面上で正則であるから、(0.3) も全複素平面上で成立する。

Q.E.D.

定理 3･3 (アダマール積の等式)

xi 関数 $\xi(z)$ 及び $\xi(1-z)$ はその零点 ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解されているとする。

(0.1') $$\xi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(0.2') $$\xi(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

すると、$Re(\rho_k)=1/2$ $k=1,2,3,\cdots$ ならば かつ、このときにのみ、全複素平面上で次式が成立する。

(0.4) $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

証明

零点 ρ_k を次のように実部･虚部別に表わす。

$$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r \ , \ \rho_{2r}=x_r+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r>0)$$

すると、(0.4) は

(0.4') $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r+iy_r}\right)$$

I. 十分性

もし、$x_r=1/2$ $r=1,2,3,\cdots$ ならば、(0.4') は

(0.4") $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/2-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{1/2+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{1/2-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{1/2+iy_r}\right)$$

このペアの両辺の根を求めるよう。すると、、

左辺 $$1-\frac{z}{1/2-iy_r}=0 \ , \ 1-\frac{z}{1/2+iy_r}=0 \qquad r=1,2,3,\cdots$$

右辺 $$1-\frac{1-z}{1/2-iy_r}=0 \ , \ 1-\frac{1-z}{1/2+iy_r}=0 \qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらより、

左辺 $z=1/2-iy_r$, $z=1/2+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$

右辺 $z=1/2+iy_r$, $z=1/2-iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$

左辺と右辺の零点は交差方向に一致している。つまり、(0.4″) は恒等的に成立している。このことは (0.4) が恒等的に成立していることと同義である。

この結果、定理 3･1 と 定理 3･2 により、全複素平面上で次が完結する。

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \xi(z) = \xi(1-z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

そして、ヴィエタの公式 (9.5) より 次の等式が成立する。

(9.5’) $$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right) = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots$$

II. 必要性

ここで、臨界領域内において 臨界線上の零点以外に 臨界線外の零点が存在したと仮定する。このような零点の 1 組は次の 4 個から成るべきことが知られている。

$$1/2-\alpha_s \pm i\beta_s \ , \ 1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \quad \left(0<\alpha_s<1/2 \ , \ \beta_s>0\right)$$

すると ヴィエタの公式 (9.5) より、次式が成立しなければならない。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right)+\sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2-\alpha_s-i\beta_s}+\frac{1}{1/2-\alpha_s+i\beta_s}\right)$$
$$+\sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2+\alpha_s-i\beta_s}+\frac{1}{1/2+\alpha_s+i\beta_s}\right) = 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2}$$

i.e.

(9.5″) $$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right)+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$
$$= 1+\frac{\gamma}{2}-\log 2-\frac{\log\pi}{2} = 0.0230957\cdots$$

然るに、$0<\alpha_s<1/2$ に対して $0 < 1-2\alpha_s < 1+2\alpha_s < 2$ であるから、

$$\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\} > 0$$

それ故、(9.5″) は (9.5’) に矛盾する。よって 臨界領域内では臨界線外の零点が存在してはならない。その結果、(0.4) は $Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ のときにのみ成立することになる。

III. かくて、$Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ は (0.4) のための必要十分条件である。

Q.E.D.

以上、3つの定理により、$Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ ならば かつ、このときにのみ、次の 四段論法 が全複素平面上で完結する。

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \xi(z) = \xi(1-z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

かくして、リーマン予想は定理として成立する。

2025.12.18 Uploarded
2026.01.08 Supplemented Proof of Theorem 3.1.

宇宙人の数学