8 完備化されたディリクレベータのベキ級数

$\zeta(z,a)$ をフルヴィッツゼータ関数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ 及び完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ はそれぞれ次式で表される。

$$\beta(z) = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + \cdots = \frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\} \tag{0.0}$$

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{0.1}$$

2つの式を観察すると、2^z と $\beta(z)$ に含まれる 4^z が重複していることが判る。つまり (0.1) をそのまま級数に展開すると無駄な級数を含むことになる。これは計算速度に多大な影響を与える。そこで、(0.1) を次のように加工して 4^z を予め除いておく。

補題 8･0

$\zeta(z,a)$ をフルヴィッツゼータ関数、$\Gamma(z)$ をガンマ関数とするとき、$\omega(z)$ は次で表される。

$$\omega(z) = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) \tag{0.1'}$$

証明

(0.0) を (0.1) に代入して

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}$$

ここで

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} = \frac{4^{1+z}}{4^{1+z}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} = 4^{1+z}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}$$

これを右辺に代入して

$$\omega(z) = 4^{1+z}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

i.e.

$$\omega(z) = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

Q.E.D.

8･1 $\omega(z)$ の 1 の周りのテイラー級数

(0.1') を構成する3つの関数をそれぞれテイラー級数に展開し、それらのコーシー積を $\omega(z)$ のテイラー級数とする。

補題 8･1･1

全複素平面上で次が成立する。

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} = \frac{1}{4\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\log\pi\right)^r(z-1)^r \tag{9.1}$$

証明

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}=e^{\log\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}=e^{-\log 2-\frac{1}{2}\log\pi}$$

であるから、

$$f(z)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}=e^{-\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)z-\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)}$$

拙著 公式 9･2･2「 09 高階微分 」(超微積分)によfれば

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}e^{ax+b}$$

これを上式に適用すると

$$f^{(r)}(z)=(-1)^r\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^r e^{-\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)z-\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)}$$

$z=1$ のとき

$$f^{(r)}(1)=(-1)^r\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^r e^{-(\log 4+\log\pi)}=\frac{(-1)^r}{4\pi}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^r$$

よって

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(1)}{r\,!}(z-1)^r=\frac{1}{4\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^r(z-1)^r$$

Q.E.D.

補題 8･1･2

全複素平面上で次が成立する。

$$\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r\,!}\left\{\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\right\}(z-1)^r \tag{9.2}$$

但し、$\gamma_r(a)$ は一般スティルチェス定数で次のように定義される。

$$\gamma_r(a)=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{\log^r(k+a)}{k+a}-\frac{\log^{r+1}(m+a)}{r+1}\right\}\qquad \begin{array}{l} r=0,1,2,\cdots \\ a\neq 0,-1,-2,\cdots \end{array}$$

証明

フルヴィッツ・ゼータ関数 $\zeta(z,a)$ は一般スティルチェス定数 $\gamma_r(a)$ を用いて次のようにローラン展開される。

$$\zeta(z,a)=\frac{1}{z-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r(a)\frac{(z-1)^r}{r\,!}$$

これより

$$\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{z-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)\frac{(z-1)^r}{r\,!}$$

$$\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{z-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\frac{(z-1)^r}{r\,!}$$

両者の差を求めることによって与式を得る。

Q.E.D.

補題 8･1･3

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、$z=1$ を中心とする半径 2 の円内で次が成立する。

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g_r(1)}{2^r r!}(z-1)^r \tag{9.3}$$

但し、

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

証明

拙著 公式 12･1･1「12 ガンマ関数とその逆数の級数展開 」(アラカルト) は次のようであった。

$\Gamma(z)$ をガンマ関数、$\psi_n(z)$ をポリガンマ関数、$B_{n,k}(f_1, f_2, \dots)$ を Bell 多項式とするとき、

$$\Gamma(z) = \Gamma(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(a)}{n!}(z-a)^n \qquad a \ne 0,-1,-2,-3,\cdots$$

但し

$$c_n(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \dots, \psi_{n-1}(a)\right) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

これを用いれば、$\Gamma\{(1+z)/2\}$ は次のようにテイラー展開できる。

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \Gamma(a) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma^{(r)}(a)}{r!}\left(\frac{1+z}{2} - a\right)^r$$

$$\Gamma^{(r)}(a) = \Gamma(a)\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(a), \psi_1(a), \dots, \psi_{r-1}(a)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

$a=1$ と置けば、

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \Gamma(1) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma^{(r)}(1)}{r!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^r \tag{9.4}$$

$$\Gamma^{(r)}(1) = \Gamma(1)\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{r-1}(1)\right) \qquad r=1,2,3,\cdots$$

ここで、$g_r(1)$ を次のように置く。

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \dots, \psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

すると

$$\Gamma^{(r)}(1) = \Gamma(1)g_r(1) \qquad r=0,1,2,\cdots$$

であるから、これを (9.4) に代入して、

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \Gamma(1) + \Gamma(1)\sum_{r=1}^{\infty} \frac{g_r(1)}{r!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^r$$

i.e.

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g_r(1)}{2^r r!}(z-1)^r \qquad \{\because \Gamma(1)=1\}$$

Q.E.D.

以上を総合すると次の定理が得られる。

定理 8·1·4（$\omega(z)$ の **1** の周りのテイラー級数）

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ とそのテイラー級数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r (z-1)^r \tag{1.1}$$

すると、これらの係数 $B_r \quad r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$B_r = \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t t!} \tag{1.2}$$

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \cdots, \psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}\left(f_1, f_2, \dots\right)$ は Bell 多項式、$\gamma_r(a)$ は次なる一般スチルチェス定数である。

$$\gamma_r(a) = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{\log^r(k+a)}{k+a}-\frac{\log^{r+1}(m+a)}{r+1}\right\} \qquad \begin{array}{l} r=0,1,2,\cdots \\ a\neq 0,-1,-2,\cdots \end{array}$$

証明

補題 8·0 より

$$\omega(z) = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) \tag{0.1'}$$

補題 8·1·1、補題 8·1·2 及び 補題 8·1·3 より、

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} = \frac{1}{4\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^r (z-1)^r$$

$$\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left\{\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\right\}(z-1)^r$$

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(1)}{2^r r!}(z-1)^r$$

但し、

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1), \psi_1(1), \cdots, \psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

3つの補題の式を(0.1')の右辺に代入すれば、

$$\omega(z) = 4\frac{1}{4\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^r (z-1)^r$$
$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left\{\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\right\}(z-1)^r \times \sum_{r=0}^{\infty}\frac{g_r(1)}{2^r r!}(z-1)^r$$

拙著 公式 1·1·2「 01 無限級数の累乗 」（無限次方程式）によると、

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}b_r z^r\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}c_r z^r\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}a_{r-s}b_{s-t}c_t z^r$$

よって、

$$a_r = \frac{(-1)^r}{r!}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\log \pi\right)^r \quad , \quad b_r = \frac{(-1)^r}{r\,!}\left\{\gamma_r\left(\frac{1}{4}\right) - \gamma_r\left(\frac{3}{4}\right)\right\} \quad , \quad c_r = \frac{g_r(1)}{2^r\, r\,!}$$

と置けば、

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\log \pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)\,!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right) - \gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\} \times \frac{g_t(1)}{2^t\, t\,!}(z-1)^r$$

そこで、

$$B_r = \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\log \pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)\,!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right) - \gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t\, t\,!} \tag{1.2}$$

と置いて (1.1) の右辺を得る。

Q.E.D.

例

(1.2) において B_r は一般スチルチェス定数 $\gamma_r(a)$ と中間的な定数 $g_r(1)$ で表されているが、$g(1)$ はポリガンマ関数 $\psi_r(1)$ の多項式であるので、最終的に B_r は $\gamma_r(a)$ と $\psi_r(1)$ で表示される。

数式処理ソフト *Mathematica* を用いて最初の幾つかを例示すると次のとおり。

$$B_{r\_} := \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)\,!}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{1}{2}\mathrm{Log}[\pi]\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)\,!}\left(\gamma_{s-t}\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_{s-t}\left[\frac{3}{4}\right]\right)\frac{g_t[1]}{2^t\, t\,!}$$

$$g_{r\_}[1] := \mathrm{If}\left[r == 0,\, 1,\, \sum_{k=1}^{r}\mathrm{BellY}[r,\, k,\, \mathrm{Tbl}\psi[r,\, 1]]\right]$$

$$\mathrm{Tbl}\psi[r\_,\, z\_] := \mathrm{Table}[\psi_k[z],\, \{k,\, 0,\, r-1\}]$$

$$B_0 \quad \frac{1}{\pi}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right) \qquad (=1)$$

$$B_1 \quad \frac{1}{\pi}\left(-\left(\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\right) - \gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] + \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right] + \frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$$

$$\begin{aligned} B_2 \quad \frac{1}{\pi}\Bigg(&\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right) + \left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] \\ &- \frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] + \frac{1}{8}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2 + \psi_1[1]\right)\Bigg) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 \quad \frac{1}{\pi}\Bigg(&-\frac{1}{6}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^3\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right) \\ &+ \frac{1}{6}\left(-\gamma_3\left[\frac{1}{4}\right] + \gamma_3\left[\frac{3}{4}\right]\right) + \frac{1}{4}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] \\ &+ \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] + \frac{1}{4}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] \end{aligned}$$

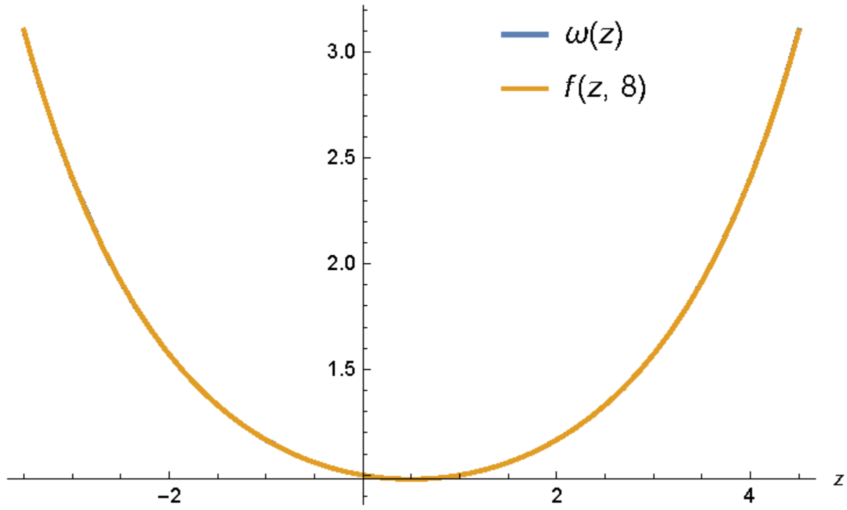
$$
-\frac{1}{8}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)
$$

$$
-\frac{1}{8}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)
$$

$$
\left.+\frac{1}{48}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^3+3\,\psi_0[1]\,\psi_1[1]+\psi_2[1]\right)\right)
$$

図

(1.1) の両辺を図示すると次のとおり。左辺（関数）が青で右辺（級数）が橙である。右辺は $(z-1)^8$ まで計算されているが、両辺は重なっていて左辺（青）は全く見えない。



ガンマ関数 (9.3) の特異点はディリクレベータ関数 (0.0) の自明な零点で相殺されて消滅しており、従って収束半径は∞である。

8・2 $\omega(z)$ のマクローリン級数

$\omega(z)$ のマクローリン級数は１の周りのテイラー級数から関数等式を用いて驚くほど簡単に得られる。

定理 8・2・1 ($\omega(z)$ のマクローリン級数)

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r z^r \tag{2.1}$$

すると、これらの係数 $A_r\ \ r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r=\frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t t!} \tag{2.2}$$

$$g_r(1)=\begin{cases}1 & r=0\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\cdots,\psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1,f_2,\ldots)$ は Bell 多項式、$\gamma_r(a)$ は次なる一般スチルチェス定数である。

$$\gamma_r(a)=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{\log^r(k+a)}{k+a}-\frac{\log^{r+1}(m+a)}{r+1}\right\}\qquad \begin{array}{l}r=0,1,2,\cdots\\ a\neq 0,-1,-2,\cdots\end{array}$$

証明

定理 8・1・4 より

$$B_r=\frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t t!} \tag{1.2}$$

$$\omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)=\sum_{r=0}^{\infty}B_r(z-1)^r \tag{1.1}$$

(1.1) において z を $1-z$ に置換すれば

$$\omega(1-z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+1-z}\Gamma\left(\frac{1+1-z}{2}\right)\beta(1-z)=\sum_{r=0}^{\infty}B_r(-z)^r \tag{9.5}$$

拙著 公式 4・1・1「 04 完備化されたディリクレ・ベータ 」によれば

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)\beta(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{2-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)$$

それ故、(1.1) と (9.5) の中辺 (関数) は等しくなり、全複素平面上で次なる関数等式が成立する。

$$\omega(z)=\omega(1-z)$$

従って、(1.1) と (9.5) の右辺 (級数) は次のようになる。、

$$\sum_{r=0}^{\infty}B_r(z-1)^r=\sum_{r=0}^{\infty}B_r(-z)^r=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rB_r z^r=\sum_{r=0}^{\infty}A_r z^r$$

つまり $A_r=(-1)^rB_r\ \ r=0,1,2,\cdots$ である。

そこで、(1.2) に $(-1)^r$ を乗じれば右辺の最初の符号は

$$(-1)^r(-1)^{r-s}=(-1)^{-s}$$

かくて (2.2) を得る。

Q.E.D.

例

数式処理ソフト*Mathematica* を用いてA_r の最初の幾つかを例示すると次のとおり。
前節の B_r と比べると、奇数項の符号が反転していることが分かる。

$$A_{r\_} := \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{1}{2}\mathrm{Log}[\pi]\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left(\gamma_{s-t}\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_{s-t}\left[\frac{3}{4}\right]\right)\frac{g_t[1]}{2^t\, t!}$$

$$g_{r\_}[1] := \mathrm{If}\left[r == 0,\ 1,\ \sum_{k=1}^{r}\mathrm{BellY}[r,k,\mathrm{Tbl}\psi[r,1]]\right]$$

$$\mathrm{Tbl}\psi[r\_, z\_] := \mathrm{Table}[\psi_k[z], \{k, 0, r-1\}]$$

$$A_0 \quad \frac{1}{\pi}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)$$

$$A_1 \quad \frac{1}{\pi}\left(\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$$

$$\begin{aligned}A_2 \quad \frac{1}{\pi}\Bigg(&\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\\
&-\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]+\frac{1}{8}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)\Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_3 \quad \frac{1}{\pi}\Bigg(&\frac{1}{6}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^3\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)\\
&+\frac{1}{6}\left(\gamma_3\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_3\left[\frac{3}{4}\right]\right)-\frac{1}{4}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\\
&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]-\frac{1}{4}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\\
&+\frac{1}{8}\left(\mathrm{Log}[2]+\frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)\\
&+\frac{1}{8}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)\\
&-\frac{1}{48}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^3+3\,\psi_0[1]\,\psi_1[1]+\psi_2[1]\right)\Bigg)\end{aligned}$$

確認計算

Left hande side

$$\omega[z\_] := \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\mathrm{Gamma}\left[\frac{1+z}{2}\right]\mathrm{DirichletBeta}[z]$$

$$\mathrm{N}[\mathrm{Series}[\omega[z], \{z, 0, 8\}]]$$

$$\begin{aligned}&1. - 0.077784\,(z+0.) + 0.0803502\,(z+0.)^2 - 0.00518246\,(z+0.)^3 +\\
&0.00271685\,(z+0.)^4 - 0.000152607\,(z+0.)^5 + 0.000053991\,(z+0.)^6 -\\
&2.71502\times10^{-6}\,(z+0.)^7 + 7.27982\times10^{-7}\,(z+0.)^8 + O[z+0.]^9\end{aligned}$$

Right hande side

```
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
```

$$f[z\_, m\_] := \sum_{r=0}^{m} A_r z^r$$

$$A_{r\_} := \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{s} \frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!} \left(Log[2] + \frac{1}{2} Log[\pi] \right)^{r-s} \frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!} \left(\gamma_{s-t}\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_{s-t}\left[\frac{3}{4}\right] \right) \frac{g_t[1]}{2^t\, t!}$$

$$g_{r\_}[1] := If\left[r == 0, 1, \sum_{k=1}^{r} BellY[r, k, Tbl\psi[r, 1]] \right]$$

$$Tbl\psi[r\_, z\_] := Table[PolyGamma[k, z], \{k, 0, r-1\}]$$

$$\gamma_{s\_}[a\_] := StieltjesGamma[s, a]$$

```
N[f[z, 8]]
```

$$1. - 0.077784\, z + 0.0803502\, z^2 - 0.00518246\, z^3 + 0.00271685\, z^4 - 0.000152607\, z^5 + 0.000053991\, z^6 - 2.71502 \times 10^{-6}\, z^7 + 7.27982 \times 10^{-7}\, z^8$$

Note

マクローリン級数を基準にすると、$\omega(z)$ は次のようになる。

$$\omega(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r = \sum_{r=0}^{\infty} A_r (1-z)^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-z)^r A_r (z-1)^r = \sum_{r=0}^{\infty} B_r (z-1)^r$$

つまり、$\omega(z)$ のマクローリン級数において z を $1-z$ に置換した級数は、$\omega(z)$ の 1 の周りのテイラー級数である。そして両者の係数は偶数項では同じで奇数項では符号のみ異なる。面白い性質である。更に興味深いのは、両級数の展開の中心点 $0,1$ が臨界領域の左右の端点であることである。

これらは関数等式によってもたらされたものである。従って、完備化されたリーマンゼータ関数 $\xi(z)$ においてもこれらの関係は成立する。

2026.01.27

河野 和
広島市

宇宙人の数学