09 完備化されたディリクレベータの李係数

要 旨

(1) 完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ についても李係数 $\lambda_n \quad n=1,2,3,\cdots$ が定義できる。
それらは $\omega(z)$ の構成要素で表現され、再帰計算によって値が得られる。

(2) 李係数 $\lambda_n \quad n=1,2,3,\cdots$ は $\omega(z)$ のアダマール積によっても定義できる。
それらは $\omega(z)$ の共役零点 $x_r \pm i y_r \quad r=1,2,3,\cdots$ によって表示出来る。

(3) 臨界線 $x_r = 1/2 \quad r=1,2,3,\cdots$ 上において、李係数 $\lambda_n \quad n=1,2,3,\cdots$ は実数の平方和で表される。つまり、臨界線上の李係数は李の基準を満たす。
実際、臨界線上の零点 10000 個を用いて計算した李係数は (1) の再帰計算の値とほぼ一致した。

序 説

1. 本稿で扱う関数

本稿ではディリクレベータ関数 $\beta(z)$ 及び完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ を扱う。それらはそれぞれ次式で定義される。

$$\beta(z) = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + \cdots = \frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\} \tag{0.0}$$

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{0.1}$$

なお、これらの零点は臨界領域($0 < Re(z) < 1$)においては同値であることが知られている。

2. 零点の逆数の和や積に関する記法

ディリクレベータ関数の零点の逆数の総和や積は一般に次のように記述される。

$$\sum_\rho \frac{1}{\rho} \quad , \quad \prod_\rho \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \qquad \text{但し、}\rho\text{ は全ての零点に亘る。}$$

これらの記法はこの限りでは有効である。しかし、これらの記法ではこの半多重級数等を記述出来ない。
例えば、λ_1^3 を強いてこの記法で表せば次のようになろう。

$$\left(\sum_\rho \frac{1}{\rho}\right)^3 = \sum_\rho \frac{1}{\rho^3} + 3\left(\sum_\rho \frac{1}{\rho}\right)\sum \frac{1}{\rho\rho} - 3\sum \frac{1}{\rho\rho\rho} \tag{0.3}$$

但し、2重和と3重和において ρ は重複しないものとする。

これらの記法は不便な上に実計算が不可能である。そこで本章では次の記法を用いることにする。

(1) 複素数表記

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\sum_{r_4=1+r_3}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}\rho_{r_4}}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\cdots\rho_{r_n}}$$

(2) 実部・虚部別表記

しかし、(1) の記法でも 零点 ρ_k の実部や虚部を詳細に調べるのは困難である。そこで $\omega(z)$ が共役複素根を持つことに着目し、$\rho_k \quad k=1,2,3,\cdots$ を次のように置き換える。

$$\rho_1 = x_1 - iy_1 \ , \ \rho_2 = x_1 + iy_1 \ , \ \rho_3 = x_2 - iy_2 \ , \ \rho_4 = x_2 + iy_2 \ , \ \rho_5 = x_3 - iy_3 \ , \ \rho_6 = x_3 + iy_3 \ , \ \cdots$$

これを用いれば、(1) の記述例は次のように書き換えることが出来る。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_r - iy_r} + \frac{1}{x_r + iy_r} \right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \frac{2^2 x_r x_s}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)\left(x_s^2 + y_s^2\right)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^0}{x_r^2 + y_r^2}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1+r_1}^{\infty} \sum_{r_3=1+r_2}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \sum_{t=1+s}^{\infty} \frac{2^3 x_r x_s x_t}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)\left(x_s^2 + y_s^2\right)\left(x_t^2 + y_t^2\right)}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \frac{2^1 \left(x_r + x_s\right)}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)\left(x_s^2 + y_s^2\right)}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=r_1+1}^{\infty} \sum_{r_3=r_2+1}^{\infty} \sum_{r_4=r_3+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}\rho_{r_4}} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \sum_{t=1+s}^{\infty} \sum_{u=1+t}^{\infty} \frac{2^4 x_r x_s x_t x_u}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)\left(x_s^2 + y_s^2\right)\left(x_t^2 + y_t^2\right)\left(x_u^2 + y_u^2\right)}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \sum_{t=1+s}^{\infty} \frac{2^2 \left(x_r x_s + x_r x_t + x_s x_t\right)}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)\left(x_s^2 + y_s^2\right)\left(x_t^2 + y_t^2\right)}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1+r}^{\infty} \frac{2^0}{\left(x_r^2 + y_s^2\right)\left(x_r^2 + y_s^2\right)}$$

$$\vdots$$

9・1 李の基準と李係数

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ に関する李の基準は次のようである。

李の基準

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ に関するリーマン仮説は次の不等式と同値である。

$$\lambda_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=0} \geq 0 \qquad for\ n=1,2,3,\ldots$$

但し、

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = \prod_\rho\left(1-\frac{z}{\rho}\right)$$

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点を ρ とするとき、李係数 λ_n は次と同値である。

李係数 λ_n

$$\lambda_n = \sum_\rho\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right)$$

但し、ρ は全ての零点に亘る。

この式は上記の但し書きの右辺と λ_n の定義式から導出される。

最初の幾つかを展開すると次のとおり。

$$\lambda_1 = \sum_\rho\frac{1}{\rho}$$

$$\lambda_2 = \sum_\rho\left(\frac{2}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\right) = 2\sum_\rho\frac{1}{\rho} - \sum_\rho\frac{1}{\rho^2}$$

$$\lambda_3 = \sum_\rho\left(\frac{3}{\rho}-\frac{3}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\right) = 3\sum_\rho\frac{1}{\rho} - 3\sum_\rho\frac{1}{\rho^2} + \sum_\rho\frac{1}{\rho^3}$$

$$\lambda_4 = \sum_\rho\left(\frac{4}{\rho}-\frac{6}{\rho^2}+\frac{4}{\rho^3}-\frac{1}{\rho^4}\right) = 4\sum_\rho\frac{1}{\rho} - 6\sum_\rho\frac{1}{\rho^2} + 4\sum_\rho\frac{1}{\rho^3} - \sum_\rho\frac{1}{\rho^4}$$

$$\vdots$$

ここで、序説の記法を用いれば、李係数 λ_n は次のように記述できる。

補題 9・1・1

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点を ρ_{r_1} $r_1 = 1,2,3,\cdots$ とするとき、
李係数 λ_n $n = 1,2,3,\cdots$ は次で表される。

$$\lambda_1 = \sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}}$$

$$\lambda_2 = 2\sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}} - \sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}^2}$$

$$\lambda_3 = 3\sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}} - 3\sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}^2} + \sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}^3}$$

$$\lambda_4 = 4\sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}} - 6\sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}^2} + 4\sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}^3} - \sum_{r_1=1}^\infty\frac{1}{\rho_{r_1}^4}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n = n\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{k}} \tag{1.1n}$$

李係数の半多重級数表示

さて、$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ は 次の半多重級数で表すことが出来る。

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} \ , \ \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}} \ , \ \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=1+r_1}^{\infty}\sum_{r_3=1+r_2}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_1}\rho_{r_3}} \ , \ \cdots$$

それには先ず次の漸化式が必要である。

補題 9･1･2

n を 2 以上の自然数とするとき、収束する無限級数について次式が成立する。

$$\begin{aligned}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{n}} &= \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}}\right)^{n} - 2\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}}\right)^{n-2}H_2 \\ &\quad - \sum_{s=0}^{n-3}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}}\right)^{s}\left\{\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^{t}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{n-s-t}}\right)H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right\}\end{aligned} \tag{1.2n}$$

但し、

$$H_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}}$$

$$H_3 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}}$$

$$\vdots$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}\cdots\rho_{r_n}} \tag{1.Hn}$$

$n \le 2$ のとき (1.2$_n$)の第 3 項は無視。

証明

拙著 定理 5･2･2「 **05 冪級数と半多重級数** 」(無限次方程式)は次のようであった。

定理 5･2･2 (再掲)

n を 2 以上の自然数とするとき、収束する無限級数について次式が成立する。

$$\begin{aligned}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^{n} &= \sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^{n} + 2\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^{n-2}H_2 \\ &\quad + \sum_{s=0}^{n-3}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}\right)^{s}\left\{\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^{t}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}a_{r_1}^{n-s-t}\right)H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right\}\end{aligned}$$

但し、

$$H_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}$$

$$H_3 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}$$

$$\vdots$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}a_{r_1}a_{r_2}a_{r_3}\cdots a_{r_n}$$

$n \le 2$ のとき 第 3 項は無視。

この定理においてa_{r_n}を$1/\rho_{r_n}$に置換して、補題 9･1･2 を得る。

Q.E.D.

他方、補題 9･1･2 の半多重級数と$\omega(z)$のマクローリン級数の係数との間には次なる関係がある。

補題 9･1･3

関数$\omega(z)$とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r$$

すると、$\omega(z)$の零点 ρ_{r_1} $r_1 = 1,2,3,\cdots$ について次式が成立する。

$$A_1 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} \tag{1.3$_1$}$$

$$A_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}}$$

$$A_3 = -\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}}$$

$$A_4 = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\sum_{r_4=r_3+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}\rho_{r_4}}$$

$$\vdots$$

$$A_n = (-1)^n\sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\cdots\rho_{r_n}} \tag{1.3n}$$

証明

$\omega(z)$はその零点ρ_{r_1} $r_1 = 1,2,3,\cdots$ によって次のように完全に因数分解される。

$$\omega(z) = \left(1-\frac{z}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{z}{\rho_2}\right)\left(1-\frac{z}{\rho_3}\right)\left(1-\frac{z}{\rho_4}\right)\cdots$$

拙著 公式 3･2･1「**3 無限次方程式における根と係数**」(無限次方程式)によれば、無限次方程式においても根と係数の関係が成立し、与式を得る。

Q.E.D.

そして、これらのA_n $n=1,2,3,4,\cdots$ の値は$\omega(z)$を構成する関数 $\Gamma(z)$, $\beta(z)$の高階微係数及びπによって与えられる。即ち、

補題 9･1･3 の係数A_r $r=1,2,3,\cdots$ は拙著 定理 8･2･1「**08 完備化されたディリクレベータのベキ級数**」で与えらる。これを再掲すると次のとおり。

定理 8･2･1 (再掲)

完備化されたディリクレベータ関数$\omega(z)$とそのマクローリン級数が次のようであるとする。

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r$$

すると、これらの係数 A_r $r=0,1,2,3,\cdots$ は次で与えられる。

$$A_r = \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t t!}$$

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\dots,\psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、$\gamma_r(a)$ は次なる一般スチルチェス定数である

$$\gamma_r(a) = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{\log^r(k+a)}{k+a} - \frac{\log^{r+1}(m+a)}{r+1}\right\} \qquad \begin{array}{l} r=0,1,2,\cdots \\ a\neq 0,-1,-2,\cdots \end{array}$$

数式処理ソフト***Mathematica*** を用いてA_r の最初の幾つかを計算すると、次のようになる。

```
Tblψ[r_, z_] := Table[ψk[z], {k, 0, r - 1}]
```

$$A_0 \quad \frac{1}{\pi}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right) \qquad (=1)$$

$$A_1 \quad \frac{1}{\pi}\left(\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right) + \gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right] - \frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$$

$$\begin{aligned} A_2 \quad \frac{1}{\pi}\Biggl(&\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right) + \left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}[2] + \frac{\mathrm{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] \\ &- \frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1] + \frac{1}{8}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right] - \gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2 + \psi_1[1]\right)\Biggr) \end{aligned}$$

⋮

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
γs_[a_] := StieltjesGamma[s, a]
SetPrecision[{A1, A2, A3, A4}, 14]
{-0.0777839899618, 0.080350229317, -0.005182462271, 0.002716852531}
```

補題 9･1･1 ～ 補題 9･1･3 及び 定理 8･2･1 を総合すると次の定理が得られる。

定理 9･1･4

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点をρ_{r1} $r_1 = 1,2,3,\cdots$ とするとき、李係数 λ_n $n = 1,2,3,\cdots$ は次で表される。

$$\lambda_n = -nA_1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k} \qquad (n=1 \text{ のとき 右辺の第 2 項は無視。})$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} = -A_1$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k} = (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2}A_2 - \sum_{s=0}^{k-3}(-A_1)^s\left\{\sum_{t=2}^{k-s-1}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{k-s-t}}\right)A_t + (k-s)A_{k-s}\right\}$$

（$k \le 2$ のとき 右辺の第 3 項は無視。）

$$A_r = \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!}\left(\log 2 + \frac{1}{2}\log\pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right) - \gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t t!}$$

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r}B_{r,k}(\psi_0(1), \psi_1(1), \ldots, \psi_{r-1}(1)) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \ldots)$ は Bell 多項式、$\gamma_r(a)$ は一般スチルチェス定数である。

証明

補題 9･1･1 と 補題 9･1･2 より

$$\lambda_n = n\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k} \tag{1.1n}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^n} = \left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}}\right)^n - 2\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}}\right)^{n-2}H_2$$

$$- \sum_{s=0}^{n-3}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}}\right)^s\left\{\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{n-s-t}}\right)H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right\} \tag{1.2n}$$

$$H_n = \sum_{r_1=1}^{\infty}\sum_{r_2=r_1+1}^{\infty}\sum_{r_3=r_2+1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=r_{n-1}+1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}\rho_{r_2}\rho_{r_3}\cdots\rho_{r_n}} \tag{1.Hn}$$

次に、補題 9･1･3 より

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} = -A_1 \tag{1.3$_1$}$$

これを (1.1n) と (1.2n) に代入して

$$\lambda_n = -nA_1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^n} = (-A_1)^n - 2(-A_1)^{n-2}H_2$$

$$- \sum_{s=0}^{n-3}(-A_1)^s\left\{\sum_{t=2}^{n-s-1}(-1)^t\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{n-s-t}}\right)H_t + (-1)^{n-s}(n-s)H_{n-s}\right\}$$

次に、(1.Hn) と 補題 9･1･3 (1.3n) より

$$H_n = (-1)^n A_n \qquad n=2,3,4,\cdots$$

これらを上式に代入して

$$\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k} = (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2}A_2 - \sum_{s=0}^{k-3}(-A_1)^s\left\{\sum_{t=2}^{k-s-1}\left(\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^{k-s-t}}\right)A_t + (k-s)A_{k-s}\right\}$$

A_r , $g_r(1)$ 及び 但し書きは 定理 8･2･1 より従う。

Q.E.D.

定理 9･1･4 の記述は見易いが、計算には不向きである。そこで、冪乗和を次のように置換する。

$$G_1 = -A_1 \quad , \quad G_k = \sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k} \qquad k=2,3,4,\cdots$$

すると、再帰計算に適した次の定理が得られる。

定理 9･1･5

李係数 λ_n $n=1,2,3,\cdots$ は次で計算できる。

$$\lambda_n = -nA_1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}G_k$$ ($n=1$ のとき 右辺の第 2 項は無視。)

$$G_1 = -A_1$$

$$G_k = (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2}A_2 - \sum_{s=0}^{k-3}(-A_1)^s\left\{\sum_{t=2}^{k-s-1}G_{k-s-t}A_t + (k-s)A_{k-s}\right\}$$

($k \le 2$ のとき 右辺の第 3 項は無視。)

$$A_r = \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!}\left(\log 2+\frac{1}{2}\log\pi\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left\{\gamma_{s-t}\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_{s-t}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\frac{g_t(1)}{2^t t!}$$

$$g_r(1) = \begin{cases} 1 & r=0 \\ \sum_{k=1}^{r} B_{r,k}\left(\psi_0(1),\psi_1(1),\dots,\psi_{r-1}(1)\right) & r=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

但し、$\psi_r(z)$ はポリガンマ関数、$B_{r,k}(f_1, f_2, \dots)$ は Bell 多項式、$\gamma_r(a)$ は一般スチルチェス定数である。

実際、数式処理ソフト *Mathematica* を用いて この定理を実行すれば、次のようになる。

Li's coefficient (symbolic) λ_n

Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;

$\lambda_{n\_} := -n A_1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1}\,\text{Binomial}[n,k]\, G_k$

$G_1 := -A_1$

$G_{k\_} := (-A_1)^k - 2(-A_1)^{k-2} A_2 - \sum_{s=0}^{k-3} (-A_1)^s \left(\sum_{t=2}^{k-s-1} G_{k-s-t} A_t + (k-s) A_{k-s}\right)$

$A_{r\_} := \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{r}\sum_{t=0}^{s}\frac{(-1)^{-s}}{(r-s)!}\left(\text{Log}[2]+\frac{1}{2}\text{Log}[\pi]\right)^{r-s}\frac{(-1)^{s-t}}{(s-t)!}\left(\gamma_{s-t}\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_{s-t}\left[\frac{3}{4}\right]\right)\frac{g_t[1]}{2^t\, t!}$

$g_{r\_}[1] := \text{If}\left[r == 0, 1, \sum_{k=1}^{r} \text{BellY}[r, k, \text{Tbl}\psi[r, 1]]\right]$

$\text{Tbl}\psi[r\_, z\_] := \text{Table}[\psi_k[z], \{k, 0, r-1\}]$

$\lambda_1 \quad -\frac{1}{\pi}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$

$\lambda_2 \quad -\frac{2}{\pi}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$
$-\frac{1}{\pi^2}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)^2$
$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\right.$
$+\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)-\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]$
$\left.-\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]+\frac{1}{8}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)\right)$

$\lambda_3 \quad -\frac{3}{\pi}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$
$-\frac{1}{\pi^3}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)^3$
$+\frac{3}{\pi^2}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)$
$\times\left(\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\right.$
$+\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)-\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]$
$\left.-\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]+\frac{1}{8}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
&-3\left(\frac{1}{\pi^2}\left(\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\right)^2\right.\\
&\quad-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\right.\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)-\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\\
&\qquad\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]+\frac{1}{8}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)\right)\right)\\
&-\frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{6}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)^3\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\right.\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)+\frac{1}{6}\left(\gamma_3\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_3\left[\frac{3}{4}\right]\right)\\
&\quad-\frac{1}{4}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)^2\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]-\frac{1}{4}\left(\gamma_2\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_2\left[\frac{3}{4}\right]\right)\psi_0[1]\\
&\quad+\frac{1}{8}\left(\text{Log}[2]+\frac{\text{Log}[\pi]}{2}\right)\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)+\frac{1}{8}\left(\gamma_1\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_1\left[\frac{3}{4}\right]\right)\\
&\qquad\left.\times\left(\psi_0[1]^2+\psi_1[1]\right)-\frac{1}{48}\left(\gamma_0\left[\frac{1}{4}\right]-\gamma_0\left[\frac{3}{4}\right]\right)\left(\psi_0[1]^3+3\,\psi_0[1]\,\psi_1[1]+\psi_2[1]\right)\right)
\end{aligned}
$$

$\psi_n(1)$ と $\gamma_n(a)$ に数値を与えて李係数 λ_n を計算すると次のようになる。

Li's coefficient (numerical) λ_n

```
Tblψ[r_, z_] := Table[PolyGamma[k, z], {k, 0, r - 1}]
γs_[a_] := StieltjesGamma[s, a]
```

λ_1	0.777839899618
λ_2	0.310218089464
λ_3	0.69457042132
λ_4	1.22635973042
λ_5	1.8994612040
λ_6	2.7062506951
λ_7	3.637783553
λ_8	4.684003358
λ_9	5.833975075
λ_{10}	7.07613652

λ_{11}	8.39856156
λ_{12}	9.78922816
λ_{13}	11.23628437
λ_{14}	12.7283053
λ_{15}	14.2545345
λ_{16}	15.8051035
λ_{17}	17.3712243
λ_{18}	18.945349
λ_{19}	20.521296
λ_{20}	22.094333
λ_{21}	23.661221

これらのうち、λ_1 はディリクレベータ関数の零点の逆数の和に等しい。(OEIS A360807)

cf.

完備化されたリーマンゼータの李係数、例えば λ_3 は

$$
\begin{aligned}
\lambda_3 = -\frac{3}{2}\log\pi+\frac{3}{2}\psi_0\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}\psi_1\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{16}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right)\\
+3\gamma_0-3\gamma_0^2+\gamma_0^3-6\gamma_1+3\gamma_0\gamma_1+\frac{3}{2}\gamma_2
\end{aligned}
$$

これは $log\ \pi$, $\psi_n(3/2)$ 及び γ_n の 3 グループに分離されている。他の λ_n についても同様である。
それ故、再帰計算はスチルチェス定数 γ_n のみについて行えば良かった。

他方、、完備化されたディリクレベータの李係数は、上記で明らかなようにグループ分けすることが出来ない。
よって上記のように $log\ \pi$, $\psi_n(1)$ 及び $\gamma_n(a)$ を一括して再帰計算する他は無い。

9･2 李係数の $x_r \pm i y_r$ による表示

前節では完備化されたディリクレベータ関数のアダマール積から得られる李係数が次式で示された。

$$\lambda_n = \sum_{\rho}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right) \qquad \text{但し、}\rho\text{ は全ての零点に亘る。}$$

本節では、この李係数を完備化されたディリクレベータ関数の共役零点 $x_r \pm i y_r$ で表示する。

補題 9･2･1

共役複素数 $x_r \pm i y_r$ について次が成立する。

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^1 + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^1 = \frac{(2x_r)^1}{x_r^2 + y_r^2} \tag{9.1}$$

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^2 = \frac{(2x_r)^2}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^2} - \frac{2(2x_r)^0}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^1} \tag{9.2}$$

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^3 = \frac{(2x_r)^3}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^3} - \frac{3(2x_r)^1}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^2} \tag{9.3}$$

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^4 + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^4 = \frac{(2x_r)^4}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^4} - \frac{4(2x_r)^2}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^3} + \frac{2(2x_r)^0}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^2} \tag{9.4}$$

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^5 + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^5 = \frac{(2x_r)^5}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^5} - \frac{5(2x_r)^3}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^4} + \frac{5(2x_r)^1}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^3} \tag{9.5}$$

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^6 + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^6 = \frac{(2x_r)^6}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^6} - \frac{6(2x_r)^4}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^5} + \frac{9(2x_r)^2}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^4} - \frac{2(2x_r)^0}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^3} \tag{9.6}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^s + \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^s = \sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor}(-1)^t\left\{\binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1}\right\}\frac{(2x_r)^{s-2t}}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^{s-t}} \tag{9.s}$$

証明

1乗和と1乗積

$$\frac{1}{x_r + i y_r} + \frac{1}{x_r - i y_r} = \frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2} \tag{9.1}$$

$$\frac{1}{x_r + i y_r}\,\frac{1}{x_r - i y_r} = \frac{1}{x_r^2 + y_r^2} \tag{9.1p}$$

2乗和

$$\left(\frac{1}{x_r + i y_r} + \frac{1}{x_r - i y_r}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^2 + 2\frac{1}{x_r + i y_r}\,\frac{1}{x_r - i y_r}$$

(9.1) と (9.1p) を両辺に代入すれば

$$\left(\frac{2x_r}{x_r^2 + y_r^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^2 + 2\frac{1}{x_r^2 + y_r^2}$$

これより

$$\left(\frac{1}{x_r + i y_r}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_r - i y_r}\right)^2 = \frac{(2x_r)^2}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^2} - 2\frac{(2x_r)^0}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^1} \tag{9.2}$$

3乗和

$$\left(\frac{1}{x_r+iy_r}+\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^3=\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^3+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^3$$

$$+3\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^2\frac{1}{x_r-iy_r}+3\frac{1}{x_r+iy_r}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^3+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^3+3\frac{1}{x_r+iy_r}\frac{1}{x_r-iy_r}\left(\frac{1}{x_r+iy_r}+\frac{1}{x_r-iy_r}\right)$$

(9.1) と (9.1p) を両辺に代入すれば

$$\left(\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^3=\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^3+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^3+3\frac{1}{x_r^2+y_r^2}\left(\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

これより

$$\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^3+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^3=\frac{(2x_r)^3}{(x_r^2+y_r^2)^3}-3\frac{(2x_r)^1}{(x_r^2+y_r^2)^2} \tag{9.3}$$

4〜6乗和

同様にして、

$$\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^4+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^4=\frac{(2x_r)^4}{(x_r^2+y_r^2)^4}-4\frac{(2x_r)^2}{(x_r^2+y_r^2)^3}+2\frac{(2x_r)^0}{(x_r^2+y_r^2)^2} \tag{9.4}$$

$$\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^5+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^5=\frac{(2x_r)^5}{(x_r^2+y_r^2)^5}-5\frac{(2x_r)^3}{(x_r^2+y_r^2)^4}+5\frac{(2x_r)^1}{(x_r^2+y_r^2)^3} \tag{9.5}$$

$$\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^6+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^6=\frac{(2x_r)^6}{(x_r^2+y_r^2)^6}-6\frac{(2x_r)^4}{(x_r^2+y_r^2)^5}+9\frac{(2x_r)^2}{(x_r^2+y_r^2)^4}-2\frac{(2x_r)^0}{(x_r^2+y_r^2)^3} \tag{9.6}$$

これら右辺の係数の絶対値は

1,1,2,1,3,1,4,2,1,5,5,1,6,9,2, …

この数列を｢オンライン整数列大辞典｣(OEIS)で検索するとA034807が見つかった。

これらは *Lucas* 多項式の係数であり、次式で与えられる。

$$T(s,t)=C(s-t,t)+C(s-t-1,t-1)$$

よって、s 乗和は床関数 $\lfloor x \rfloor$ を用いて次のように表される。

$$\left(\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^s+\left(\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^s=\sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor}(-1)^t\left\{\binom{s-t}{t}+\binom{s-t-1}{t-1}\right\}\frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2+y_r^2)^{s-t}} \tag{9.s}$$

Q.E.D.

前節の 補題 9･1･1 とこの 補題 9･2･1 を用いて、次の定理を得る。

定理 9･2･2

完備化されたディリクレベータ関数$\omega(z)$の零点を$x_r \pm iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ とするとき、

李係数 λ_n $n=1,2,3,\cdots$ は次式で表される、

$$\lambda_n=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{t=0}^{\lfloor s/2 \rfloor}(-1)^t\left(\binom{s-t}{t}+\binom{s-t-1}{t-1}\right)\frac{(2x_r)^{s-2t}}{(x_r^2+y_r^2)^{s-t}}\right) \tag{2.2}$$

証明

補題 9·1·1 より

$$\lambda_n = n\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_{r_1=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_{r_1}^k}$$

k を s に r_1 を k にそれぞれ置換すれば

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k^s} \tag{1.1n}$$

ここで、

$$\rho_1 = x_1 - iy_1\ ,\ \rho_2 = x_1 + iy_1\ ,\ \rho_3 = x_2 - iy_2\ ,\ \rho_4 = x_2 + iy_2\ ,\ \rho_5 = x_3 - iy_3\ ,\ \rho_6 = x_3 + iy_3\ ,\ \cdots$$

と置換すれば、(1.1n) は

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k^s}\\ &= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^s\right)\end{aligned}$$

他方、補題 9·2·1 は

$$\left(\frac{1}{x_r - iy_r}\right)^s + \left(\frac{1}{x_r + iy_r}\right)^s = \sum_{t=0}^{\lfloor s/2\rfloor}(-1)^t\left\{\binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1}\right\}\frac{(2x_r)^{s-2t}}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^{s-t}} \tag{9.s}$$

これを上に代入すれば

$$\lambda_n = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{\lfloor s/2\rfloor}(-1)^t\left\{\binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1}\right\}\frac{(2x_r)^{s-2t}}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^{s-t}}\right)$$

i.e.

$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{t=0}^{\lfloor s/2\rfloor}(-1)^t\left(\binom{s-t}{t} + \binom{s-t-1}{t-1}\right)\frac{(2x_r)^{s-2t}}{\left(x_r^2 + y_r^2\right)^{s-t}}\right) \tag{2.2}$$

Q.E.D.

(2.2) の最初の幾つかを展開すると次のようになる。

$$\lambda_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{2x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{2x_3}{x_3^2 + y_3^2} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 = &-\frac{(2x_1)^2}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)^2} + \frac{2(2x_1)^0}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{2(2x_1)^1}{x_1^2 + y_1^2}\\ &-\frac{(2x_2)^2}{\left(x_2^2 + y_2^2\right)^2} + \frac{2(2x_2)^0}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{2(2x_2)^1}{x_2^2 + y_2^2}\\ &-\frac{(2x_3)^2}{\left(x_3^2 + y_3^2\right)^2} + \frac{2(2x_3)^0}{x_3^2 + y_3^2} + \frac{2(2x_3)^1}{x_3^2 + y_3^2}\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 = &\frac{(2x_1)^3}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)^3} - \frac{3(2x_1)^1}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)^2} - \frac{3(2x_1)^2}{\left(x_1^2 + y_1^2\right)^2} + \frac{6(2x_1)^0}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{3(2x_1)^1}{x_1^2 + y_1^2}\\ &+\frac{(2x_2)^3}{\left(x_2^2 + y_2^2\right)^3} - \frac{3(2x_2)^1}{\left(x_2^2 + y_2^2\right)^2} - \frac{3(2x_2)^2}{\left(x_2^2 + y_2^2\right)^2} + \frac{6(2x_2)^0}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{3(2x_2)^1}{x_2^2 + y_2^2}\end{aligned}$$

$$+\frac{(2x_3)^3}{(x_3^2+y_3^2)^3}-\frac{3(2x_3)^1}{(x_3^2+y_3^2)^2}-\frac{3(2x_3)^2}{(x_3^2+y_3^2)^2}+\frac{6(2x_3)^0}{x_3^2+y_3^2}+\frac{3(2x_3)^1}{x_3^2+y_3^2}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_4=-\frac{(2x_1)^4}{(x_1^2+y_1^2)^4}+\frac{4(2x_1)^2}{(x_1^2+y_1^2)^3}+\frac{4(2x_1)^3}{(x_1^2+y_1^2)^3}-\frac{2(2x_1)^0}{(x_1^2+y_1^2)^2}-\frac{12(2x_1)^1}{(x_1^2+y_1^2)^2}-\frac{6(2x_1)^2}{(x_1^2+y_1^2)^2}+\frac{12(2x_1)^0}{x_1^2+y_1^2}+\frac{4(2x_1)^1}{x_1^2+y_1^2}$$

$$-\frac{(2x_2)^4}{(x_2^2+y_2^2)^4}+\frac{4(2x_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^3}+\frac{4(2x_2)^3}{(x_2^2+y_2^2)^3}-\frac{2(2x_2)^0}{(x_2^2+y_2^2)^2}-\frac{12(2x_2)^1}{(x_2^2+y_2^2)^2}-\frac{6(2x_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}+\frac{12(2x_2)^0}{x_2^2+y_2^2}+\frac{4(2x_2)^1}{x_2^2+y_2^2}$$

$$-\frac{(2x_3)^4}{(x_3^2+y_3^2)^4}+\frac{4(2x_3)^2}{(x_3^2+y_3^2)^3}+\frac{4(2x_3)^3}{(x_3^2+y_3^2)^3}-\frac{2(2x_3)^0}{(x_3^2+y_3^2)^2}-\frac{12(2x_3)^1}{(x_3^2+y_3^2)^2}-\frac{6(2x_3)^2}{(x_3^2+y_3^2)^2}+\frac{12(2x_3)^0}{x_3^2+y_3^2}+\frac{4(2x_3)^1}{x_3^2+y_3^2}$$

$$\vdots$$

9·3 臨界線上の李係数

本節では前節の特殊ケースとして、李係数 λ_n を臨界線上の零点 $1/2 \pm i\,y_r$ により表示する。

補題 9·3·1

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ の零点を $1/2 \pm i\,y_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とするとき、

李係数 $\lambda_n \quad n=1,2,3,\cdots$ は次式で表される、

$$\lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \left(\binom{2n-t}{t} + \binom{2n-t-1}{t-1} \right) \frac{1}{\left(1/4 + y_r^2\right)^{n-t}} \tag{3.1}$$

証明

定理 9·2·2 の展開例 において $x_r = 1/2 \quad r=1,2,3,\cdots$ と置けば $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ は次のようになる。

$$\lambda_1 = \frac{1}{1/4+y_1^2} + \frac{1}{1/4+y_2^2} + \frac{1}{1/4+y_3^2} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 = &-\frac{1}{\left(1/4+y_1^2\right)^2} + \frac{4}{1/4+y_1^2} \\ &-\frac{1}{\left(1/4+y_2^2\right)^2} + \frac{4}{1/4+y_2^2} \\ &-\frac{1}{\left(1/4+y_3^2\right)^2} + \frac{4}{1/4+y_3^2} \\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 = &\frac{1}{\left(1/4+y_1^2\right)^3} - \frac{6}{\left(1/4+y_1^2\right)^2} + \frac{9}{1/4+y_1^2} \\ &+\frac{1}{\left(1/4+y_2^2\right)^3} - \frac{6}{\left(1/4+y_2^2\right)^2} + \frac{9}{1/4+y_2^2} \\ &+\frac{1}{\left(1/4+y_3^2\right)^3} - \frac{6}{\left(1/4+y_3^2\right)^2} + \frac{9}{1/4+y_3^2} \\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 = &-\frac{1}{\left(1/4+y_1^2\right)^4} + \frac{8}{\left(1/4+y_1^2\right)^3} - \frac{20}{\left(1/4+y_1^2\right)^2} + \frac{16}{1/4+y_1^2} \\ &-\frac{1}{\left(1/4+y_2^2\right)^4} + \frac{8}{\left(1/4+y_2^2\right)^3} - \frac{20}{\left(1/4+y_2^2\right)^2} + \frac{16}{1/4+y_2^2} \\ &-\frac{1}{\left(1/4+y_3^2\right)^4} + \frac{8}{\left(1/4+y_3^2\right)^3} - \frac{20}{\left(1/4+y_3^2\right)^2} + \frac{16}{1/4+y_3^2} \\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

これらの右辺の係数の絶対値は ***Lucas*** 多項式の係数 A061896 の一部(赤字)である。

1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 1, 5, 5, 1, 6, 9, 2, 1, 4, 7, 14, 7, 1, 8, 20, 16, 2,

赤字のみの数列は次式によって得られる。

$$T(2n,t) = C(2n-t,t) + C(2n-t-1,t-1) \qquad t=0,1,\cdots,n-1$$

そこで、λ_n の第 r 行を $\phi_n(y_r)$ とすれば、

$$\phi_2(y_r) = -\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^2}+\frac{4}{1/4+y_r^2}$$
$$= (-1)^{2-1}\sum_{t=0}^{2-1}(-1)^t\left(\binom{4-t}{t}+\binom{4-t-1}{t-1}\right)\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^{2-t}}$$
$$\phi_3(y_r) = \frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^3}-\frac{6}{\left(1/4+y_r^2\right)^2}+\frac{9}{1/4+y_r^2}$$
$$= (-1)^{3-1}\sum_{t=0}^{3-1}(-1)^t\left(\binom{6-t}{t}+\binom{6-t-1}{t-1}\right)\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^{3-t}}$$
$$\vdots$$
以下、帰納法により、
$$\phi_n(y_r) = (-1)^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\left(\binom{2n-t}{t}+\binom{2n-t-1}{t-1}\right)\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^{n-t}} \tag{3.ϕ}$$
これより
$$\lambda_n = (-1)^{n-1}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\left(\binom{2n-t}{t}+\binom{2n-t-1}{t-1}\right)\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^{n-t}} \tag{3.1}$$
Q.E.D.

cf.
これは前節の一般式
$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\binom{n}{s}\sum_{t=0}^{\lfloor s/2\rfloor}(-1)^t\left(\binom{s-t}{t}+\binom{s-t-1}{t-1}\right)\frac{(2x_r)^{s-2t}}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{s-t}}\right) \tag{2.2}$$
よりも著しく簡素になっている。これは $2x_r=1$ $r=1,2,3,\cdots$ により多項式の分子が整数となり、分母毎に纏められたためである。

李係数を構成する多項式

そもそも李係数 λ_n はその符号を判定するためにある。そのためには λ_n の各行
$$\phi_n(y_r) = (-1)^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\left(\binom{2n-t}{t}+\binom{2n-t-1}{t-1}\right)\frac{1}{\left(1/4+y_r^2\right)^{n-t}} \tag{9.ϕ}$$
の符号を調べることから始めるべきであろう。

ここで任意の実数 y_r に対して $\left(1/4+y_r^2\right)^n>0$ であるから、$\phi_n(y_r)$ からこれを除いた多項式を
$$g_n(y_r) = (-1)^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\left(\binom{2n-t}{t}+\binom{2n-t-1}{t-1}\right)\left(1/4+y_r^2\right)^t \tag{9.g}$$
とせよ。すると、 $\phi_n(y_r)$ の代わりに $g_n(y_r)$ の符号を調べればよいことになる。

補題 9・3・2

n を自然数、y_r を実数、そして $g_n(y_r)$ を次のような多項式とする。
$$g_n(y_r) = (-1)^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\left(\binom{2n-t}{t}+\binom{2n-t-1}{t-1}\right)\left(1/4+y_r^2\right)^t \tag{9.g}$$
すると $g_n(y_r)$ は n が奇数か偶数かによってそれぞれ次のように変形される。
$$g_{2n-1}(y) = \frac{1}{4^{2n-2}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{9.go}$$

$$g_{2n}(y) = \frac{y_r^2}{4^{2n-2}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s \binom{2n}{2s+1} y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{9.ge}$$

証明

(1) $\boldsymbol{n}$ が奇数のとき、

$g_n(y_r)$ は次のように簡約されて変形される。

$$g_1(y_r) = 1 = \frac{1}{4^0}$$

$$g_3(y_r) = \frac{1}{16}\left(1-12y_r^2\right)^2 = \frac{1}{4^2}\left(1-12y_r^2\right)^2$$

$$g_5(y_r) = \frac{1}{256}\left(1-40y_r^2+80y_r^4\right)^2 = \frac{1}{4^4}\left(1-40y_r^2+80y_r^4\right)^2$$

$$g_7(y_r) = \frac{1}{4096}\left(1-84y_r^2+560y_r^4-448y_r^6\right)^2 = \frac{1}{4^6}\left(1-84y_r^2+560y_r^4-448y_r^6\right)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$1,84,560,448$ を OEIS中で検索するとA085840 が見つかった。そしてこれらは次式で与えられる。

$$T(n,s) = \frac{4^s(2n+1)!}{(2n-2s+1)!(2s)!} \qquad s=0,1,2,\cdots,n$$

右辺において n を $n-1$ に置換すると

$$T(n,s) = \frac{4^s(2n-1)!}{(2n-2s-1)!(2s)!} \qquad s=0,1,2,\cdots,n-1$$

これを用いれば

$$g_{2n-1}(y_r) = \frac{1}{4^{2n-2}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\frac{4^s(2n-1)!}{(2n-2s-1)!(2s)!}y_r^{2s}\right)^2$$

i.e.

$$g_{2n-1}(y_r) = \frac{1}{4^{2n-2}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{9.go}$$

(2) $\boldsymbol{n}$ が偶数のとき、

$g_n(y)$ は次のように簡約されて変形される。

$$g_2(y_r) = 4y_r^2 = \frac{y_r^2}{4^0}\left(2y_r^0\right)^2$$

$$g_4(y_r) = y_r^2\left(1-4y_r^2\right)^2 = \frac{y_r^2}{4^2}\left(4-16y_r^2\right)^2$$

$$g_6(y_r) = \frac{y_r^2}{64}\left(3-40y_r^2+48y_r^4\right)^2 = \frac{y_r^2}{4^4}\left(6-80y_r^2+96y_r^4\right)^2$$

$$g_8(y_r) = \frac{y_r^2}{64}\left(1-28y_r^2+112y_r^4-62y_r^6\right)^2 = \frac{y_r^2}{4^6}\left(8-224y_r^2+896y_r^4-512y_r^6\right)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$8,224,896,512$ を OEIS中で検索すると、この数列を含む整数列 A229032 が見つかった。
そしてこれらは次式で与えられる。

$$T(n,s) = 4^s\binom{n+1}{2s+1} \qquad s=0,1,2,\cdots,n$$

不要な数列をスキップするため、右辺において n を $2n-1$ に置換すると

$$T(n,s) = 4^s\binom{2n}{2s+1} \qquad s=0,1,2,\cdots,n$$

これを用いれば

$$g_{2n}(y_r) = \frac{y_r^2}{4^{2n-2}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n}{2s+1}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{9.ge}$$

Q.E.D.

Note

つまり、$g_n(y_r)$ は全て完全平方式に帰着する。これは予想外の驚くべき結果である。

臨界線上の李係数

この補題 9･3･2 を用いれば、臨界線上の李係数は次のように表される。

定理 9･3･3

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ の零点を $1/2\pm iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ とするとき、李係数 $\lambda_n \quad n=1,2,3,\cdots$ は次のように実数の平方和で表される。

$$\lambda_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n-2}\left(\left(1/4+y_r^2\right)^{(2n-1)/2}\right)^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.3o}$$

$$\lambda_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{4^{2n-2}\left(1/4+y_r^2\right)^{2n}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n}{2s+1}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.3e}$$

証明

(3.1) , (9.ϕ) 及び (9.g) より

$$\lambda_n = \sum_{r=1}^{\infty}\phi_n(y_r) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{g_n(y_r)}{\left(1/4+y_r^2\right)^n}$$

これに 補題 9･3･2 の $g_n(y_r)$ を 奇数･偶数別に代入すれば、

$$\lambda_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n-2}\left(1/4+y_r^2\right)^{2n-1}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n-2}\left(\left(1/4+y_r^2\right)^{(2n-1)/2}\right)^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2$$

$$\lambda_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2}{4^{2n-2}\left(1/4+y_r^2\right)^{2n}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n}{2s+1}y_r^{2s}\right)^2$$

Q.E.D.

Note

当然に $\lambda_n \geq 0 \quad n=1,2,3,\cdots,\infty$ である。つまり、臨界線上の李係数は李の基準を満たす。

計算例

ディリクレベータ関数の実部が 1/2 である零点を生成する一般式は知られていないが、最初の 10000 個が ***Tomás Oliveira e Silva*** (http://sweet.ua.pt/tos/zeta.html (004-001)) によって提供されている。そこでこれを用いて (3.3o) , (3.3e) により $\lambda_1 \sim \lambda_4$ を計算すると、次のようになる。。

Loading Zeros of Dirichlet Beta Function

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
y := ReadList["BetaZeros.prn", Number]
```

Li coefficients on the Critical Line

2n-1

$$\lambda o_{n\_}[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{4^{2n-2}\left(\left(1/4 + y[[r]]^2\right)^{(2n-1)/2}\right)^2} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \,\mathrm{Binomial}[2n-1, 2s]\, y[[r]]^{2s}\right)^2$$

2n

$$\lambda e_{n\_}[m\_] := \sum_{r=1}^{m} \frac{y[[r]]^2}{4^{2n-2}\left(1/4 + y[[r]]^2\right)^{2n}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s 4^s \,\mathrm{Binomial}[2n, 2s+1]\, y[[r]]^{2s}\right)^2$$

$\{\lambda o_1[10000], \lambda e_1[10000], \lambda o_2[10000], \lambda e_2[10000]\}$

$\{0.0776004, 0.309484, 0.692918, 1.22342\}$

これらを 第1節の計算結果 と比べると、それぞれ有効 2 桁まで一致していることが分る。

2026.02.09

河野 和
広島市

宇宙人の数学