ディリクレベータ関数のリーマン予想の李係数による証明

要 旨

(1) 完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ の李係数は臨界領域の左端において定義できる。そしてこれは $\omega(z)$ とそのアダマール積の両方から導出可能である。これらをそれぞれoλn , oμn とすれば、oλn = oμn でなければならない。

(2) 李係数は臨界領域の右端においても定義できる。そしてこれも $\omega(z)$ とそのアダマール積の両方から導出可能である。これらをそれぞれıλn , ıμn とすれば、ıλn = ıμn でなければならない。

(3) $\omega(z)$ から得られる李係数は、関数等式と定義式により、oλn = ıλn となる。他方、アダマール積から得られる李係数 oμn , 1μn は共役零点 $x_r \pm i y_r \quad r=1,2,3,\cdots$ で表示できるが、それによると一般に oμn ≠ ıμn である。

(4) oμn = ıμn となるための必要十分条件は $\omega(z)$ の零点が臨界線 $x=1/2$ 上にあることである。この場合にのみ、oλn = oμn = ıμn = ıλn が完結する。そして これらの李係数は李の基準を満たす。かくして、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ についてのリーマン予想は定理として成立する。

序 説

1. 本稿で扱う関数

本稿ではディリクレベータ関数 $\beta(z)$ 及び完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ を扱う。それらはそれぞれ次式で定義される。

$$\beta(z) = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{7^z} + \cdots = \frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right) - \zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\} \tag{0.0}$$

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{0.1}$$

なお、これらの零点は臨界領域($0 < Re(z) < 1$)においては同値であることが知られている。

2. $\beta(z)$ や $\omega(z)$ の零点の記法

$\beta(z)$ や $\omega(z)$ の零点 ρ は 本稿では次のように記述する。

(1) 複素数表記

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k} \quad , \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(2) 実部・虚部別表記

$\rho_{2r-1} = x_r - i y_r \ , \ \rho_{2r} = x_r + i y_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r > 0)$ と置き、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r - i y_r} + \frac{1}{x_r + i y_r}\right) \quad , \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r - i y_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r + i y_r}\right)$$

1 臨界領域左端での李係数

本章における李係数は臨界領域左端 $z=0$ で定義されるものである。

1･1 ω関数からの李係数 oλn

本節における李係数は、完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ から得られるものである。

定理 1･1

李係数 ${}_{\omega}\lambda_n$ は次の2式で定義されるとする。

$$ {}_{\omega}\lambda_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=0} \tag{1.1d}$$

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{0.ω}$$

すると、${}_{\omega}\lambda_n$ は次で表される。

$$ {}_{\omega}\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=0} \tag{1.λ}$$

但し、$(a)_k$ はポッホハマー記号、$B_{n,k}\left(f_1,f_2,\ldots\right)$ は Bell 多項式である。

証明

(1) $\mathbf{(1\text{-}z)^{n\text{-}1}}$ **の高階導関数**

$$\frac{d^1}{dz^1}(1-z)^{n-1} = -(n-1)(1-z)^{n-2}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(1-z)^{n-1} = (n-2)(n-1)(1-z)^{n-3}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}(1-z)^{n-1} = -(n-3)(n-2)(n-1)(1-z)^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^s}{dz^s}(1-z)^{n-1} = (-1)^s\{(n-s)\cdots(n-2)(n-1)\}(1-z)^{n-1-s}$$

ポッホハマー記号

$$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$$

を用いると

$$(n-s)_k = (n-s)(n-s+1)\cdots(n-s+k-1)$$

これより

$$(n-s)_s = (n-s)(n-s+1)\cdots(n-1) = (n-s)\cdots(n-2)(n-1)$$

よって

$$\frac{d^s}{dz^s}(1-z)^{n-1} = (-1)^s(n-s)_s(1-z)^{n-1-s}$$

s を $n-s$ に置換すれば

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}(1-z)^{n-1} = (-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1} \tag{1.1}$$

(2) $\boldsymbol{\log \omega(z)}$ の高階導関数

拙著「22 合成関数の高階微分」22･2･3 によれば、$B_{s,t}\left(f_1, f_2, \dots\right)$ を Bell 多項式とするとき

$$\{\log f(x)\}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1}(r-1)!\,B_{n,r}\left(f_1, f_2, \dots, f_n\right) f^{-r} \qquad n \ge 1$$

よって

$$\frac{d^s}{dz^s}\log \omega(z) = \sum_{t=1}^{s} (-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t} \qquad s \ge 1 \tag{1.2λ}$$

(3) $\boldsymbol{(1-z)^{n-1}\log \omega(z)}$ の高階導関数

ライプニッツ則は

$$\{f(z)g(z)\}^{(n)} = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} f^{(n-s)}(z)\,g^{(s)}(z)$$

これに (1.1) と (1.2λ) を代入すればすれば、$n,s \ge 1$ であるから

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log \omega(z) = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\left\{(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\right\}$$
$$\times \sum_{t=1}^{s} (-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t} \tag{1.3λ}$$

(4) 李係数 $\boldsymbol{{}_0\lambda_n}$

(1.3λ) を (1.1d) に代入して

$${}_0\lambda_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\left\{(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\right\}\right.$$
$$\left.\times \sum_{t=1}^{s} (-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t}\right]_{z=0}$$

i.e.

$${}_0\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\sum_{t=1}^{s} (-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t}\right]_{z=0} \tag{1.λ}$$

Q.E.D.

最初の幾つかを書き下すと

$${}_0\lambda_1 = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$$

$${}_0\lambda_2 = \frac{(-1)^2}{1!}\lim_{z\to 0}\left\{-\frac{2\omega'(z)}{\omega(z)} - \frac{(1-z)\omega'(z)^2}{\omega(z)^2} + \frac{(1-z)\omega''(z)}{\omega(z)}\right\}$$

$${}_0\lambda_3 = \frac{(-1)^3}{2!}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{6\omega'(z)}{\omega(z)} + \frac{6(1-z)\omega'(z)^2}{\omega(z)^2} + \frac{2(1-z)^2\omega'(z)^3}{\omega(z)^3}\right.$$
$$\left. - \frac{6(1-z)\omega''(z)}{\omega(z)} - \frac{3(1-z)^2\omega'(z)\xi''(z)}{\omega(z)^2} + \frac{(1-z)^2\omega^{(3)}(z)}{\omega(z)}\right\}$$

⋮

また、数式処理ソフト *Mathematica* を用いてこれらを計算すfると次のようになる。

```
f[n_, z_] := (1 - z)^(n-1) Log[ω[z]]
```

```
ω[z_] := (2/√π)^(1+z) Gamma[(1 + z)/2] DirichletBeta[z]
Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1;
oλ1 := (-1)^1/0! Limit[FullSimplify[∂z f[1, z]], z → 0]
N[oλ1]    0.0777839899617847`
oλ2 := (-1)^2/1! Limit[FullSimplify[∂z ∂z f[2, z]], z → 0]
N[oλ2]    0.31021808946399876`
oλ3 := (-1)^3/2! Limit[FullSimplify[∂z ∂z ∂z f[3, z]], z → 0]
N[oλ3]    0.6945704213216022`
oλ4 := (-1)^4/3! Limit[Simplify[∂z ∂z ∂z ∂z f[4, z]], z → 0]
N[oλ4]    1.2263597304205356`
```

これらのうち、λ_1 はディリクレベータ関数の臨界線上の零点の逆数の和に等しい。(OEIS A360807)

1・2 アダマール積からの李係数 oμn

本節における李係数は、アダマール積から得られるものである。

定理 1・2

李係数 ${}_0\mu_n$ は次の2式で定義されるとする。

$$ {}_0\mu_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=0} \tag{1.2d}$$

$$\omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) \quad \textit{where, } \rho_k \ \left(k=1,2,3,\cdots\right) \textit{ are zeros of } \omega(z) \tag{0.ρ}$$

すると、${}_0\mu_n$ は次で表される。

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.μ}$$

証明

(1) $(1-z)^{n-1}$ の高階導関数

これは 1・1 (1) と同じである。即ち、

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}(1-z)^{n-1} = (-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1} \tag{1.1}$$

(2) $\log\omega(z)$ の高階導関数

(0.ρ) の両辺の対数を取ると

$$\log\omega(z) = \log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

両辺を z で微分すると

$$\frac{d}{dz}\log\omega(z) = \frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1/\rho_k}{1-z/\rho_k}$$

i.e.

$$\frac{d^1}{dz^1}\log\omega(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k-z}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\omega(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\rho_k-z)^2}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\log\omega(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(\rho_k-z)^3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k-z)^s} \tag{1.2μ}$$

(3) $(1-z)^{n-1}\log\omega(z)$ の高階微係数 $(z=0)$

(1.1) と (1.2μ) にライプニッツ則を適用すれば

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z) = -\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k-z)^s}$$

$(0-1)!$ は不可能なので、最初の Σ の添字の初期値を 0 から 1 に変更し

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z) = -\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(-1)^{n-s}(s)_{n-s}(1-z)^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k-z)^s}$$

更に

$$(s)_{n-s} = s(s+1)\cdots(n-1) = \frac{(n-1)!}{(s-1)!}$$

であるから

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z) = -\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(-1)^{n-s}\frac{(n-1)!}{(s-1)!}(1-z)^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k-z)^s}$$

i.e.

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z) = -(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(1-z)^{s-1}\frac{(-1)^s}{(\rho_k-z)^s}$$

臨界領域左端 $z=0$ における微係数は

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=0} = -(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{\rho_k^s}$$

$$= -(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{\rho_k^s}-1\right)$$

$$= -(-1)^{-n}(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n-1\right)$$

i.e

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=0} = (-1)^{-n}(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.3μ}$$

(4) 李係数 ${}_0\mu_n$

(1.3$_\mu$) を (1.2d) に代入して

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.μ}$$

Q.E.D.

1·3 ${}_0\lambda_1$ と ${}_0\mu_1$

李係数 ${}_0\lambda_n$, ${}_0\mu_n$ において特に $n=1$ のときは次の補題が成り立つ。

補題 1·3

ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ は $\omega(z)$ の零点とし、$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ とする。
すると、次が成立する。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = 0.0777839\cdots$$

証明

定理 1·2 において 特に $n=1$ のときは、

$$ {}_0\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}$$

$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ と置けば、

$$ {}_0\mu_1 = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right)$$

他方、定理 1·1 において 特に $n=1$ のときは、

$$ {}_0\lambda_1 = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$$

${}_0\lambda_1 = {}_0\mu_1$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = 0.0777839\cdots$$

Q.E.D.

Note

$\omega(z) = 1+A_1z^1+A_2z^2+A_3z^4+\cdots$ と展開したとき、拙著「 08 完備化されたディリクレベータのベキ級数 」定理 8·2·1 により次が成立する。これはヴィエタの公式である。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k} &= -A_1 \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\left(\log 2+\frac{\log\pi}{2}\right)\left(\gamma_0\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_0\left(\frac{3}{4}\right)\right)+\gamma_1\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_1\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{\psi_0(1)}{2}\left(\gamma_0\left(\frac{1}{4}\right)-\gamma_0\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right) \\ &= -(-0.0777839\cdots)\end{aligned}$$

2 臨界領域右端での李係数

本章における李係数は臨界領域右端 $z=1$ で定義されるものである。

2･1 ω 関数からの李係数 ₁λn

本節における李係数は、完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ から得られるものである。

定理 2･1

李係数 ${}_1\lambda_n$ は次の2式で定義されるとする。

$$ {}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n} z^{n-1} \log \omega(z)\right]_{z=1} \tag{2.1d} $$

$$ \omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z} \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{0.ω} $$

すると、${}_1\lambda_n$ は次で表される。

$$ {}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\xi(z)^t}\right]_{z=1} \tag{2.λ} $$

但し、$(a)_k$ はポッホハマー記号、$B_{n,k}\left(f_1, f_2, \ldots\right)$ は Bell 多項式である。

証明

(1) z^{n-1} の高階導関数

$$ \frac{d^s}{dz^s} z^{n-1} = \{(n-s)\cdots(n-2)(n-1)\} z^{n-1-s} $$

ポッホハマー記号 $(a)_k$ を用いると

$$ \frac{d^s}{dz^s} z^{n-1} = (n-s)_s z^{n-1-s} $$

s を $n-s$ に置換すれば

$$ \frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}} z^{n-1} = (s)_{n-s} z^{s-1} \tag{2.1} $$

(2) $\log \omega(z)$ の高階導関数

1･1･(2) と同様で、

$$ \frac{d^s}{dz^s}\log \omega(z) = \sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t} \qquad s \ge 1 \tag{1.2λ} $$

(3) $z^{n-1}\log \omega(z)$ の高階導関数

ライプニッツ則は

$$ \{f(z)g(z)\}^{(n)} = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} f^{(n-s)}(z)g^{(s)}(z) $$

これに (2.1) と (1.2λ) を代入すればすれば、$n,s \ge 1$ であるから

$$ \frac{d^n}{dz^n} z^{n-1}\log \omega(z) = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s} z^{s-1}\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t} \tag{2.3λ} $$

(4) 李係数 ${}_1\lambda_n$

(2.3$_\lambda$) を (2.1d) に代入して

$${}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}z^{s-1}\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t}\right]_{z=1}$$

i.e.

$${}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t}\right]_{z=1} \tag{2.λ}$$

Q.E.D.

最初の幾つかを書き下すと

$${}_1\lambda_1 = \frac{1}{0!}\lim_{z\to1}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$$

$${}_1\lambda_2 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\left\{\frac{2\omega'(z)}{\omega(z)}-\frac{z\omega'(z)^2}{\omega(z)^2}+\frac{z\omega''(z)}{\omega(z)}\right\}$$

$${}_1\lambda_3 = \frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left\{\frac{6\omega'(z)}{\omega(z)}-\frac{6z\omega'(z)^2}{\omega(z)^2}+\frac{2z^2\omega'(z)^3}{\omega(z)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{6z\omega''(z)}{\omega(z)}-\frac{3z^2\omega'(z)\omega''(z)}{\omega(z)^2}+\frac{z^2\omega^{(3)}(z)}{\omega(z)}\right\}$$

$$\vdots$$

また、数式処理ソフト*Mathematica* を用いてこの 3 つの例を計算すると、1･1 (4) の結果と完全に一致する。

2･2 アダマール積からの李係数 ${}_1\mu_n$

本節における李係数は、アダマール積から得られるものである。

定理 2･2

李係数 ${}_1\mu_n$ は次の2式で定義されるとする。

$${}_1\mu_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=1} \tag{2.2d}$$

$$\omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) \quad \textit{where, } \rho_k\ \left(k=1,2,3,\cdots\right) \textit{ are zeros of } \omega(z) \tag{0.ρ}$$

すると、${}_1\mu_n$ は次で表される。

$${}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) \tag{2.μ}$$

証明

(1) z^{n-1} の高階導関数

これは 2･1 (1) と同じである。即ち、

$$\frac{d^{n-s}}{dz^{n-s}}z^{n-1} = (s)_{n-s}z^{s-1} \tag{2.1}$$

(2) $\log\omega(z)$ の高階導関数

これは 1・2 (2) と同じである。即ち、

$$\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(s-1)!}{(\rho_k-z)^s}$$

但し、本節では ρ_k-z を $z-\rho_k$ に変更した次式を用いる。

$$\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(z-\rho_k)^s} \tag{2.2μ}$$

(3) $z^{n-1}\log\omega(z)$ の高階微係数 ($z=1$)

(2.1) と (2.2μ) にライプニッツ則を適用すれば

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\omega(z)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}z^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(z-\rho_k)^s}$$

$(0-1)!$ は不可能なので、最初の Σ の添字の初期値を 0 から 1 に変更し

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\omega(z)=\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}z^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{(z-\rho_k)^s}$$

更に

$$(s)_{n-s}=s(s+1)\cdots(n-1)=\frac{(n-1)!}{(s-1)!}$$

であるから

$$\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\omega(z)=-(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}z^{s-1}\frac{(-1)^s}{(z-\rho_k)^s}$$

臨界領域右端 $z=1$ における微係数は

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=1}=-(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{(1-\rho_k)^s}$$

$$=-(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{(-1)^s}{(1-\rho_k)^s}-1\right)$$

$$=-(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n-1\right)$$

i.e.

$$\left[\frac{d^n}{dz^n}z^{n-1}\log\omega(z)\right]_{z=1}=(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n\right) \tag{2.3μ}$$

(4) 李係数 ${}_1\mu_n$

(2.3μ) を (2.2d) に代入して

$${}_1\mu_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n\right)$$

ここで、複素数 ρ_k について

$$\left(1-\frac{1}{1-\rho_k}\right)^n=\left(\frac{-\rho_k}{1-\rho_k}\right)^n=\left(\frac{1-\rho_k}{-\rho_k}\right)^{-n}=\left(\frac{\rho_k-1}{\rho_k}\right)^{-n}=\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}$$

が成立するから、${}_1\mu_n$ は更に次のようになる。

$$ {}_{1}\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho_k} \right)^{-n} \right) \qquad \left(= {}_{0}\mu_{-n} \right) \tag{2.μ} $$

Q.E.D.

3 左右の李係数の不等値性

3･1 ω 関数からの李係数 ₀λn と ₁λn

　定理 1･1 及び 定理 2･1 では、臨界領域の左端及び右端での ω 関数からの李係数 ${}_0\lambda_n$, ${}_1\lambda_n$ が得られた。本節での問題は ${}_0\lambda_n$ と ${}_1\lambda_n$ が等しいか否かである。 結論から言うと、これらは等しい。以下、これを定理として示す。

定理 3･1

臨界領域両端の李係数 ${}_0\lambda_n$, ${}_1\lambda_n$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$ {}_0\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t}\right]_{z=0} \tag{1.λ}$$

$$ {}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}(t-1)!\,\frac{B_{s,t}\left(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}\right)}{\omega(z)^t}\right]_{z=1} \tag{2.λ}$$

但し、

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) \tag{0.ω}$$

すると、次式が成立する。

$$ {}_0\lambda_n = {}_1\lambda_n \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.1}$$

証明

(1.λ) と (2.λ) はそれぞれ次のように書き換えできる。

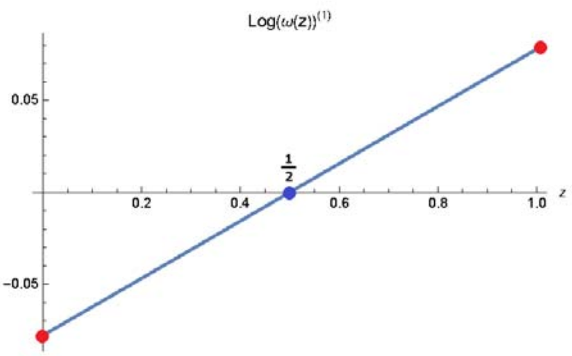
$$ {}_0\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}(-1)^s\left[\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z)\right]_{z=0}$$

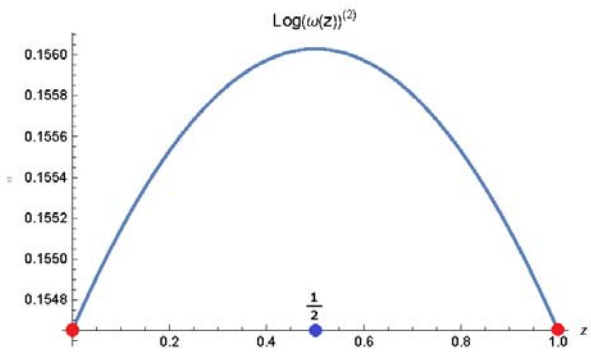
$$ {}_1\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}(s)_{n-s}\left[\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z)\right]_{z=1}$$

関数等式 $\omega(z)=\omega(1-z)$ により、$\omega(z)$ は $z=1/2$ に関して線対称である。従って $\log\omega(z)$ もまた $z=1/2$ に関して線対称である。そして $\log\omega$ の高階導関数は次のようになる。

　奇数階導関数:　$z=1/2$ に関して点対称(例:左図)。

　偶数階導関数:　$z=1/2$ に関して線対称(例:右図)。





よって $s=0$ および $s=1$ での $\log\omega(z)$ の高階微係数(赤点)について次式が成立する。

$$(-1)^s\left[\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z)\right]_{s=0} = \left[\frac{d^s}{dz^s}\log\omega(z)\right]_{s=1} \qquad for\ s=1,2,3,\cdots$$

かくして ${}_0\lambda_n = {}_1\lambda_n$ となる。　つまり、これは関数等式と定義式により無条件に成立する。　　　Q.E.D.

3·2 アダマール積からの李係数 $_0\mu_n$ と $_1\mu_n$

定理 1·2 及び 定理 2·2 では、臨界領域の左端及び右端でのアダマール積からの李係数 $_0\mu_n$, $_1\mu_n$ が得られた。本節での問題は $_0\mu_n$ と $_1\mu_n$ が等しいか否かである。

補題 3·2·1

ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ は ω 関数の零点とし、$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ とする。
すると、次が成立する。

(1) 奇数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-(2n-1)}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

(2) 偶数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

証明

ρ_k の虚部には±が存在するから、ρ_k を仮定のように割り当てる。すると、

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)=\left(1-\frac{1}{x_r-iy_r}\right)+\left(1-\frac{1}{x_r+iy_r}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{x_r-iy_r}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{x_r+iy_r}\right)^{-1}$$

右辺の分母を実数化すれば

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)=\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}-i\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)+\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}+i\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-1}=\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}-i\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)$$
$$+\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}+i\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)$$

これらは煩雑なので、次のように略記する。

$$\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}=A_r\quad,\quad\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}=B_r\quad,\quad\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}=C_r\ ,\quad\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}=D_r$$

すると、

$n=1$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)=\left(A_r-iB_r\right)+\left(A_r+iB_r\right)=2A_r$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-1}=\left(C_r-iD_r\right)+\left(C_r+iD_r\right)=2C_r$$

$n=2$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{2}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{2}=(A_r-iB_r)^2+(A_r+iB_r)^2=2\left(A_r^2-B_r^2\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-2}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-2}=(C_r-iD_r)^2+(C_r+iD_r)^2=2\left(C_r^2-D_r^2\right)$$

$n=3$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{3}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{3}=(A_r-iB_r)^3+(A_r+iB_r)^3=2\left(A_r^3-3A_rB_r^2\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-3}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-3}=(C_r-iD_r)^3+(C_r+iD_r)^3=2\left(C_r^3-3C_rD_r^2\right)$$

$n=4$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{4}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{4}=(A_r-iB_r)^4+(A_r+iB_r)^4=2\left(A_r^4-6A_r^2B_r^2+B_r^4\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-4}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-4}=(C_r-iD_r)^4+(C_r+iD_r)^4=2\left(C_r^4-6C_r^2D_r^2+D_r^4\right)$$

右辺 2( ) 内の係数の絶対値は

1, 1,1, 1,3, 1,6,1, 1,10,5, 1,15,15,1, …

この整数列は OEIS A098158 に一致し、次式で与えられる。

$$T(n,k)=Binomial(n,2k)\ ,\quad for\ \ n\ge 0\ \ \&\ \ k=0,1,2,\cdots$$

これを用いて、

奇数次

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{2n-1}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{2n-1}=2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-1-s}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}A_r^{2s+1}B_r^{2n-2s-2}$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-(2n-1)}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-(2n-1)}=2\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-1-s}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}C_r^{2s+1}D_r^{2n-2s-2}$$

偶数次

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{2n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{2n}=2\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}A_r^{2s}B_r^{2n-2s}$$

$$\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-2n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-2n}=2\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}C_r^{2s}D_r^{2n-2s}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{n}=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{n}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-n}+\left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-n}\right\}$$

であるから、記号 A_r, B_r, C_r, D_r を元に戻せば、

奇数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n-1}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2s+1}\left(\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2n-2s-2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-(2n-1)}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}$$

$$\times\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2s+1}\left(\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2n-2s-2}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-(2n-1)}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}$$

偶数次

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2s}\left(\frac{y_r}{x_r^2+y_r^2}\right)^{2n-2s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(\frac{x_r^2+y_r^2-x_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2s}\left(\frac{y_r}{(1-x_r)^2+y_r^2}\right)^{2n-2s}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-2n}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}$$

Q.E.D.

この補題を用いれば、 李係数 ${}_0\mu_n\,,{}_1\mu_n$ はそれぞれ次のように得られる。

定理 3·2·2

臨界領域両端の李係数 ${}_0\mu_n\,,{}_1\mu_n$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$ {}_0\mu_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{n}\right) \tag{1.μ}$$

$$ {}_1\mu_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right)\qquad\left(={}_0\mu_{-n}\right) \tag{2.μ}$$

但し、

$$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\qquad \rho_k\ \ (k=1,2,3,\cdots)\ \textit{are zeros of}\ \omega(z) \tag{0.ρ}$$

すると、$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r\,,\rho_{2r}=x_r+iy_r\quad r=1,2,3,\cdots$ と記述するとき、李係数 ${}_0\mu_n\,,{}_1\mu_n$ はそれぞれ次のように書き換えられる。

(1) 奇数次

$${}_0\mu_{2n-1}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\}$$

$${}_1\mu_{2n-1}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\}$$

(2) 偶数次

$${}_0\mu_{2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\}$$

$${}_1\mu_{2n}=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\}$$

証明

李係数は

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \quad , \quad {}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) $$

であるが、

$$ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^n + \left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^n\right\} $$

であるから

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{2-\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^n - \left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^n\right\} $$

$$ {}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{2-\left(1-\frac{1}{\rho_{2r-1}}\right)^{-n} - \left(1-\frac{1}{\rho_{2r}}\right)^{-n}\right\} $$

ここで 補題 3･2･1 を用いれば、、

(1) 奇数次

$$ {}_0\mu_{2n-1} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} $$

$$ {}_1\mu_{2n-1} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} $$

(2) 偶数次

$$ {}_0\mu_{2n} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(x_r^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} $$

$$ {}_1\mu_{2n} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left((1-x_r)^2+y_r^2\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(x_r^2+y_r^2-x_r\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} $$

Remark

1･2 及び 2･2 で見たように、$\omega(z)$ の零点 ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ は次式を満たす値である。

$$ {}_0\mu_n = {}_0\lambda_n \quad , \quad {}_1\mu_n = {}_1\lambda_n \qquad n=1,2,3,\cdots $$

そして 定理 3･1 より ${}_0\lambda_n = {}_1\lambda_n$ $n=1,2,3,\cdots$ であるから、${}_0\mu_n = {}_1\mu_n$ $n=1,2,3,\cdots$ とならねばならない。

然るに 定理 3･2･2 を観察すると、もし $x_r^2 \neq (1-x_r)^2$ $r=1,2,3,\cdots$ ならば、一般的に

$$ {}_0\mu_n \neq {}_1\mu_n \qquad n=1,2,3,\cdots $$

このことは、次なる4段論法が一般的には成立しないことを意味する。

$$ {}_0\mu_n = {}_0\lambda_n \ , \ {}_1\mu_n = {}_1\lambda_n \ , \ {}_0\lambda_n = {}_1\lambda_n \implies {}_0\mu_n = {}_1\mu_n $$

4 左右の李係数の等値条件

本章では ${}_0\mu_n = {}_1\mu_n \quad n=1,2,3,\cdots$ となる必要十分条件を求め、以ってディリクレベータ関数 $\beta(z)$ についてのリーマン予想が定理として成立することを証明する。

定理 4・1

臨界領域両端の李係数 ${}_0\mu_n\ ,\ {}_1\mu_n$ がそれぞれ次のようであるとする。

$$ {}_0\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^n\right) \tag{1.μ}$$

$$ {}_1\mu_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)^{-n}\right) \qquad \left(={}_0\mu_{-n}\right) \tag{2.μ}$$

但し、

$$\omega(z) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) \qquad \rho_k \ \left(k=1,2,3,\cdots\right) \text{ are zeros of } \omega(z) \tag{4.0}$$

すると、${}_0\mu_n = {}_1\mu_n \quad n=1,2,3,\cdots$ のための必要十分条件は $Re\left(\rho_k\right)=1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ である。

証明

最初に、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点と完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ の零点は同じである。そして、$\rho_{2r-1}=1/2-iy_r\ ,\ \rho_{2r}=1/2+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$ である。

I. 十分性

もし、$Re\left(\rho_k\right)=x_r=1/2 \quad r=1,2,3,\cdots$ ならば、定理 3・2・2 より

$$\begin{aligned}{}_0\mu_{2n-1} &= {}_1\mu_{2n-1}\\ &= 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}{}_0\mu_{2n} &= {}_1\mu_{2n}\\ &= 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

即ち、${}_0\mu_n = {}_1\mu_n \quad n=1,2,3,\cdots$ となる。

この結果、${}_0\lambda_n={}_0\mu_n\ ,\ {}_1\lambda_n={}_1\mu_n$ 及び 定理 3・1 を併せて次が完結する。

$$ {}_0\lambda_n = {}_0\mu_n = {}_1\mu_n = {}_1\lambda_n \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{4.3}$$

特に $n=1$ のとき、補題 1・3 より

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = 0.0777839\cdots \tag{4.3$_1$}$$

II. 必要性

ここで、臨界領域内において 臨界線上の零点以外に 臨界線外の零点が存在したと仮定する。このような零点の 1 組は次の 4 個から成るべきことが知られている。

$$1/2-\alpha_s \pm i\beta_s\ ,\ 1/2+\alpha_s \pm i\beta_s \quad \left(0<\alpha_s<1/2\ ,\ \beta_s>0\right)$$

すると 補題 1・3 より、次式が成立しなければならない。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right)+\sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2-\alpha_s-i\beta_s}+\frac{1}{1/2-\alpha_s+i\beta_s}\right)$$
$$+\sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2+\alpha_s-i\beta_s}+\frac{1}{1/2+\alpha_s+i\beta_s}\right) = \frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$$

i.e.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right)+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}=\frac{(-1)^1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$$

$$=0.0777839\cdots \tag{4.3$_2$}$$

然るに、$0<\alpha_s<1/2$ に対して $0<1-2\alpha_s<1+2\alpha_s<2$ であるから、

$$\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}>0$$

それ故、(4.3$_2$) は (4.3$_1$) に矛盾する。よって 臨界領域内では臨界線外の零点が存在してはならない。

その結果、 ${}_0\mu_n={}_1\mu_n$　 $n=1,2,3,\cdots$ は $Re(\rho_k)=1/2$　$k=1,2,3,\cdots$ のときにのみ成立することになる。

Q.E.D.

定理 4･2 (リーマン)

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点を ρ_k　$k=1,2,3,\cdots$ とするとき、$Re(\rho_k)=1/2$　$k=1,2,3,\cdots$ である。

証明

リーマン予想が成立するところでは当然 ${}_0\lambda_n={}_0\mu_n={}_1\mu_n={}_1\lambda_n$　 $n=1,2,3,\cdots$ でなければならない。
このための必要十分条件が $Re(\rho_k)=1/2$　$k=1,2,3,\cdots$ であることは 定理4･1 で証明された。
更に、これらの李係数は全て非負であり、李の基準を満たす。(**補 遺** 参照。)
よって、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ についてのリーマン予想は定理として成立する。

Q.E.D.

補 遺

定理 4・1の証明 によれば、 もし、$Re(\rho_k) = x_r = 1/2 \quad r=1,2,3,\cdots$ ならば、

$${}_0\mu_{2n-1} = {}_1\mu_{2n-1}$$

$$= 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\binom{2n-1}{2(n-s-1)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s+1}y_r^{2n-2s-2}\right\} \tag{4.1}$$

$${}_0\mu_{2n} = {}_1\mu_{2n}$$

$$= 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{1}{\left(y_r^2+1/4\right)^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{2n}{2(n-s)}\left(y_r^2-1/4\right)^{2s}y_r^{2n-2s}\right\} \tag{4.2}$$

確認計算

ディリクレベータ関数の実部が 1/2 である零点を生成する一般式は知られていないが、最初の 10000 個が ***Tomás Oliveira e Silva***（http://sweet.ua.pt/tos/zeta.html （004-001））によって提供されている。
そこで、これを用いて (4.1) , (4.2) により $\mu_1 \sim \mu_4$ を計算すると、次のようになる。

Loading Zeros of Dirichlet Beta Function

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
y := ReadList["BetaZeros.prn", Number]
```

2n-1

$$o\mu_{n\_}[m\_] := 2\sum_{r=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{(y[[r]]^2+1/4)^{2n-1}}\times \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\,\text{Binomial}[2n-1,\,2(n-s-1)]\,(y[[r]]^2-1/4)^{2s+1}\,y[[r]]^{2n-2s-2}\right)$$

2n

$$e\mu_{n\_}[m\_] := 2\sum_{r=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{(y[[r]]^2+1/4)^{2n}}\times \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\,\text{Binomial}[2n,\,2(n-s)]\,(y[[r]]^2-1/4)^{2s}\,y[[r]]^{2n-2s}\right)$$

N[{oμ$_1$[10000], eμ$_1$[10000], oμ$_2$[10000], eμ$_2$[10000]}]

{0.0776004, 0.309484, 0.692918, 1.22342}

これらを 1・1の計算結果 と比べると、それぞれ有効 2 桁まで一致していることが分る。

cf.

拙著「 09 完備化されたディリクレベータの李係数 」定理 9・3・3 によれば、$Re(\rho_k) = 1/2 \quad k=1,2,3,\cdots$ のとき

$${}_0\mu_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n-2}\left(\left(1/4+y_r^2\right)^{(2n-1)/2}\right)^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n-1}{2s}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

$${}_0\mu_{2n} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^2}{4^{2n-2}\left(1/4+y_r^2\right)^{2n}}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s 4^s\binom{2n}{2s+1}y_r^{2s}\right)^2 \qquad n=1,2,3,\cdots$$

これらは実数の平方和であるから、李の基準を満たしている。実は、これらと (4.1) , (4.2) は同値である。
例えば、

$$ {}_0\mu_3 = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{-3y_r^2\left(y_r^2-1/4\right)+\left(y_r^2-1/4\right)^2}{\left(y_r^2+1/4\right)^3}\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1-24y_r^2+144y_r^4}{4^2\left(y_r^2+1/4\right)^3} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(1-12y_r^2\right)^2}{4^2\left(y_r^2+1/4\right)^3} $$

$$ {}_0\mu_4 = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{1-\frac{y_r^4-6y_r^2\left(y_r^2-1/4\right)^2+\left(y_r^2-1/4\right)^4}{\left(y_r^2+1/4\right)^4}\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2-8y_r^4+16y_r^6}{\left(y_r^2+1/4\right)^4} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{y_r^2\left(4-16y_r^2\right)^2}{4^2\left(y_r^2+1/4\right)^4} $$

従って、(4.1) , (4.2) も李の基準を満たしている。

2026.02.20

河野 和
広島市

宇宙人の数学