ディリクレベータ関数のリーマン予想の因数分解による証明

要 旨

(1) 完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ と $\omega(1-z)$ はそれぞれ次のようにアダマール積 に因数分解される。

$$\omega(z)=\Pi(1-z/\rho)\quad,\quad\omega(1-z)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$$

(2) 全複素平面上で関数等式 $\omega(z)=\omega(1-z)$ が成立する。

(3) (1) と (2) にも関わらず、全複素平面上では一般的に $\Pi(1-z/\rho)\neq\Pi(1-(1-z)/\rho)$ である。

(4) 全複素平面上で $\Pi(1-z/\rho)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$ が成立するのは、全ての $Re(\rho)$ が $1/2$ のとき 且つそのときに限る。かくして全ての $Re(\rho)$ が $1/2$ のときにのみ、全複素平面上で四段論法 $\Pi(1-z/\rho)=\omega(z)=\omega(1-z)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$ が完結し、リーマン予想が成立する。

序 説

本稿で扱う関数

本稿ではディリクレベータ関数 $\beta(z)$ 及び完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ を扱う。それらはそれぞれ次式で定義される。

(0.0) $$\beta(z)=\frac{1}{1^z}-\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}-\frac{1}{7^z}+\cdots=\frac{1}{4^z}\left\{\zeta\left(z,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(z,\frac{3}{4}\right)\right\}$$

(0.1) $$\omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

なお、これらの零点は臨界領域($0<Re(z)<1$)においては同値であることが知られている。

$\beta(z)$ や $\omega(z)$ の零点の記法

$\beta(z)$ や $\omega(z)$ の零点 ρ は 本稿では次のように記述する。

(1) 複素数表記

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}\quad,\quad\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(2) 実部・虚部別表記

$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $\quad r=1,2,3,\cdots\quad(y_r>0)$ と置き、

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_r-iy_r}+\frac{1}{x_r+iy_r}\right)\quad,\quad\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)$$

1 2つのアダマール積

定理 1･1 (アダマール積)

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ が次のようであるとする。

(0.1) $$\omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

すると、$\omega(z)$ と $\omega(1-z)$ はそれらの零点 ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解される。

(1.1) $$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(1.2) $$\omega(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

証明

拙著「 5 完備化されたディリクレ･ベータの因数分解 」 公式 5･1･1 によると、$\omega(z)$ は次のようなアダマール積で表される。

(9.1) $$\omega(z)=e^{\left(\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\cdot e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}}$$

ここで

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{z}{x_r-iy_r}+\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}$$

と表せば (9.1) は

(9.1') $$\omega(z)=e^{\left(\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}}$$

更に x_n+iy_n $n=1,2,3,\cdots$ のうち、実部が $1/2$ であるものを $1/2\pm iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ 、実部が $1/2$ でないものを $1/2\pm\alpha_s\pm i\beta_s$ $(0<\alpha_s<1/2)$ $s=1,2,3,\cdots$ とすれば、(9.1') は次のようになる

(9.1'') $$\omega(z)=e^{\left(\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z}{1/4+y_r^2}}$$
$$\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\cdot e^{\sum_{s=1}\frac{(1-2\alpha_s)z}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$
$$\times\prod_{s=1}\left\{1-\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{z^2}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\cdot e^{\sum_{s=1}\frac{(1+2\alpha_s)z}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}}$$

(9.1') と (9.1'') の両辺に $z=1$ を代入すれば、

(9.2’) $$\omega(1)=1=e^{\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r-1}{x_r^2+y_r^2}\right)\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}}$$

(9.2”) $$\omega(1)=1$$

$$=e^{\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\times\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$\times e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}}$$

これらより

(9.3) $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r-1}{x_r^2+y_r^2}\right)=\prod_{s=1}\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

(9.4) $$e^{\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}}=e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}}$$

ここで都合の良いことに、

$$\left\{1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}\left\{1-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$=1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$=1+\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}-\frac{2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\frac{2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

$$=1$$

となるから (9.3), (9.4) は次のようになる。

(9.3’) $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_n-1}{x_n^2+y_n^2}\right)=1\qquad\left\{\text{i.e. }\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\rho_k}\right)=1\right\}$$

(9.4’) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{x_n^2+y_n^2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1/4+y_r^2}+\sum_{s=1}\left\{\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

(9.3’) を (9.2’) に代入すれば、

$$\omega(1)=1=e^{\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot e^{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x_r}{x_r^2+y_r^2}}=e^{\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}}$$

$1=e^0$ であるから、

(9.5) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}=4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}=0.07778398\cdots$$

従って

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{\rho_k}}=e^{\left(4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}\right)z}$$

これを (9.1) の右辺に代入すれば

$$\omega(z)=e^{\left(\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)\cdot e^{\left(4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}\right)z}$$

i.e.

(0.1) $$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

両辺は全複素平面上において正則であるから、z を $1-z$ に置換して

(0.2) $$\omega(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

Q.E.D.

Note .

$\omega(z)=1+A_1z^1+A_2z^2+A_3z^4+\cdots$ と展開したとき、ヴィエタの公式 により次が成立する。

(9.5) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}=-A_1=-\left(\frac{3\log\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}-\log 2-4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)=-(-0.07778398\cdots)$$

2 関数等式

定理 2·1 (関数等式)

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ が次のようであるとする。

(0.1) $$\omega(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)$$

すると、全複素平面上において次式が成立する。

(2.1) $$\omega(z)=\omega(1-z)$$

証明

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ については次なる関数等式が知られている。

$$\beta(z)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-z}\cos\frac{\pi z}{2}\,\Gamma(1-z)\beta(1-z) \qquad z\neq 1,2,3,\cdots$$

ここで

$$\cos\frac{\pi z}{2}=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}$$

これを上に代入して

$$\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-z}\frac{\pi\,\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}\beta(1-z)$$

さらに

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}=\frac{2^{-z}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)$$

これを上に代入して

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta(z)&=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-z}\frac{2^{-z}\pi}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)\\&=\frac{2^{1-z}}{(\sqrt{\pi})^{1-z}}\frac{2^{-z}\sqrt{\pi}}{(\sqrt{\pi})^{1-z}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)\\&=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1-z}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)\end{aligned}$$

両辺に $(2/\sqrt{\pi})^{1+z}$ を乗じて

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{1+z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)\beta(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{2-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2}\right)\beta(1-z)$$

i.e.

(2.1) $$\omega(z)=\omega(1-z)$$

$\omega(z)$ は全複素平面上で正則であるから、この関数等式は全複素平面上で成立する。

Q.E.D.

3 2つのアダマール積の不等値性

定理 1･1 より、$\omega(z)$ 及び $\omega(1-z)$ はその零点 ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解される。

(1.1) $$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(1.2) $$\omega(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

そして、定理 2･1 より、全複素平面上において次式が成立する。

(2.1) $$\omega(z)=\omega(1-z)$$

ここで問題は、全複素平面上において次式が成立するか否かである。

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$ と置けば、

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r+iy_r}\right)$$

両辺の( )( ) を展開すれば

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x_r-1}{x_r^2+y_r^2}-\frac{2(1-x_r)z}{x_r^2+y_r^2}+\frac{z^2}{x_r^2+y_r^2}\right)$$

これを観察すると、両辺は一般的に異なる級数である。つまり、この等式は一般的には全複素平面上で成立しない。

Remark

以上のことは、次なる4段論法が無条件には成立しないことを意味する。

$$\Pi(1-z/\rho)=\omega(z)\ ,\ \omega(z)=\omega(1-z)\ ,\ \omega(1-z)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi(1-z/\rho)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$$

4 アダマール積の等値条件

本章では 全複素平面上で $\Pi(1-z/\rho)=\Pi(1-(1-z)/\rho)$ が成立する必要十分条件を求め、以って ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ についてのリーマン予想が定理として成立することを証明する。

定理 4・1 (アダマール積の関数等式)

完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ 及び $\omega(1-z)$ がその零点 ρ_k $k=1,2,3,\cdots$ によってそれぞれ次のように因数分解されるとする。

(1.1) $$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)$$

(1.2) $$\omega(1-z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

すると、$Re(\rho_k)=1/2$ $k=1,2,3,\cdots$ ならば かつ、このときにのみ、全複素平面上で次式が成立する。

(4.1) $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)$$

証明

零点 ρ_k を次のように実部・虚部別に表わす。

$$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r\ ,\ \rho_{2r}=x_r+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r>0)$$

すると、(4.1) は

(4.1') $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r+iy_r}\right)$$

I. 十分性

もし、$x_r=1/2$ $r=1,2,3,\cdots$ ならば、(4.1') は

(4.1″) $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/2-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{1/2+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{1/2-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{1/2+iy_r}\right)$$

このペアの両辺の根を求めるよう。すると、、

左辺 $$1-\frac{z}{1/2-iy_r}=0\ ,\ 1-\frac{z}{1/2+iy_r}=0 \qquad r=1,2,3,\cdots$$

右辺 $$1-\frac{1-z}{1/2-iy_r}=0\ ,\ 1-\frac{1-z}{1/2+iy_r}=0 \qquad r=1,2,3,\cdots$$

これらより、

左辺 $z=1/2-iy_r$, $z=1/2+iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$

右辺 $z=1/2+iy_r$, $z=1/2-iy_r$ $r=1,2,3,\cdots$

左辺と右辺の零点は交差方向に一致している。このことは 左右が同じであることを意味している。

実際、(4.1″) は次のように書き換えできる。

(4.1″) $$\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4+y_r^2}+\frac{z^2}{1/4+y_r^2}\right)$$

これは明らかに全複素平面上で成立する。従って、(4.1) が全複素平面上で成立する。

II. 必要性

(1) x_r も y_r も重複しない場合

$\rho_{2r-1}=x_r-iy_r$, $\rho_{2r}=x_r+iy_r$　$r=1,2,3,\cdots$ とすると、

$$(4.1') \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r+iy_r}\right)=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r-iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r+iy_r}\right)$$

このペアの両辺の根を求めるよう。すると、、

左辺　$1-\dfrac{z}{x_r-iy_r}=0$, $1-\dfrac{z}{x_r+iy_r}=0$　　$r=1,2,3,\cdots$

右辺　$1-\dfrac{1-z}{x_r-iy_r}=0$, $1-\dfrac{1-z}{x_r+iy_r}=0$　　$r=1,2,3,\cdots$

これらより、

左辺　$z=x_r-iy_r$, $z=x_r+iy_r$　　$r=1,2,3,\cdots$

右辺　$z=1-x_r+iy_r$, $z=1-x_r-iy_r$　　$r=1,2,3,\cdots$

両辺は等しくなければならないから、虚部の符号と記号が一致するもので等式を作ると、

$$x_r-iy_r=1-x_r-iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$$

$$x_r+iy_r=1-x_r+iy_r \quad r=1,2,3,\cdots$$

これらより、

$$x_r=1-x_r \quad r=1,2,3,\cdots$$

i.e.　$x_r=1/2$　　$r=1,2,3,\cdots$

(2) x_r が重複する場合

x_r が重複するためには、少なくとも2組の共役零点が必要である。

見やすさのため、順番を入れ替えて x_1 と x_2 が重複し、x_3 以降は重複なしとする。

x_2 を x_1 に置換すれば、ρ_k　$k=1,\cdots,4$ は次のようになる。

$$\rho_1=x_1-iy_1 , \rho_2=x_1+iy_1 , \rho_3=x_1-iy_2 , \rho_4=x_1+iy_2$$

すると

左辺　$\displaystyle\prod_{k=1}^{4}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\left(1-\frac{z}{x_1-iy_1}\right)\left(1-\frac{z}{x_1+iy_1}\right)\left(1-\frac{z}{x_1-iy_2}\right)\left(1-\frac{z}{x_1+iy_2}\right)$

右辺　$\displaystyle\prod_{k=1}^{4}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)=\left(1-\frac{1-z}{x_1-iy_1}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_1+iy_1}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_1-iy_2}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_1+iy_2}\right)$

各ペアの両辺の根を求めるよう。すると、

左辺　$1-\dfrac{z}{x_1-iy_1}=0$, $1-\dfrac{z}{x_1+iy_1}=0$, $1-\dfrac{z}{x_1-iy_2}=0$, $1-\dfrac{z}{x_1+iy_2}=0$

右辺　$1-\dfrac{1-z}{x_1-iy_1}=0$, $1-\dfrac{1-z}{x_1+iy_1}=0$, $1-\dfrac{1-z}{x_1-iy_2}=0$, $1-\dfrac{1-z}{x_1+iy_2}=0$

これらより、

左辺　$z=x_1-iy_1$, $z=x_1+iy_1$, $z=x_1-iy_2$, $z=x_1+iy_2$

右辺　$z=1-x_1+iy_1$, $z=1-x_1-iy_1$, $z=1-x_1+iy_2$, $z=1-x_1-iy_2$

各組の両辺は等しくなければならないから、虚部の符号と記号が一致しているもので等式を作ると、

$$x_1 - iy_1 = 1 - x_1 - iy_1 \quad , \quad x_1 - iy_2 = 1 - x_1 - iy_2$$
$$x_1 + iy_1 = 1 - x_1 + iy_1 \quad , \quad x_1 + iy_2 = 1 - x_1 + iy_2$$

これらより、

$$x_1 = 1 - x_1$$

i.e. $\quad x_1 = 1/2$

この結果、

左辺 $\quad z = 1/2 - iy_1 \ , \ z = 1/2 + iy_1 \quad , \quad z = 1/2 - iy_2 \ , \ z = 1/2 + iy_2$

右辺 $\quad z = 1/2 + iy_1 \ , \ z = 1/2 - iy_1 \quad , \quad z = 1/2 + iy_2 \ , \ z = 1/2 - iy_2$

即ち、$z = 1/2 \pm iy_1$, $z = 1/2 \pm iy_2$ はそれぞれ 2 重根となる。

(3) y_r が重複する場合

y_r が重複するためには、少なくとも2組の共役零点が必要である。

見やすさのため、順番を入れ替えて y_1 と y_2 が重複し、y_3 以降は重複しないとする。

y_2 を y_1 に置換すれば、$\rho_k \quad k = 1, \cdots ,4$ は次のようになる。

$$\rho_1 = x_1 - iy_1 \ , \ \rho_2 = x_1 + iy_1 \ , \ \rho_3 = x_2 - iy_1 \ , \ \rho_4 = x_2 + iy_1$$

すると

左辺 $$\prod_{k=1}^{4}\left(1 - \frac{z}{\rho_k}\right) = \left(1 - \frac{z}{x_1 - iy_1}\right)\left(1 - \frac{z}{x_1 + iy_1}\right)\left(1 - \frac{z}{x_2 - iy_1}\right)\left(1 - \frac{z}{x_2 + iy_1}\right)$$

右辺 $$\prod_{k=1}^{4}\left(1 - \frac{1-z}{\rho_k}\right) = \left(1 - \frac{1-z}{x_1 - iy_1}\right)\left(1 - \frac{1-z}{x_1 + iy_1}\right)\left(1 - \frac{1-z}{x_2 - iy_1}\right)\left(1 - \frac{1-z}{x_2 + iy_1}\right)$$

以下の計算で もし $x_1 \neq x_2$ となったならば、多分、これらは臨界線外の零点である。

各ペアの両辺の根を求めるよう。すると、

左辺 $$1 - \frac{z}{x_1 - iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{z}{x_1 + iy_1} = 0 \quad , \quad 1 - \frac{z}{x_2 - iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{z}{x_2 + iy_1} = 0$$

右辺 $$1 - \frac{1-z}{x_1 - iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{1-z}{x_1 + iy_1} = 0 \quad , \quad 1 - \frac{1-z}{x_2 - iy_1} = 0 \ , \ 1 - \frac{1-z}{x_2 + iy_1} = 0$$

これらより、

左辺 $\quad z = x_1 - iy_1 \quad , \quad z = x_1 + iy_1 \quad , \quad z = x_2 - iy_1 \quad , \quad z = x_2 + iy_1$

右辺 $\quad z = 1 - x_1 + iy_1 \ , \ z = 1 - x_1 - iy_1 \quad , \quad z = 1 - x_2 + iy_1 \ , \ z = 1 - x_2 - iy_1$

各組の両辺は等しくなければならないから、虚部の符号と記号が一致しているもので等式を作ると、

$$x_1 - iy_1 = 1 - x_1 - iy_1 \quad , \quad x_2 - iy_1 = 1 - x_2 - iy_1$$
$$x_1 + iy_1 = 1 - x_1 + iy_1 \quad , \quad x_2 + iy_1 = 1 - x_2 + iy_1$$

これらより、

$$x_1 = 1 - x_1 \quad , \quad x_2 = 1 - x_2$$

i.e. $\quad x_1 = x_2 = 1/2$

この結果、

左辺 $\quad z = 1/2 - iy_1 \ , \ z = 1/2 + iy_1 \quad , \quad z = 1/2 - iy_1 \ , \ z = 1/2 + iy_1$

右辺 $\quad z = 1/2 + iy_1 \ , \ z = 1/2 - iy_1 \quad , \quad z = 1/2 + iy_1 \ , \ z = 1/2 - iy_1$

即ち、$z = 1/2 \pm iy_1$ は 4 重根となる。臨界線外の零点の可能性は消失した。

(4)　x_r も y_r も重複する場合

このためには、少なくとも2組の共役零点が必要である。

見やすさのため、順番を入れ替えて x_3 , y_3 以降は重複しないとする。

x_2 , y_2 を x_1 , y_1 に置換すれば、ρ_k　$k = 1,\cdots,4$ は次のようになる。

$$\rho_1 = x_1 - iy_1 \ , \ \rho_2 = x_1 + iy_1 \ , \ \rho_3 = x_1 - iy_1 \ , \ \rho_4 = x_1 + iy_1$$

すると、(3) と類似の計算により $x_1 = 1/2$ となり、$z = 1/2 \pm iy_1$ は 4 重根となる。

以上の結果、(4.1) は $Re(\rho_k) = 1/2$　$k=1,2,3,\cdots$ のときにのみ成立することになる。

Q.E.D.

別証

零点 ρ_k を次のように実部・虚部別に表わす。

$$\rho_{2r-1} = x_r - iy_r \ , \ \rho_{2r} = x_r + iy_r \quad r=1,2,3,\cdots \qquad (y_r > 0)$$

すると (4.1) は

$$(4.1') \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_r - iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{x_r + iy_r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{x_r - iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{x_r + iy_r}\right)$$

I. 十分性

もし、$x_r = 1/2$　$r=1,2,3,\cdots$　ならば、(4.1’) は

$$(4.1'') \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/2 - iy_r}\right)\left(1-\frac{z}{1/2 + iy_r}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{1/2 - iy_r}\right)\left(1-\frac{1-z}{1/2 + iy_r}\right)$$

両辺を展開すると

$$(4.1'') \quad \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4 + y_r^2}+\frac{z^2}{1/4 + y_r^2}\right) = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{1/4 + y_r^2}+\frac{z^2}{1/4 + y_r^2}\right)$$

明らかにこれは全複素平面上で成立する。従って、(4.1) は全複素平面上で成立する。

ここで重要なことは、これらの零点が実存していることである。(e.g. $1/2 + i\,6.0209489\cdots$)

この実存している零点について、定理 1・1 と 定理 2・1 により、全複素平面上で次が完結する。

$$\omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right) = \omega(1-z)$$

その結果、ヴィエタの公式 (9.5) より 次の等式が成立する。

$$(9.5') \quad \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2 - iy_r}+\frac{1}{1/2 + iy_r}\right) = 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2} = 0.07778398\cdots$$

II. 必要性

現在、臨界線外の非自明な零点は発見されていない。しかしながら、ここではそのような零点が存在したと仮定する。そのような零点の 1 組は次の 4 個から成るべきことが知られている。

$$1/2 - \alpha_s \pm i\beta_s \ , \ 1/2 + \alpha_s \pm i\beta_s \quad (0 < \alpha_s < 1/2 \ , \ \beta_s > 0)$$

すると ヴィエタの公式 (9.5) より、次式が成立しなければならない。

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2 - iy_r}+\frac{1}{1/2 + iy_r}\right) + \sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2 - \alpha_s - i\beta_s}+\frac{1}{1/2 - \alpha_s + i\beta_s}\right)$$
$$+\sum_{s=1}\left(\frac{1}{1/2 + \alpha_s - i\beta_s}+\frac{1}{1/2 + \alpha_s + i\beta_s}\right) = 4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}$$

i.e.

$$(9.5'')\quad \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1/2-iy_r}+\frac{1}{1/2+iy_r}\right)+\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}$$

$$=4\log\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\gamma}{2}+\log 2-\frac{3\log\pi}{2}=0.07778398\cdots$$

然るに、$0<\alpha_s<1/2$ に対して $0<1-2\alpha_s<1+2\alpha_s<2$ であるから、

$$\sum_{s=1}\left\{\frac{1-2\alpha_s}{(1/2-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\frac{1+2\alpha_s}{(1/2+\alpha_s)^2+\beta_s^2}\right\}>0$$

それ故、(9.5″) は (9.5’) に矛盾する。よって 臨界領域内では臨界線外の零点が存在してはならない。その結果、(4.1) は $Re(\rho_k)=1/2\quad k=1,2,3,\cdots$ のときにのみ成立することになる。

Q.E.D.

定理 4・2（リーマン）

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点を $\rho_k\quad k=1,2,3,\cdots$ とするとき、

$Re(\rho_k)=1/2\quad k=1,2,3,\cdots$ である。

証明

先ず、ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ の非自明な零点と完備化されたディリクレベータ関数 $\omega(z)$ の零点とは同値である。

これらの零点においては、関数等式は 関数のみならず アダマール積についても成立しなければならない。即ち、全複素平面上で次が成立しなければならない。

$$\omega(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_k}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-z}{\rho_k}\right)=\omega(1-z)$$

定理4・1 により、このための必要十分条件は $Re(\rho_k)=1/2\quad k=1,2,3,\cdots$ であることが証明された。よって ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ についてのリーマン予想は定理として成立する。

Q.E.D.

Note

ディリクレベータ関数 $\beta(z)$ は ディリクレ L- 関数の1種である。本稿の証明から予想されるように リーマン予想はディリクレ L- 関数についても証明できると思われる。

2026.03.01 Uploarded

河野 和
広島市

宇宙人の数学